Logika prvog reda. Semantika. Metod rezolucije.

Danijela Petrović

May 3, 2016

Sematika

- Semantika daje *značenje*

Sematika

- Semantika daje *značenje*
- U stilu Tarskog

$\mathcal{L}$-struktura $\mathcal{D}$

Za datu signaturu $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}$-struktura $\mathcal{D}$ je par $(D, I^{\mathcal{L}})$ gde je D skup, a $I^{\mathcal{L}}$ funkcija i pri tome važi:

- D je neprazan skup i to je *domen*

$\mathcal{L}$-struktura $\mathcal{D}$

Za datu signaturu $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}$-struktura $\mathcal{D}$ je par $(D, I^{\mathcal{L}})$ gde je D skup, a $I^{\mathcal{L}}$ funkcija i pri tome važi:

- D je neprazan skup i to je *domen*
- svakom simbolu konstante iz $\mathcal{L}$ funkcija $I^{\mathcal{L}}$ pridružuje jedan element iz domena $c_I \in D$

$\mathcal{L}$-struktura $\mathcal{D}$

Za datu signaturu $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}$-struktura $\mathcal{D}$ je par $(D, I^{\mathcal{L}})$ gde je D skup, a $I^{\mathcal{L}}$ funkcija i pri tome važi:

- D je neprazan skup i to je *domen*
- svakom simbolu konstante iz $\mathcal{L}$ funkcija $I^{\mathcal{L}}$ pridružuje jedan element iz domena $c_I \in D$
- svakom funkcijskom simbolu f, $ar(f) = n$ iz $\mathcal{L}$ funkcija $I^{\mathcal{L}}$ pridružuje funkciju $f_I : D^n \rightarrow D$

$\mathcal{L}$-struktura $\mathcal{D}$

Za datu signaturu $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}$-struktura $\mathcal{D}$ je par $(D, I^{\mathcal{L}})$ gde je D skup, a $I^{\mathcal{L}}$ funkcija i pri tome važi:

- D je neprazan skup i to je *domen*
- svakom simbolu konstante iz $\mathcal{L}$ funkcija $I^{\mathcal{L}}$ pridružuje jedan element iz domena $c_I \in D$
- svakom funkcijskom simbolu f, $ar(f) = n$ iz $\mathcal{L}$ funkcija $I^{\mathcal{L}}$ pridružuje funkciju $f_I : D^n \to D$
- svakom predikatskom simbolu p, $ar(p) = n$ iz $\mathcal{L}$ funkcija $I^{\mathcal{L}}$ pridružuje funkciju $p_I : D^n \to \{0, 1\}$

Valuacija

Valuacija v za skup promenljivih V i domen D je preslikavanje koje svakom elementu iz V dodeljuje vrednost iz D.

$$v(x_j) = d_j$$

-

Valuacija

Valuacija v za skup promenljivih V i domen D je preslikavanje koje svakom elementu iz V dodeljuje vrednost iz D.

$$v(x_j) = d_j$$

-
- par $(\mathcal{D}, v)$ određuje *interpretaciju*, I_v

Interpretacija

Vrednost TERMA t u interpretaciji I_v određenoj sa $(\mathcal{D}, v)$

- ako je t jednako promeljivoj x, onda $I_v(t) = v(x)$

Interpretacija

Vrednost TERMA t u interpretaciji I_v određenoj sa $(\mathcal{D}, v)$

- ako je t jednako promeljivoj x, onda $I_v(t) = v(x)$
- ako je t jednako konstanti c, onda $I_v(t) = c_I$

Interpretacija

Vrednost TERMA t u interpretaciji I_v određenoj sa $(\mathcal{D}, v)$

- ako je t jednako promeljivoj x, onda $I_v(t) = v(x)$
- ako je t jednako konstanti c, onda $I_v(t) = c_I$
- ako je t jednako funkciskom simbolu $f(t_1, \dots, t_n)$, $ar(f) = n$ i ako važi $I_v(t_i) = d_i$ onda $I_v(f(t_1, \dots, t_n)) = f_I(d_1, \dots, d_n)$

Interpretacija

Vrednost FORMULE $\mathcal{A}$ u interpretaciji I_v određenoj sa $(\mathcal{D}, v)$

- ako je $\mathcal{A}$ jednako $\perp$, onda $I_v(\perp) = 0$

Interpretacija

Vrednost FORMULE $\mathcal{A}$ u interpretaciji I_v određenoj sa $(\mathcal{D}, v)$

- ako je $\mathcal{A}$ jednako $\perp$, onda $I_v(\perp) = 0$
- ako je $\mathcal{A}$ jednako $\top$, onda $I_v(\top) = 1$

Interpretacija

Vrednost FORMULE $\mathcal{A}$ u interpretaciji I_v određenoj sa $(\mathcal{D}, v)$

- ako je $\mathcal{A}$ jednako $\perp$, onda $I_v(\perp) = 0$
- ako je $\mathcal{A}$ jednako $\top$, onda $I_v(\top) = 1$
- ako je $\mathcal{A}$ atomička formula $p(t_1, \ldots, t_n)$, $ar(p) = n$ i ako važi $I_v(t_i) = d_i$ onda $I_v(p(t_1, \ldots, t_n)) = p_I(d_1, \ldots, d_n)$

Interpretacija

Vrednost FORMULE $\mathcal{A}$ u interpretaciji I_v određenoj sa $(\mathcal{D}, v)$

- ako je $\mathcal{A}$ jednako $\bot$, onda $I_v(\bot) = 0$
- ako je $\mathcal{A}$ jednako $\top$, onda $I_v(\top) = 1$
- ako je $\mathcal{A}$ atomička formula $p(t_1, \ldots, t_n)$, $ar(p) = n$ i ako važi $I_v(t_i) = d_i$ onda $I_v(p(t_1, \ldots, t_n)) = p_I(d_1, \ldots, d_n)$
- ako je $\mathcal{A} = \neg\mathcal{B}$, onda

$$I_v(\neg\mathcal{B}) = \begin{cases} 0 & ako\ I_v(\mathcal{B}) = 1 \\ 1 & ako\ I_v(\mathcal{B}) = 0 \end{cases}$$

Interpretacija

Vrednost FORMULE $\mathcal{A}$ u interpretaciji I_v određenoj sa $(\mathcal{D}, v)$

- ako je $\mathcal{A}$ jednako $\bot$, onda $I_v(\bot) = 0$
- ako je $\mathcal{A}$ jednako $\top$, onda $I_v(\top) = 1$
- ako je $\mathcal{A}$ atomička formula $p(t_1, \dots, t_n)$, $ar(p) = n$ i ako važi $I_v(t_i) = d_i$ onda $I_v(p(t_1, \dots, t_n)) = p_I(d_1, \dots, d_n)$
- ako je $\mathcal{A} = \neg\mathcal{B}$, onda

$$I_v(\neg\mathcal{B}) = \begin{cases} 0 & ako\ I_v(\mathcal{B}) = 1 \\ 1 & ako\ I_v(\mathcal{B}) = 0 \end{cases}$$

- ako je $\mathcal{A} = \mathcal{B}_1 \land \mathcal{B}_2$, onda

$$I_v(\mathcal{B}_1 \land \mathcal{B}_2) = \begin{cases} 1 & ako\ I_v(\mathcal{B}_1) = 1\ i\ I_v(\mathcal{B}_2) = 1 \\ 0 & inače \end{cases}$$

Interpretacija

Vrednost FORMULE $\mathcal{A}$ u interpretaciji I_v određenoj sa $(\mathcal{D}, v)$

- ako je $\mathcal{A} = \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2$, onda

$$I_v(\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2) = \begin{cases} 1 & \textit{ako } I_v(\mathcal{B}_1) = 1 \textit{ ili } I_v(\mathcal{B}_2) = 1 \\ 0 & \textit{inače} \end{cases}$$

Interpretacija

Vrednost FORMULE $\mathcal{A}$ u interpretaciji I_v određenoj sa $(\mathcal{D}, v)$

- ako je $\mathcal{A} = \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2$, onda

$$I_v(\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2) = \begin{cases} 1 & \textit{ako } I_v(\mathcal{B}_1) = 1 \textit{ ili } I_v(\mathcal{B}_2) = 1 \\ 0 & \textit{inače} \end{cases}$$

- ako je $\mathcal{A} = \mathcal{B}_1 \Rightarrow \mathcal{B}_2$, onda

$$I_v(\mathcal{B}_1 \Rightarrow \mathcal{B}_2) = \begin{cases} 0 & \textit{ako } I_v(\mathcal{B}_1) = 1 \textit{ i } I_v(\mathcal{B}_2) = 0 \\ 1 & \textit{inače} \end{cases}$$

Interpretacija

Vrednost FORMULE $\mathcal{A}$ u interpretaciji I_v određenoj sa $(\mathcal{D}, v)$

- ako je $\mathcal{A} = \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2$, onda

$$I_v(\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2) = \begin{cases} 1 & \textit{ako } I_v(\mathcal{B}_1) = 1 \textit{ ili } I_v(\mathcal{B}_2) = 1 \\ 0 & \textit{inače} \end{cases}$$

- ako je $\mathcal{A} = \mathcal{B}_1 \Rightarrow \mathcal{B}_2$, onda

$$I_v(\mathcal{B}_1 \Rightarrow \mathcal{B}_2) = \begin{cases} 0 & \textit{ako } I_v(\mathcal{B}_1) = 1 \textit{ i } I_v(\mathcal{B}_2) = 0 \\ 1 & \textit{inače} \end{cases}$$

- ako je $\mathcal{A} = \mathcal{B}_1 \Leftrightarrow \mathcal{B}_2$, onda

$$I_v(\mathcal{B}_1 \Leftrightarrow \mathcal{B}_2) = \begin{cases} 1 & \textit{ako } I_v(\mathcal{B}_1) = I_v(\mathcal{B}_2) \\ 0 & \textit{inače} \end{cases}$$

Interpretacija

Vrednost FORMULE $\mathcal{A}$ u interpretaciji I_v određenoj sa $(\mathcal{D}, v)$

- ako je $\mathcal{A} = (\exists x)\mathcal{B}$, onda $I_v(\mathcal{A}) = 1$ ako postoji valuacija v takva da je $w \sim_x v$ i $I_w(\mathcal{B}) = 1$; inače $I_v(\mathcal{A}) = 0$

  podsetnik: $w \sim_x v$ ako za svako $y \neq x$ važi $w(y) = v(y)$

Interpretacija

Vrednost FORMULE $\mathcal{A}$ u interpretaciji I_v određenoj sa $(\mathcal{D}, v)$

- ako je $\mathcal{A} = (\exists x)\mathcal{B}$, onda $I_v(\mathcal{A}) = 1$ ako postoji valuacija v takva da je $w \sim_x v$ i $I_w(\mathcal{B}) = 1$; inače $I_v(\mathcal{A}) = 0$

  podsetnik: $w \sim_x v$ ako za svako $y \neq x$ važi $w(y) = v(y)$

- ako je $\mathcal{A} = (\forall x)\mathcal{B}$, onda $I_v(\mathcal{A}) = 0$ ako postoji valuacija v takva da je $w \sim_x v$ i $I_w(\mathcal{B}) = 0$; inače $I_v(\mathcal{A}) = 1$

- I_v *zadovoljava* formulu $\mathcal{A}$ ako $I_v(\mathcal{A}) = 1$

- I_v *zadovoljava* formulu $\mathcal{A}$ ako $I_v(\mathcal{A}) = 1$
- Formula $\mathcal{A}$ je *tačna* u interpretaciji I_v ako $I_v(\mathcal{A}) = 1$

- I_v *zadovoljava* formulu $\mathcal{A}$ ako $I_v(\mathcal{A}) = 1$
- Formula $\mathcal{A}$ je *tačna* u interpretaciji I_v ako $I_v(\mathcal{A}) = 1$
- Formula $\mathcal{A}$ je *zadovojiva* ako postoji valuacija v takva da $I_v(\mathcal{A}) = 1$

- I_v *zadovoljava* formulu $\mathcal{A}$ ako $I_v(\mathcal{A}) = 1$
- Formula $\mathcal{A}$ je *tačna* u interpretaciji I_v ako $I_v(\mathcal{A}) = 1$
- Formula $\mathcal{A}$ je *zadovojiva* ako postoji valuacija v takva da $I_v(\mathcal{A}) = 1$
- Formula *kontradiktorna* ako nije zadovoljiva.

- I_v *zadovoljava* formulu $\mathcal{A}$ ako $I_v(\mathcal{A}) = 1$
- Formula $\mathcal{A}$ je *tačna* u interpretaciji I_v ako $I_v(\mathcal{A}) = 1$
- Formula $\mathcal{A}$ je *zadovojiva* ako postoji valuacija v takva da $I_v(\mathcal{A}) = 1$
- Formula *kontradiktorna* ako nije zadovoljiva.
- Formula $\mathcal{A}$ je *valjana* ako u svakoj valuaciji v važi $I_v(\mathcal{A}) = 1$ Tada kazemo da je $\mathcal{D}$ *model* za formulu $\mathcal{A}$.

- I_v *zadovoljava* formulu $\mathcal{A}$ ako $I_v(\mathcal{A}) = 1$
- Formula $\mathcal{A}$ je *tačna* u interpretaciji I_v ako $I_v(\mathcal{A}) = 1$
- Formula $\mathcal{A}$ je *zadovojiva* ako postoji valuacija v takva da $I_v(\mathcal{A}) = 1$
- Formula *kontradiktorna* ako nije zadovoljiva.
- Formula $\mathcal{A}$ je *valjana* ako u svakoj valuaciji v važi $I_v(\mathcal{A}) = 1$ Tada kazemo da je $\mathcal{D}$ *model* za formulu $\mathcal{A}$.
- Ako formula nije valjana onda je *poreciva*

Supstitucija

Term dobijen ZAMENOM (SUPSTITUCIJOM) promenljive x *termom* t_x, $t[x \longrightarrow t_x]$

- ako je t konstanta $t[x \longrightarrow t_x] = t$

Supstitucija

Term dobijen ZAMENOM (SUPSTITUCIJOM) promenljive x termom t_x, $t[x \to t_x]$

- ako je t konstanta $t[x \to t_x] = t$
- ako je $t = x$ onda $t[x \to t_x] = t_x$

Supstitucija

Term dobijen ZAMENOM (SUPSTITUCIJOM) promenljive x *termom* t_x, $t[x \to t_x]$

- ako je t konstanta $t[x \to t_x] = t$
- ako je $t = x$ onda $t[x \to t_x] = t_x$
- ako je $t = y$ i $y \neq x$ onda $t[x \to t_x] = t$

Supstitucija

Term dobijen ZAMENOM (SUPSTITUCIJOM) promenljive x *termom* t_x, $t[x \rightarrow t_x]$

- ako je t konstanta $t[x \rightarrow t_x] = t$
- ako je $t = x$ onda $t[x \rightarrow t_x] = t_x$
- ako je $t = y$ i $y \neq x$ onda $t[x \rightarrow t_x] = t$
- ako je $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ onda
  $t[x \rightarrow t_x] = f(t_1[x \rightarrow t_x], \ldots, t_n[x \rightarrow t_x])$

Supstitucija

Formulu dobijnu ZAMENOM (SUPSTITUCIJOM) promenljive x termom t_x, $t[x \to t_x]$

- $\perp[x \to t_x] = \perp$

Supstitucija

Formulu dobijnu ZAMENOM (SUPSTITUCIJOM) promenljive x termom t_x, $t[x \rightarrow t_x]$

- $\perp[x \rightarrow t_x] = \perp$
- $\top[x \rightarrow t_x] = \top$

Supstitucija

Formulu dobijnu ZAMENOM (SUPSTITUCIJOM) promenljive x termom t_x, $t[x \to t_x]$

- $\bot[x \to t_x] = \bot$
- $\top[x \to t_x] = \top$
- $p(t_1, \dots, t_n)[x \to t_x] = p(t_1[x \to t_x], \dots, t_n[x \to t_x])$

Supstitucija

Formulu dobijnu ZAMENOM (SUPSTITUCIJOM) promenljive x termom t_x, $t[x \rightarrow t_x]$

- $\bot[x \rightarrow t_x] = \bot$
- $\top[x \rightarrow t_x] = \top$
- $p(t_1, \ldots, t_n)[x \rightarrow t_x] = p(t_1[x \rightarrow t_x], \ldots, t_n[x \rightarrow t_x])$
- $(\neg \mathcal{A})[x \rightarrow t_x] = \neg(\mathcal{A}[x \rightarrow t_x])$

Supstitucija

Formulu dobijnu ZAMENOM (SUPSTITUCIJOM) promenljive x termom t_x, $t[x \rightarrow t_x]$

- $\bot[x \rightarrow t_x] = \bot$
- $\top[x \rightarrow t_x] = \top$
- $p(t_1, \dots, t_n)[x \rightarrow t_x] = p(t_1[x \rightarrow t_x], \dots, t_n[x \rightarrow t_x])$
- $(\neg\mathcal{A})[x \rightarrow t_x] = \neg(\mathcal{A}[x \rightarrow t_x])$
- $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})[x \rightarrow t_x] = \mathcal{A}[x \rightarrow t_x] \wedge \mathcal{B}[x \rightarrow t_x]$

Supstitucija

Formulu dobijnu ZAMENOM (SUPSTITUCIJOM) promenljive x termom t_x, $t[x \to t_x]$

- $\bot[x \to t_x] = \bot$
- $\top[x \to t_x] = \top$
- $p(t_1, \ldots, t_n)[x \to t_x] = p(t_1[x \to t_x], \ldots, t_n[x \to t_x])$
- $(\neg\mathcal{A})[x \to t_x] = \neg(\mathcal{A}[x \to t_x])$
- $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})[x \to t_x] = \mathcal{A}[x \to t_x] \wedge \mathcal{B}[x \to t_x]$
- $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})[x \to t_x] = \mathcal{A}[x \to t_x] \vee \mathcal{B}[x \to t_x]$

Supstitucija

Formulu dobijnu ZAMENOM (SUPSTITUCIJOM) promenljive x *termom* t_x, $t[x \to t_x]$

- $\bot[x \to t_x] = \bot$
- $\top[x \to t_x] = \top$
- $p(t_1, \dots, t_n)[x \to t_x] = p(t_1[x \to t_x], \dots, t_n[x \to t_x])$
- $(\neg\mathcal{A})[x \to t_x] = \neg(\mathcal{A}[x \to t_x])$
- $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})[x \to t_x] = \mathcal{A}[x \to t_x] \wedge \mathcal{B}[x \to t_x]$
- $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})[x \to t_x] = \mathcal{A}[x \to t_x] \vee \mathcal{B}[x \to t_x]$
- $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})[x \to t_x] = \mathcal{A}[x \to t_x] \Rightarrow \mathcal{B}[x \to t_x]$

Supstitucija

Formulu dobijnu ZAMENOM (SUPSTITUCIJOM) promenljive x termom t_x, $t[x \to t_x]$

- $\bot[x \to t_x] = \bot$
- $\top[x \to t_x] = \top$
- $p(t_1, \ldots, t_n)[x \to t_x] = p(t_1[x \to t_x], \ldots, t_n[x \to t_x])$
- $(\neg\mathcal{A})[x \to t_x] = \neg(\mathcal{A}[x \to t_x])$
- $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})[x \to t_x] = \mathcal{A}[x \to t_x] \wedge \mathcal{B}[x \to t_x]$
- $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})[x \to t_x] = \mathcal{A}[x \to t_x] \vee \mathcal{B}[x \to t_x]$
- $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})[x \to t_x] = \mathcal{A}[x \to t_x] \Rightarrow \mathcal{B}[x \to t_x]$
- $(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B})[x \to t_x] = \mathcal{A}[x \to t_x] \Leftrightarrow \mathcal{B}[x \to t_x]$

Supstitucija

Formulu dobijnu ZAMENOM (SUPSTITUCIJOM) promenljive x termom t_x, $t[x \rightarrow t_x]$

- $\bot[x \rightarrow t_x] = \bot$
- $\top[x \rightarrow t_x] = \top$
- $p(t_1, \ldots, t_n)[x \rightarrow t_x] = p(t_1[x \rightarrow t_x], \ldots, t_n[x \rightarrow t_x])$
- $(\neg\mathcal{A})[x \rightarrow t_x] = \neg(\mathcal{A}[x \rightarrow t_x])$
- $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})[x \rightarrow t_x] = \mathcal{A}[x \rightarrow t_x] \wedge \mathcal{B}[x \rightarrow t_x]$
- $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})[x \rightarrow t_x] = \mathcal{A}[x \rightarrow t_x] \vee \mathcal{B}[x \rightarrow t_x]$
- $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})[x \rightarrow t_x] = \mathcal{A}[x \rightarrow t_x] \Rightarrow \mathcal{B}[x \rightarrow t_x]$
- $(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B})[x \rightarrow t_x] = \mathcal{A}[x \rightarrow t_x] \Leftrightarrow \mathcal{B}[x \rightarrow t_x]$
- $(\exists x\mathcal{A})[x \rightarrow t_x] = (\exists x\mathcal{A})$

Supstitucija

Formulu dobijnu ZAMENOM (SUPSTITUCIJOM) promenljive x termom t_x, $t[x \to t_x]$

- $\bot[x \to t_x] = \bot$
- $\top[x \to t_x] = \top$
- $p(t_1, \ldots, t_n)[x \to t_x] = p(t_1[x \to t_x], \ldots, t_n[x \to t_x])$
- $(\neg\mathcal{A})[x \to t_x] = \neg(\mathcal{A}[x \to t_x])$
- $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})[x \to t_x] = \mathcal{A}[x \to t_x] \wedge \mathcal{B}[x \to t_x]$
- $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})[x \to t_x] = \mathcal{A}[x \to t_x] \vee \mathcal{B}[x \to t_x]$
- $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})[x \to t_x] = \mathcal{A}[x \to t_x] \Rightarrow \mathcal{B}[x \to t_x]$
- $(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B})[x \to t_x] = \mathcal{A}[x \to t_x] \Leftrightarrow \mathcal{B}[x \to t_x]$
- $(\exists x\mathcal{A})[x \to t_x] = (\exists x\mathcal{A})$
- $(\forall x\mathcal{A})[x \to t_x] = (\forall x\mathcal{A})$

Supstitucija

Formulu dobijnu ZAMENOM (SUPSTITUCIJOM) promenljive x termom t_x, $t[x \longrightarrow t_x]$

- ako je $x \neq y$ i neka je z promenljiva koja se ne pojavljuje ni u $\mathcal{A}$, ni u t_x, onda $(\exists y \mathcal{A})[x \longrightarrow t_x] = (\exists z)\mathcal{A}[y \longrightarrow z][x \longrightarrow t_x]$

Supstitucija

Formulu dobijnu ZAMENOM (SUPSTITUCIJOM) promenljive x termom t_x, $t[x \rightarrow t_x]$

- ako je $x \neq y$ i neka je z promenljiva koja se ne pojavljuje ni u $\mathcal{A}$, ni u t_x, onda $(\exists y \mathcal{A})[x \rightarrow t_x] = (\exists z)\mathcal{A}[y \rightarrow z][x \rightarrow t_x]$
- ako je $x \neq y$ i neka je z promenljiva koja se ne pojavljuje ni u $\mathcal{A}$, ni u t_x, onda $(\forall y \mathcal{A})[x \rightarrow t_x] = (\forall z)\mathcal{A}[y \rightarrow z][x \rightarrow t_x]$

Supstitucija

Supstitucija (uopštena zamena, uopštena supstitucija) σ

Supstitucija σ je skup zamena $[x_1 \longrightarrow t_1], \ldots, [x_n \longrightarrow t_n]$ gde su x_i promenljive, a t_i termovi.

- efekat supstitucije σ na izraz E zapisujemo $E\sigma$

Supstitucija

Supstitucija (uopštena zamena, uopštena supstitucija) σ

Supstitucija σ je skup zamena $[x_1 \rightarrow t_1], \ldots, [x_n \rightarrow t_n]$ gde su x_i promenljive, a t_i termovi.

- efekat supstitucije σ na izraz E zapisujemo $E\sigma$
- *Idempotenta* supstitucija – $E\sigma = (E\sigma)\sigma$; ni jedan od termova t_i ne sadrži neku od promenljivih x_j

(primeri iz udžbenika)

1. $\sigma = [x \to f(y)]$, $s = g(a, x)$, $s\sigma =?$
2. $\sigma = [x \to f(y)]$, $s = g(a, x)$, $s\sigma =?$
3. $\sigma = [x \to f(y), y \to a]$, $s = g(a, x)$, $t = g(y, g(x, y))$, $s\sigma =?$, $t\sigma =?$
4. $\psi = [x \to f(y)]$, $\lambda = [y \to g(z)]$, $\psi\lambda =?$
5. $\psi = [x \to y]$, $\lambda = [y \to x]$, $\psi\lambda =?$
6. $\psi = [x \to f(y)]$, $\lambda = [x \to g(z)]$, $\psi\lambda =?$
7. $\psi = [x \to f(y)]$, $\lambda = [x \to a]$, $\psi\lambda =?$

PRENEX normalna forma

Kažemo da je formula u prenex normalnoj formi ako je oblika

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \mathcal{A}$$

pri čemu je Q neki kvantifikator (*exists* ili *forall*) i $\mathcal{A}$ nema drugih kvantifikatora.

- Svaka zatvorena formula može biti transformisana u svoju prenex normalnu formu.

PRENEX algoritam

- $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$

PRENEX algoritam

- $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$
- $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B} \equiv (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$

PRENEX algoritam

- $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$
- $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B} \equiv (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$
- ....

(primer iz udžbenika)

1. $\forall x\ p(x) \wedge \forall x \exists y \forall z (q(y,z) \Rightarrow r(g(x),y))$

Konjuktivna normalna forma

Formula bez kvantifikatora je u konjuktivnoj normalnoj formi ako je oblika

$$\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \ldots \mathcal{A}_n$$

gde je $\mathcal{A}_i$ disjunkcija literala.

Klauzalna forma

Formula je u klauzalnoj formi ako je oblika

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \mathcal{A}$$

pri čemu je $\mathcal{A}$ formula bez kvantifikatora koja je u *konjuktivnoj normalnoj formi* i nema slobodnih promenljivih osim, eventualno, $x_1, x_2, \dots, x_n$

Skolemizacija

- Ne postoji za svaku rečenicu formula koja je u klauzalnoj formi:
  $(\exists x)p(x)$

Skolemizacija

- Ne postoji za svaku rečenicu formula koja je u klauzalnoj formi:
  $(\exists x)p(x)$
- Ali, za svaku rečenicu $\mathcal{A}$ postoji formula $\mathcal{B}$ koja je u klauzalnoj formi i važi da je $\mathcal{A}$ **zadovoljiva ako i samo ako je $\mathcal{B}$ zadovoljiva.** (*slaba ekvivalencija*.)

Skolemizacija

- Ne postoji za svaku rečenicu formula koja je u klauzalnoj formi:
  $(\exists x)p(x)$
- Ali, za svaku rečenicu $\mathcal{A}$ postoji formula $\mathcal{B}$ koja je u klauzalnoj formi i važi da je $\mathcal{A}$ **zadovoljiva ako i samo ako je $\mathcal{B}$ zadovoljiva.** (*slaba ekvivalencija*.)
- Menja se polazna signatura, eleminišu se egzistencijalni kvantifikatori.

Skolemizacija

- Ne postoji za svaku rečenicu formula koja je u klauzalnoj formi:
  $(\exists x)p(x)$
- Ali, za svaku rečenicu $\mathcal{A}$ postoji formula $\mathcal{B}$ koja je u klauzalnoj formi i važi da je $\mathcal{A}$ **zadovoljiva ako i samo ako je** $\mathcal{B}$ **zadovoljiva.** (*slaba ekvivalencija*.)
- Menja se polazna signatura, eleminišu se egzistencijalni kvantifikatori.
- *Skolemizacija* – izbacivanje egzistencijalnih kvantifikatora.

Skolemizacija

- Ne postoji za svaku rečenicu formula koja je u klauzalnoj formi:
  $(\exists x)p(x)$
- Ali, za svaku rečenicu $\mathcal{A}$ postoji formula $\mathcal{B}$ koja je u klauzalnoj formi i važi da je $\mathcal{A}$ **zadovoljiva ako i samo ako je** $\mathcal{B}$ **zadovoljiva.** (*slaba ekvivalencija*.)
- Menja se polazna signatura, eleminišu se egzistencijalni kvantifikatori.
- *Skolemizacija* – izbacivanje egzistencijalnih kvantifikatora.
- Uvode se novi funkcijski simboli: konstante (*skolemovane konstante*) i funkcijski simboli (*skolemovane funkcije*)

Skolemizacija

- $\exists y \mathcal{A}$
  d – novi simbol konstante
  $\mathcal{A}[y \rightarrow d]$

Skolemizacija

- $\exists y \mathcal{A}$
  d – novi simbol konstante
  $\mathcal{A}[y \to d]$

- $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \exists y \mathcal{A}$
  f – novi funkcijski simbol, $ar(f) = n$
  $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \mathcal{A}[y \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$

(primer iz udžbenika) – odrediti prenex ... nastavak primera

1. $\forall x\ p(x) \wedge \forall x \exists y \forall z (q(y,z) \Rightarrow r(g(x),y))$

Unifikacija Problem unifikacije je problem ispitivanja da li postoji supstitucija koja čini dva izraza jednakim.

Ako su e_1 i e_2 izrazi i ako postoji supstitucija takva da važi $e_1\sigma = e_2\sigma$ onda kažemo da su e_1 i e_2 *unifikabilni* i da je supstitucija σ *unifikator* za ta dva izraza.

Najopštiji unifikator

Supstitucija σ je najopštiji unifikator za izraze e_1 i e_2 ako svaki njihov unifikator τ može biti predstavljen u obliku $\tau = \sigma\mu$ gde je μ neka supstitucija.

Primene: pre svega u metodi rezolucije

Algoritam najopštiji unifikator Dat je niz parova

$$(s_1, t_1)(s_2, t_2)\ldots(s_n, t_n)$$

i traži se supstitucija σ tako da

$$s_1\sigma = t_1\sigma, s_2\sigma = t_2\sigma, \ldots s_n\sigma = t_n\sigma$$

- *factoring*: ako ima jednakosti koje imaju više od jednog pojavljivanja obrisati sva osim jednog pojavljivanja

Algoritam najopštiji unifikator Dat je niz parova

$$(s_1, t_1)(s_2, t_2)\dots(s_n, t_n)$$

i traži se supstitucija σ tako da

$$s_1\sigma = t_1\sigma, s_2\sigma = t_2\sigma, \dots s_n\sigma = t_n\sigma$$

- *factoring*: ako ima jednakosti koje imaju više od jednog pojavljivanja obrisati sva osim jednog pojavljivanja
- *tautology*: obrisati sve jednakosti oblika $t = t$

Algoritam najopštiji unifikator

- *orientation*: x – promenljiva, t – term koji nije promenljiva
  zameniti sve $t = x$ sa $x = t$

Algoritam najopštiji unifikator

- *orientation*: x – promenljiva, t – term koji nije promenljiva zameniti sve $t = x$ sa $x = t$
- *decomposition*: $s = \phi(t_1, \ldots, t_n)$ i $v = \phi(k_1, \ldots, k_n)$ i $s = v$ izbrisati $s = v$ i dodati $t_1 = k_1 \ldots t_n = k_n$

Algoritam najopštiji unifikator

- *orientation*: x – promenljiva, t – term koji nije promenljiva zameniti sve $t = x$ sa $x = t$
- *decomposition*: $s = \phi(t_1, \ldots, t_n)$ i $v = \phi(k_1, \ldots, k_n)$ i $s = v$ izbrisati $s = v$ i dodati $t_1 = k_1 \ldots t_n = k_n$
- *collision*: ukoliko $s = v$, a s i v su bilo kog drugog oblika, vrati **neuspeh**

  primeri: jedan term konstante, drugi nije
  razlikuju se njihovi vodeći funkcijski (predikatski) simboli
  različite su arnosti

Algoritam najopštiji unifikator

- *cycle*: x - promenljiva; t - term koji sadrži x i imamo $x = t$
  vrati **neuspeh**

Algoritam najopštiji unifikator

- *cycle*: x - promenljiva; t - term koji sadrži x i imamo $x = t$
  vrati **neuspeh**
- *application*: x - promenljiva; t - term koji ne sadrži x i imamo $x = t$
  primeni supstituciju $[x \rightarrow t]$ na sve druge jednakosti

Algoritam najopštiji unifikator

- *cycle*: x - promenljiva; t - term koji sadrži x i imamo $x = t$
  vrati **neuspeh**
- *application*: x - promenljiva; t - term koji ne sadrži x i imamo $x = t$
  primeni supstituciju $[x \rightarrow t]$ na sve druge jednakosti
- ako nije moguće ništa od ovoga vrati tekući skup kao rešenje

Korektnost algoritma najopštiji unifikator

Algoritam Najopštiji unifikator zadovoljava sledeće uslove:

- zaustavlja se

Algoritam nije efikasan, postoje bolji.

Korektnost algoritma najopštiji unifikator

Algoritam Najopštiji unifikator zadovoljava sledeće uslove:

- zaustavlja se
- ako vrati supstituciju onda je ona najopštiji unifikator za dati niz jednakosti

Algoritam nije efikasan, postoje bolji.

Korektnost algoritma najopštiji unifikator

Algoritam Najopštiji unifikator zadovoljava sledeće uslove:

- zaustavlja se
- ako vrati supstituciju onda je ona najopštiji unifikator za dati niz jednakosti
- ako se završi neuspehom onda ne postoji unifikator za dati niz parova izraza

Algoritam nije efikasan, postoje bolji.

(zadaci iz udžbenika)
Naći najopštiji unifikator za sledeće parove formula:

1. $f(a, g(x, y))$, $f(z, g(a, z))$ – x, y i z su simboli promenljivih, a a je simbol konstante
2. $(g(x, h(y, z)), g(u, x))$, $(f(x), f(h(c, v)))$, $(g(z, u), g(y, u))$ (nema konstanti)

- Postupak ispitivanja nezadovoljivosti skupa klauza iskazne logike.

- Postupak ispitivanja nezadovoljivosti skupa klauza iskazne logike.
- U iskaznoj logici primenjuje se na formule koje su u *konjuktivnoj normalnoj formi*

- Postupak ispitivanja nezadovoljivosti skupa klauza iskazne logike.
- U iskaznoj logici primenjuje se na formule koje su u *konjuktivnoj normalnoj formi*
- U logici prvog reda primenjuje se na formule koje su u *klauzalnoj formi*

Metod rezolucije za iskaznu logiku

$$\frac{C' \vee l \quad C'' \vee \bar{l}}{C' \vee C''}$$

Teorema

Metod rezolucije *se zaustavlja* za svaku iskaznu formulu i u završnom skupu klauza postoji prazna klauza ako i samo ako je polazna formula nezadovoljiva.

Metod rezolucije za logiku prvog reda

$$\frac{\Gamma' \vee A' \quad \Gamma'' \vee \neg A''}{\Gamma' \vee \Gamma''}\sigma$$

σ je najopštiji unifikator za A' i A''.

Teorema

Ako je Γ *nezadovoljiv* skup klauza, onda se iz njega metodom rezolucije *može izvesti prazna klauza*.