Теорија Морса 2007/08. **Пети домаћи задатак**

(1) Нека је $f : M \to N$ глатка функција, γ градијентна линија која спаја критичне тачке $p = \gamma(-\infty) \neq \gamma(+\infty) = q$ и $h : t \mapsto f(\gamma(t))$.
  (а) Доказати да је h дифеоморфизам $\mathbb{R} \to (f(p), f(q))$
  (б) Доказати да је $f(\gamma(h^{-1}(t))) \equiv t$.
  (в) Доказати да је $\zeta := \gamma \circ h^{-1} : (f(a), f(b)) \to M$ решење диференцијалне једначине
$$\frac{d\zeta}{ds} = \frac{\nabla f(\zeta(s))}{\|\nabla f(\zeta(s))\|^2}.$$

(2) Нека је M Риманова многострукост, $f : M \to \mathbb{R}$ глатка функција, $N \subset M$ Риманова подмногострукост и $p \in N$.
  (а) Доказати да је градијент $\nabla(f|_N)(p)$ рестрикције f на N слика градијента $\nabla f(p)$ при ортогоналној пројекцији $T_pM \to T_pN$.
  (б) Ако је $\dim N = 1$, доказати да је $\nabla(f|_N) = \nabla f$ ако и само ако је N градијентна трајекторија. Извести закључак да је градијент „правац најбржег раста функције".
  (в) Ако је $\dim N = f^{-1}(t_0)$, доказати да је $\nabla f \perp N$.

(3) Доказати да Морсова функција на компактној површи рода g има најмање $2g + 2$ критичних тачака.

(4) Нека Морсова функција $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ задовољава $f(-x) = f(x)$. Доказати да f има бар две критичне тачке сваког индекса $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

(5) Нека је M компактна многострукост.
  (а) Ако је $\partial M = \emptyset$, доказати да постоји Морсова функција на M која у свим критичним тачкама има различите вредности.
  (б) Ако је $\partial M = \emptyset$ доказати да постоји Морсова функција на M таква да је $f(p) = m_p$ (где је m_p Морсов индекс) за сваку критичну тачку p. (Оваква функција назива се *самоиндексирајућом Морсовом функцијом.*)
  (в) Ако је $\partial M = N_0 \cup N_1$, где су N_0 и N_1 дисјунктне и компактне многострукости, доказати да постоји Морсова функција $f : M \to [0, 1]$ таква да је $f^{-1}(k) = N_k$, која нема критичних тачака у некој околини ∂M.

(6) Нека је M компактна многострукост без границе и $f : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција која има 3 критичне тачке.
  (а) Доказати да је $\dim M$ паран број.
  (б) Израчунати хомологију многострукости M.

(7) Нека је M компактна многострукост без границе, $\dim M = n$, $f : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција и $c_k(f)$ број њених критичних тачака индекса k.
  (а) Доказати да је $c_k(f) = c_{n-k}(-f)$.
  (б) Закључити из (а) да, ако је n непаран, онда је $\chi(M) = 0$.
  (в) Ако је за неко k $c_{k+1}(f) = c_{k-1}(f) = 0$, доказати да је $c_k(f) = \beta_k(M)$, где је $\beta_k(M) := \dim H_k(M; \mathbb{R})$ k-ти Бетијев број многострукости M.