Vežbe iz veštačke inteligencije: Iskazna logika

Zadatak 1 *Odrediti formulu A takvu da je formula $((A \wedge q) \Rightarrow \neg p) \Rightarrow ((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow A)$ tautologija.*

Ako je $v(p) = 0$ i $v(q) = 0$, onda je $I_v(A \wedge q) = 0$ i $I_v((A \wedge q) \Rightarrow \neg p) = 1$. Slično, ako je $v(p) = 1$ i $v(q) = 1$, onda je $I_v(A \wedge q) = I_v(A)$ i $I_v(\neg p) = 0$, pa je $I_v((A \wedge q) \Rightarrow \neg p) = 1 - I_v(A)$. Analogno određujemo istinitosnu vrednost date formule za svaku kombinaciju vrednosti $v(p)$ i $v(q)$. Te vrednosti prikazane su u narednoj tablici:

$((A$	$\wedge$	$q)$	$\Rightarrow$	$\neg$	$p)$	$\Rightarrow$	$((p$	$\Rightarrow$	$\neg$	$q)$	$\Rightarrow$	$A)$
	0	0	1	1	0	$I_v(A)$	0	1	1	0	$I_v(A)$	
	$I_v(A)$	1	1	1	0	$I_v(A)$	0	1	0	1	$I_v(A)$	
	0	0	1	0	1	$I_v(A)$	1	1	1	0	$I_v(A)$	
	$I_v(A)$	1	$1 - I_v(A)$	0	1	1	1	0	0	1	1	

Dakle, da bi data formula bila tautologija mora da važi $I_v(A) = 1$ u slučajevima $v(p) = v(q) = 0$, $v(p) = 0, v(q) = 1$, $v(p) = 1, v(q) = 0$, dok u slučaju $v(p) = v(q) = 1$, formula A može da ima proizvoljnu vrednost. Dakle, formula A za koju u svakoj valuaciji važi $I_v(A) = 1$ ispunjava uslov zadatka, pa A može biti formula $\top$.

Zadatak 2 *$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$ ako i samo ako $\models (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow B$.*

Pretpostavimo da važi $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$. Pretpostavimo da formula $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow B$ nije tautologija. Tada postoji valuacija u kojoj je formula B netačna, a formula $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n)$ tačna. Ako je u toj valuaciji formula $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n)$ tačna, onda je tačna i svaka od formula A_1, A_2, ..., A_n. S druge strane, kako važi $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$, sledi da je u toj valuaciji tačna i formula B, što protivreči prethodnom zaključku da formula B nije tačna u toj valuaciji. Dakle, pogrešna je pretpostavka da $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow B$ nije tautologija, tj. važi $\models (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow B$.

Pretpostavimo da važi $\models (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow B$. Pretpostavimo da ne važi $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$. To znači da postoji valuacija u kojoj je svaka od formula A_1, A_2, ..., A_n tačna, a formula B nije. U toj valuaciji je tačna i formula $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n)$, a netačna je formula $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow B$. Odatle sledi da formula $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow B$ nije tautologija, što je suprotno pretpostavci. Dakle, mora da važi $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$, što je i trebalo dokazati.

Zadatak 3 *Pomoću DPLL algoritma i metoda rezolucije za iskaznu logiku proveriti da li je formula*

$$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)) \Rightarrow (p \wedge q)$$

valjana.

Proverićemo da li je negacija formule nezadovoljiva. Prvo nalazimo KNF negacije formule.

$$\neg(((p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)) \Rightarrow (p \wedge q))$$

$$\neg(\neg((p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)) \vee (p \wedge q)$$

$$\neg((\neg(p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(p \vee \neg q)) \vee (p \wedge q)$$

$$\neg(\neg(p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(p \vee \neg q)) \wedge \neg(p \wedge q)$$

$$\neg\neg(p \vee q) \wedge \neg\neg(\neg p \vee q) \wedge \neg\neg(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$$

$$\neg(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg(\neg\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg\neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$$

$$(\neg\neg p \vee \neg\neg q) \wedge (\neg\neg\neg p \vee \neg\neg q) \wedge (\neg\neg p \vee \neg\neg\neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$$

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$$

Multiskup klauza D je $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$

DPLL:

1. Split 1 (Probaj DPLL($D[p \to \top]$))

$$(\top \vee q) \wedge (\neg\top \vee q) \wedge (\top \vee \neg q) \wedge (\neg\top \vee \neg q)$$

2. $\neg\top \to \bot$

$$(\top \vee q) \wedge (\bot \vee q) \wedge (\top \vee \neg q) \wedge (\bot \vee \neg q)$$

3. Brisanje $\bot$

$$(\top \vee q) \wedge q \wedge (\top \vee \neg q) \wedge \neg q$$

4. Tautology

$$q \wedge (\top \vee \neg q) \wedge \neg q$$

5. Tautology

$$q \wedge \neg q$$

6. Unit propagation (Vrati DPLL($D[q \to \top]$))

$$\top \wedge \neg\top$$

7. $\neg\top \to \bot$

$$\top \wedge \bot$$

8. Brisanje $\bot$

$$\top \wedge \square$$

9. Vrati NE - povratak ispred Split 1

10. Split 2 (Vrati DPLL($D[p \to \bot]$))

$$(\bot \vee q) \wedge (\neg\bot \vee q) \wedge (\bot \vee \neg q) \wedge (\neg\bot \vee \neg q)$$

11. $\neg\bot \to \top$
$$(\bot \vee q) \wedge (\top \vee q) \wedge (\bot \vee \neg q) \wedge (\top \vee \neg q)$$

12. Brisanje $\bot$
$$q \wedge (\top \vee q) \wedge \neg q \wedge (\top \vee \neg q)$$

13. Tautology
$$q \wedge \neg q \wedge (\top \vee \neg q)$$

14. Tautology
$$q \wedge \neg q$$

15. Unit propagation (Vrati DPLL($D[q \to \top]$))
$$\top \wedge \neg \top$$

16. $\neg\top \to \bot$
$$\top \wedge \bot$$

17. Brisanje $\bot$
$$\top \wedge \Box$$

18. Vrati NE - povratak ispred Split 2

Algoritam vraća odgovor NE, pa negacija formule nije zadovoljiva, odnosno formula je valjana.

Rezolucija:
$C1: \; p, q$
$C2: \; \neg p, q$
$C3: \; p, \neg q$
$C4: \; \neg p, \neg q$
$C5: \; q \quad (C1:1, C2:1)$
$C6: \; \neg q \quad (C3:1, C4:1)$
$C7: \; \Box \quad (C5:1, C6:1)$

Izvedena je prazna klauza, pa je negacija formule nezadovoljiva, odnosno formula je valjana.

Zadatak 4 *Pomoću DPLL algoritma i metoda rezolucije za iskaznu logiku proveriti da li je formula*
$$(\neg p \vee \neg q \vee r) \Rightarrow \neg(p \wedge q)$$
valjana.

Proverićemo da li je negacija formule nezadovoljiva. Prvo nalazimo KNF negacije formule.
$$\neg((\neg p \vee \neg q \vee r) \Rightarrow \neg(p \wedge q))$$
$$\neg(\neg(\neg p \vee \neg q \vee r) \vee \neg(p \wedge q))$$
$$\neg\neg(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge \neg\neg(p \wedge q)$$
$$\neg(\neg\neg p \wedge \neg\neg q \wedge \neg r) \wedge \neg(\neg p \vee \neg q)$$

$$(\neg\neg\neg p \vee \neg\neg\neg q \vee \neg\neg r) \wedge \neg\neg p \wedge \neg\neg q$$

$$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge p \wedge q$$

Multiskup klauza D je $\{\{\neg p, \neg q, r\}, \{p\}, \{q\}\}$

DPLL:

1. Unit propagation (Vrati DPLL($D[p \to \top]$))

$$(\neg\top \vee \neg q \vee r) \wedge \top \wedge q$$

2. $\neg\top \to \bot$

$$(\bot \vee \neg q \vee r) \wedge \top \wedge q$$

3. Brisanje $\bot$

$$(\neg q \vee r) \wedge \top \wedge q$$

4. Tautology

$$(\neg q \vee r) \wedge q$$

5. Unit propagation (Vrati DPLL($D[q \to \top]$))

$$(\neg\top \vee r) \wedge \top$$

6. $\neg\top \to \bot$

$$(\bot \vee r) \wedge \top$$

7. Brisanje $\bot$

$$r \wedge \top$$

8. Tautology

$$r$$

9. Unit propagation (Vrati DPLL($D[r \to \top]$))

$$\top$$

10. Tautology

$$\emptyset$$

11. Vrati DA

Algoritam vraća DA, pa je negacija formule zadovoljiva, odnosno, formula nije valjana.

Rezolucija:
$C1: \quad \neg p, \neg q, r$
$C2: \quad p$
$C3: \quad q$
$C4: \quad \neg q, r \qquad (C1:1, C2:1)$
$C5: \quad \neg p, r \qquad (C1:2, C3:1)$
$C6: \quad r \qquad (C2:1, C5:1)$

Ne mogu se izvesti nove klauze, a prazna klauza nije izvedena, pa je negacija formule zadovoljiva, odnosno formula nije valjana.

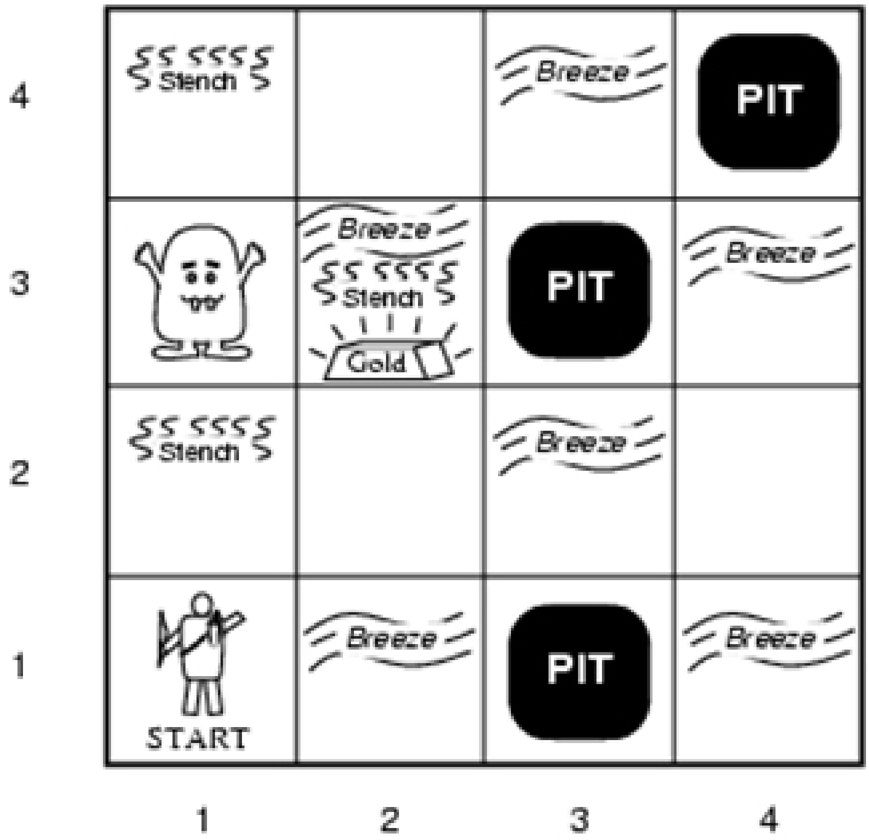

Figure 1: Tabla za igru Vumpus

Modeliranje problema u iskaznoj logici

Modeliranja jednog problema biće prikazano na primeru jednostavne igre - Vumpus.
U pećini u kojoj živi čudovište Vumpus nalazi se zlato. Igrač ulazi u pećinu i traži ga. Igra se igra na tabli od 4x4 polja. Vumpus se nalazi na jednom od njih. Na nekima od njih se mogu nalaziti provalije, a na jednom je zlato. Pošto je u pećini mrak igrač ne vidi šta se nalazi na susednim poljima. Na poljima oko provalija se oseća povetarac. Kako se Vumpus ne kupa, na poljima oko njega, oseća se smrad. Ako igrač stane na polje na kome se nalazi provalija ili Vumpus, on strada i igra je završena. Igrač ima jednu strelu koju može odapeti na susedno polje kako bi ubio Vumpusa. Primer table je prikazan na slici .

Znanje o okolini u kojoj se igrač nalazi, može se modelirati pravilima oblika

Pravila za slučaj kada nema smrada:

$$R_1 : \neg S_{11} \Rightarrow \neg V_{11} \wedge \neg V_{12} \wedge \neg V_{21}$$

$$R_2: \neg S_{21} \Rightarrow \neg V_{11} \wedge \neg V_{21} \wedge \neg V_{31} \wedge \neg V_{22}$$

$$R_3: \neg S_{12} \Rightarrow \neg V_{11} \wedge \neg V_{12} \wedge \neg V_{13} \wedge \neg V_{22}$$

...

Pravila za slučaj kada ima smrada:

$$R_4: S_{12} \Rightarrow V_{11} \vee V_{12} \vee V_{13} \vee V_{22}$$

...

Na početnom polju igrač ne oseća ni smrad ni povetarac, pa zna da su polja (2,1) i (1,2) bezbedna. Recimo da prvo ode na polje (2,1). Tu oseća povetarac i zna da se na polju (3,1) ili (2,2) nalazi provalija, pa se vraća na polje (1,1). Pošto je na polju (2,1) upravo bio, istražuje polje (1,2). Tu se oseća smrad. Dosadašnja igračeva znanja se mogu se opisati na sledeći način:

$$\neg S_{11}, \neg S_{21}, S_{12}$$

$$\neg P_{11}, P_{21}, \neg P_{12}$$

Nalaženje Vumpusa je sada lako.

1. Na osnovu R_4 i S_{12}, dobija se

$$V_{11} \vee V_{12} \vee V_{13} \vee V_{22}$$

2. Na osnovu R_1 i $\neg S_{11}$, dobija se

$$\neg V_{11} \wedge \neg V_{12} \wedge \neg V_{21}$$

3. Odatle

$$\neg V_{11} \quad \neg V_{12} \quad \neg V_{21}$$

4. Na osnovu $V_{11} \vee V_{12} \vee V_{13} \vee V_{22}$ i $\neg V_{11}$, dobija se

$$V_{12} \vee V_{13} \vee V_{22}$$

5. Na osnovu $V_{12} \vee V_{13} \vee V_{22}$ i $\neg V_{12}$, dobija se

$$V_{13} \vee V_{22}$$

6. Na osnovu R_2 i $\neg S_{21}$, dobija se

$$\neg V_{11} \wedge \neg V_{21} \wedge \neg V_{31} \wedge \neg V_{22}$$

7. Odatle

$$\neg V_{11} \quad \neg V_{21} \quad \neg V_{31} \quad \neg V_{22}$$

8. Na osnovu $V_{13} \vee V_{22}$ i $\neg V_{22}$, dobija se

$$V_{13}$$

Znači Vumpus se nalazi na polju (1,3).

Da bismo dali primer zapisivanja akcije koju igrač može da preduzme uvešćemo i orijentaciju igrača. Neka 4 promenljive O_i označavaju orijentaciju igrača ka 4 strane sveta. Npr. O_1 znači da je igrač orijentisan prema istoku, O_2 prema zapadu, O_3 prema severu i O_4 prema jugu. Kako bi opis orijentacije bio konzistentan, potrebno je zadovoljiti uslov da igrač ne bude orijentisan na više strana odjednom

$$\neg(O_1 \wedge O_2) \wedge \neg(O_1 \wedge O_3) \wedge \neg(O_1 \wedge O_4) \wedge \neg(O_2 \wedge O_3)\neg(O_2 \wedge O_4)\neg(O_3 \wedge O_4).$$

S druge strane potrebno je da igrač bude orijentisan na neku stranu što se izražava uslovom

$$O_1 \vee O_2 \vee O_3 \vee O_4.$$

Sada se akcija odapinjanja strele na susedno polje na kome se nalazi Vumpus može zapisati kao:

$$A_{11} \wedge O_1 \wedge V_{21} \Rightarrow Pucaj$$

Očigledan problem je što za 16 polja za jednu orijentaciju postoji 16 pravila ovog tipa. Pomoću predikatskog računa bi svih 16 moglo biti zapisana jednim pravilom:

$$\forall i \forall j (A_{ij} \wedge O_1 \wedge V_{i+1,j} \Rightarrow Pucaj).$$