Iskazni račun

Cvetana Krstev

April 29, 2013

2.8 Iskazni račun

Iskazni račun se bavi izučavanjem određenih vrsta logičkih veza među iskazima. *Iskazi* su u ovom kontekstu rečenice koje su ili tačne ili netačne što isključuje pitanja, naredbe, deklaracije tipa „osuđujem Vas na šest meseci zatvora“.

Iskazni račun je od značaja jer obezbeđuje preciznu notaciju i tehniku za izražavanje one vrste rezonovanja koja se, često implicitno, koriste u mnogim dokazima u matematici i drugim naučnim poljima.

2.8.1 Iskazni veznici i istinitosne tablice

Od bilo koja dva iskaza može se oformiti novi iskaz korišćenjem veznika kakvi su „i“, „ili“, „ako. . .onda“ i „ako i samo ako“. Od jednog iskaza može se sačiniti novi ako mu na početku dodamo „nije tačno da“ (ili umetanjem negacije).

U prirodnom jeziku se veznici mogu koristiti u više značenja. Takav je, na primer, veznik „ili“ koji povezuje rečenice u rastavni ili disjunktivni odnos kojim se iznose alternativne situacije. Primer je,

Zoran će ili doći ili će telefonirati.

U ovom primeru od alternativnih situacija realizuje se samo jedna. Moguća je i drukčija upotreba veznika „ili“: alternativne situacije se mogu naizmenično realizovati, kao što pokazuje sledeći primer:

Marko nedeljom ide na utakmicu ili gleda televizijski prenos.

Zavisne rečenice tipa „ako. . .onda“ u prirodnom jeziku takođe mogu imati različita značenja. Na primer,

Ako Petar diplomira do maja, moći će da se prijavi na junski konkurs za posao.
Ako je udžbenik rasprodat, možete ga pozajmiti iz biblioteke.

Ove dve rečenice su slične po tome što ako je uslov (to jest pretpostavka u „ako frazi“) tačan i posledica mora biti tačna da bi cela rečenica bila tačna. One se razlikuju po tome kakva treba da bude posledica ako je uslov netačan da bi cela rečenica bila tačna. U slučaju prve rečenice ako uslov nije tačan da bi cela rečenica bila tačna i posledica mora biti netačna. (Naime, tačna je rečenica „Ako Petar *ne* diplomira do maja, *neće* moći da se prijavi na junski konkurs za posao“.) U slučaju druge rečenice, posledica je sigurno tačna bez obzira da li uslov tačan ili ne. (Dakle, nije tačna rečenica „Ako udžbenik *nije rasprodat*, *ne* možete ga pozajmiti iz biblioteke.“)

Da bi se izbegle dvosmislenosti i različita tumačenja, logičkim analogijama ovih prirodno-jezičkih veznika daju se precizna značenja u vidu *istinitosnih tablica* koje tačno propisuju kako se istinitost nekog kompleksnog iskaza može odrediti na osnovu tačnosti njegovih sastavnih delova.

Za svaku od pet glavnih operacija na iskazima daćemo preciznu definiciju u obliku istinitosne tablice i približni prirodno-jezički ekvivalent.

a) **Negacija:** $\neg$. $\neg P$: nije tačno da P.

P	$\neg P$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

Odnosno, ako je P tačno $\neg P$ je netačno a ako je P netačno $\neg P$ je tačno.

b) **Konjunkcija** $\wedge$. $P \wedge Q$: P i Q.

P	Q	$P \wedge Q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Odnosno, $P \wedge Q$ je tačno samo ako je i P i Q tačno; u svim ostalim slučajevima je netačno.

c) **Disjunkcija** $\vee$. $P \vee Q$: P ili Q.

P	Q	$P \vee Q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Odnosno, $P \vee Q$ je tačno ako je P tačno ili je Q tačno ili oboje; $P \vee Q$ je netačno samo ako su i P i Q netačni. Ovo je takozvano *inkluzivno* ili.

d) **Implikacija** $\Rightarrow$. $P \Rightarrow Q$: ako P onda Q.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Odnosno, $P \Rightarrow Q$ je tačno u svim slučajevima osim ako je P tačno a Q netačno.

e) **Ekvivalencija** $\Leftrightarrow$. $P \Leftrightarrow Q$: P ako i samo ako Q.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Odnosno, $P \Leftrightarrow Q$ je tačno ako su P i Q oboje tačni ili ako su oboje netačni; u svim ostalim slučajevima je $P \Leftrightarrow Q$ netačno.

Implikacija $\Rightarrow$ definisana gornjom tablicom se na dva načina razlikuje od uobičajenog „ako...onda“ iskaza u prirodnom jeziku. Pre svega, ni rečenica „Ako Petar diplomira do maja, moći će da se prijavi na junski konkurs za posao.“ ni rečenica „Ako je udžbenik rasprodat, možete ga pozajmiti iz biblioteke.“ ne odgovaraju ovoj istinitosnoj tablici. U slučaju prve od ovih rečenica u desnoj koloni trećeg reda bi trebalo da stoji $\perp$ a ne $\top$, jer nije tačna rečenica „Ako Petar ne diplomira do maja, moći će da se prijavi na junski konkurs za posao“. U slučaju druge rečenice u desnoj koloni četvrtog reda trebalo bi da stoji $\perp$ a ne $\top$, jer nije tačna rečenica „Ako udžbenik nije rasprodat, ne možete ga pozajmiti iz biblioteke“. Logičkoj definiciji implikacije više odgovara sledeća rečenica:

Ako Miloš dođe na proslavu, biće sa devojkom.

Ovde nije učinjena nikakva pretpostavka da li će Miloš biti sa devojkom ako ne dođe na proslavu, pa se mogu smatrati tačnim i sledeće rečenice:

Ako Miloš ne dođe na proslavu, biće sa devojkom.
Ako Miloš ne dođe na proslavu, neće biti sa devojkom.

Druga razlika logičke implikacije od prirodno-jezičkog iskaza „ako... onda je još ozbiljnija: tačnost $P \Rightarrow Q$ zavisi samo od tačnosti dve sastavne rečenice, P i Q a ne od bilo kakve veze sadržaja te dve rečenice. Odnosno, istinitosne tablice ne postavljaju nikakav zahtev da je uslov relevantan za posledicu. Tako su sledeći iskazi tačni na osnovu prvog, trećeg i četvrtog reda u istinitosnoj tablici implikacije:

Ako je Džordž Vašington prvi predsednik SAD-a, onda je 1996. godina bila prestupna.
Ako je 4 veće od 6, onda je 6 veće od 4.
Ako je Leskovac veći od Niša, onda je Niš najveći grad u Srbiji.

Ni u slučaju ekvivalencije iskazi P i Q ne moraju imati bilo kakve veze jedan s drugim da bi ekvivalencija bila tačna. Tako su prema prvom i četvrtom redu istinitosne tablice ekvivalencije tačne i sledeće rečenice:

Mars je planeta ako i samo ako je 13 prost broj.
Sve reči srpskog jezika imaju tri sloga ako i samo ako smeđe krave daju čokoladno mleko.

Ovde je na mestu pomenuti sledeću šalu iz vremena predsedničkih izbora u Americi u vreme Vijetnamskog rata:

They say, “If you vote for Goldwater in ’64, the war will be escalated”. so I voted for Goldwater, and sure enough, the war was escalated.[1]

[1] Primer je preuzet iz knjige *Fundamentals of Mathematics for Linguistics* od Barbare

Primer

a) Rečenica „Ili Maja ili Petar su se vratili kući" se prevodi u simbolički zapis $M \vee P$ ako sa M označimo iskaz „Maja se vratila kući" a sa P iskaz „Petar se vratio kući" (jer je pretpostavka da se jedan od njih vratio kući, a možda i oboje).

b) Rečenica „Požar je podmetnuo piroman ili je došlo do eksplozije u kotlarnici" se prevodi u simbolički zapis $(P \vee E) \wedge \neg(P \wedge E)$ što je ekvivalentno sa $P \Leftrightarrow \neg E$ ako označimo sa $P =$„Požar je podmetnuo piroman" a sa $E =$„Došlo je do eksplozije u kotlarnici". Ovo je slučaj takozvanog *ekskluzivnog ili* — iskaz $P \Leftrightarrow \neg Q$ je tačan ako je samo jedan od iskaza, ili P ili Q tačan.

c) „Ako" iz rečenica „Ako tata kasno dođe kući, a ništa nije večerao, onda ćemo podgrejati gulaš" se može interpretirati kao „ako i samo ako" i tada tu rečenicu možemo simbolički zapisati kao $(K \wedge \neg V) \Leftrightarrow G$ pri čemu je iskaz $K =$„Tata kasno dolazi kući", iskaz $V =$„Tata je nešto večerao" a iskaz $G =$„Podgrejaćemo gulaš". Ovakva interpretacija znači da će se gulaš podgrevati samo u slučaju da tata kasno dođe kući a da prethodno ništa nije večerao. „Ako" se u gornjoj rečenici može interpretirati i kao implikacija i tada je simbolički možemo zapisati $(K \wedge \neg V) \Rightarrow G$. Ovakva interpretacija ove rečenice znači da ćemo gulaš možda podgrevati i ako tati ne bude potreban.

Počevši od proizvoljnog skupa osnovnih iskaza koji mogu biti simbolički označeni jednim slovom, primenom iskaznih veznika mogu se graditi iskazi proizvoljne dužine i složenosti. U složenim iskazima zagrade su neophodne ako postoji opasnost od dvosmislenosti. Na primer, $P \vee Q \Rightarrow R$ je dvosmisleno jer $(P \vee Q) \Rightarrow R$ i $P \vee (Q \Rightarrow R)$ imaju različite istinitosne vrednosti, što je ilustrovano sledećom istinitosnom tablicom u kojoj dve pretposlednje kolone odgovaraju dvema različitim interpretacijama ovih iskaza.

Hall Partee. Poenta je, naravno, u tome što konzervativac Goldwater nije pobedio na izborima (pobedio ga je Lindon Džonson sa 61% glasova).

P	Q	R	$P \vee Q$	$Q \Rightarrow R$	$(P \vee Q) \Rightarrow R$	$P \vee (Q \Rightarrow R)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$

Ova istinitosna tablica ilustruje opšti postupak za konstruisanje istinitosnih tablica složenih iskaza. Broj redova u istinitosnoj tablici je određen zahtevom da sve moguće kombinacije vrednosti tačno/netačno osnovnih iskaza budu predstavljene. Zato za iskaz složen od n osnovnih iskaza treba da bude 2^n redova u istinitosnoj tablici. Redosled računanja je od najdublje ugnježdenog izraza ka spoljašnjim. Na primer, da bi se konstruisala istinitosna tablica za $(P \wedge Q) \Rightarrow \neg(P \vee R)$ treba u sledećem redosledu obaviti postupke:

1. Konstruisati kolone za osnovne iskaze P, Q i R;
2. Konstruisati kolonu za $P \wedge Q$ na osnovu istinitosne tablice konjunkcije i kolonu $P \vee R$ na osnovu istinitosne tablice disjunkcije;
3. Konstruisati kolonu za $\neg(P \vee R)$ na osnovu istinitosne tablice negacije;
4. Konstruisati kolonu za $P \wedge Q \Rightarrow \neg(P \vee R)$ na osnovu istinitosne tablice implikacije.

P	Q	R	$P \wedge Q$	$P \vee R$	$\neg(P \vee R)$	$P \wedge Q \Rightarrow \neg(P \vee R)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$

Kako $(P \wedge Q) \wedge R$ ima istu istinitosnu tablicu kao $P \wedge (Q \wedge R)$ dozvoljeno je izostaviti zagrade. Ako se negacija $\neg$ primenjuje direktno na osnovni iskaz, zagrade se obično izostavljaju. Tako se $\neg P \Rightarrow Q$ interpretira kao $(\neg P) \Rightarrow Q$ a ne kao $\neg(P \Rightarrow Q)$.

Iskazi se klasifikuju u tri grupe prema poslednjoj koloni njihove istinitosne tablice:

1. Ako poslednja kolona sadrži samo $\top$ onda je to *tautologija.* Iskaz je tačan bez obzira na tačnost sastavnih iskaza. Primeri su:

$$\neg(P \land \neg P)$$
$$(P \land Q) \Rightarrow Q$$

2. Ako poslednja kolona sadrži samo $\perp$ onda je to *kontradikcija.* Iskaz je lažan bez obzira na tačnost sastavnih iskaza. Primeri su

$$P \land \neg P$$
$$\neg((P \lor Q) \Leftrightarrow (Q \lor P))$$

3. Iskazi čija tačnost zavisi od tačnosti komponenata

$$P$$
$$P \lor P$$
$$(P \lor Q) \Rightarrow Q$$

Primer

Veznik $\land$ se može definisati kao složeni iskaz koristeći samo veznike $\lor$ i $\neg$ na sledeći način: $P \land Q = \neg(\neg P \lor \neg Q)$. Da bi se uverili da ova dva iskaza imaju istu logičku vrednost možemo da konstruišemo istinitosnu tablicu složenog iskaza:

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \lor \neg Q$	$\neg(\neg P \lor \neg Q)$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$

Primer

Poznato je da je $p \Rightarrow q$ tačno, a $p \Leftrightarrow q$ netačno. Šta se može reći o iskazu $q \Rightarrow p$?

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$q \Rightarrow p$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$

Od značaja je treći red u istinitosnoj tablici jer samo u tom slučaju je $p \Rightarrow q$ tačno, a $p \Leftrightarrow q$ netačno, pa je prema tome $q \Rightarrow p$ netačno.

Primer

Dokazati da je formula $((p \wedge \neg r) \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$ tautologija i na osnovu toga sledeće tvrđenje: „Ako je broj deljiv sa 2 i nije deljiv sa 6, onda nije deljiv sa 3".

p	q	r	$\neg r$	$p \wedge \neg r$	$\neg q$	$(p \wedge \neg r) \Rightarrow \neg q$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$

Istinitosne vrednosti u kolonama $(p\wedge\neg r) \Rightarrow \neg q$ i $(p\wedge q) \Rightarrow r$ istinitosne tablice pokazuju da je $((p \wedge \neg r) \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$ tautologija.

Neka je iskaz p „broj je deljiv sa 2", iskaz q „broj je deljiv sa 3", a iskaz r „broj je deljiv sa 6". Onda iskaz $(p \wedge q) \Rightarrow r$ odgovara tačnom tvrđenju „Ako je broj deljiv sa 2 i sa 3 onda je deljiv sa 6". A kako je taj iskaz ekvivalentan (ima istu istinitosnu vrednost) kao $(p \wedge \neg r) \Rightarrow \neg q$ to sledi da je tačno i tvrđenje „Ako je broj deljiv sa 2 i nije deljiv sa 6, onda nije deljiv sa 3".

Zadatak

Umesto tačkica ... umetnuti reči NEOPHODNO (POTREBNO) ili DOVOLJNO, odnosno veznike $\Rightarrow$ ili $\Leftarrow$ tako da se dobije tačna rečenica:

a) Da je ceo broj deljiv sa 10, ... je da je deljiv sa 5, a ... je da je deljiv sa 100.

b) Da se nalazimo u Srbiji, ... je da se nalazimo u Beogradu.

c) Da je prirodan broj veći od 100, ... je da je jednak 1000.

d) Da je četvorougao kvadrat, ... je da je romb.

Rešenje

a) Da je ceo broj deljiv sa 10, NEOPHODNO ($\Rightarrow$) je da je deljiv sa 5, a DOVOLJNO ($\Leftarrow$) je da je deljiv sa 100.

b) Da se nalazimo u Srbiji, DOVOLJNO ($\Leftarrow$) je da se nalazimo u Beogradu.

c) Da je prirodan broj veći od 100, DOVOLJNO ($\Leftarrow$) je da je jednak 1000.

d) Da je četvorougao kvadrat, NEOPHODNO ($\Rightarrow$) je da je romb.

Zadaci za vežbu

1. Sledeće rečenice treba prevesti u simbolički zapis. Treba koristiti velika slova za osnovne iskaze. Moguće su različite interpretacije prirodnojezičkih rečenica. Objasniti.

   a) Kada pada kiša, onda lije.
   b) Miša želi psa, ali njegova sestra više voli mačke.
   c) Ako ni Saša ni Mica ne idu na proslavu, onda neću ni ja.
   d) Ići ću na more ili ostajem kod kuće.
   e) U Turskoj je svaki zemljotres katastrofalan.
   f) Ako ne dođeš na vreme, moraćeš da ideš peške ili da platiš taksi.

2. Objasni vezu sledećih iskaza na srpskom jeziku i implikacije u iskaznom računu:

   a) Ako prikupim sva potrebna dokumenta moći ću da izvadim novu ličnu kartu.
   b) Ako ne završim fakultet biće mi teško da se zaposlim.
   c) Ako ne možete da nađete knjigu u biblioteci možete je naručiti preko Amazona.

3. Neka su P, Q i R osnovni iskazi. Odrediti da li su sledeći iskazi tautologije ili kontradikcije ili ni jedno ni drugo.

   a) $P \vee \neg P$;
   b) $P \vee Q$;
   c) $\neg P \wedge \neg(P \Rightarrow Q)$;
   d) $(P \vee R) \Rightarrow \neg P$;
   e) $(P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee R)$.

4. Ako je istinitosna vrednost od $P \Leftrightarrow Q$ „tačno“, možeti li odrediti istinitosnu vrednost od:

a) $P \vee \neg Q$;

b) $P \Rightarrow Q$;

c) $P \wedge Q$.

5. Ako je istinitosna vrednost od $P \vee Q$ „tačno“, možeti li odrediti istinitosnu vrednost od:

a) $P \Leftrightarrow \neg Q$;

b) $\neg Q \Rightarrow P$;

c) $\neg P \wedge \neg Q$.

6. Da li su dati iskazi tačni za svaku vrednost promenljive x iz skupa prirodnih brojeva:

a) $x \in \{1, 2\} \Leftrightarrow (x = 1) \vee (x = 2)$;

b) $x \in \{1, 2, 3\} \Leftrightarrow (x \in \{1, 2\}) \vee (x \in \{2, 3\})$;

c) $x = 2 \Leftrightarrow (x \in \{1, 2\}) \vee (x \in \{2, 3\})$.

7. Definisati sledeće veznike iskaznog računa kao složene iskaze:

a) Veznik $\Rightarrow$ koristeći samo veznike $\wedge$ i $\neg$.

b) Veznik $\Leftrightarrow$ koristeći samo veznike $\Rightarrow$ i $\wedge$.

8. Konstruisati istinitosne tablice sledećih rečeničnih veznika (na osnovu njihovog korišćenja u srpskom jeziku:

a) $P \mid Q$: „ne i P i Q“;

b) $P \downarrow Q$: „ni P ni Q“.

c) Definisati veznik $\vee$ kao složeni veznik koristeći samo veznike $\mid$ i $\neg$.

2.8.2 Iskazno izvođenje

Osnovno pravilo izvođenja

Kada neko zaključi da iz određenog skupa iskaza određeni iskaz „logički sledi“, to je onda *deduktivno izvođenje.* Polazni iskazi se zovu *premise* ili *hipoteze* a iskaz koji iz njih sledi je *zaključak* ili *posledica.*

Ako izvođenje zavisi samo od onih svojstava premisa i zaključka koja se mogu izraziti kada se iskazi simbolizuju slovima i iskaznim veznicima onda je to iskazno izvođenje.

Izvođenje je *valjano* ako zaključak zaista logički sledi iz premisa; tačnost bilo premisa bilo zaključka je irelevantna. Otuda je sledeće izvođenje valjano, iako su obe premise i zaključak pogrešni (netačni).

Premise: Ako psi mogu da lete onda su krugovi kvadrati.
Psi mogu da lete.
Zaključak: Krugovi su kvadrati.

Da bi se utvrdilo da li je neko iskazno izvođenje valjano ili ne dovoljno je jedno pravilo izvođenja.

Osnovno pravilo izvođenja

Iskaz Q je valjani zaključak na osnovu premisa $P_1, P_2, \ldots P_n$ ako i samo ako je iskaz $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots P_n) \Rightarrow Q$ tautologija.

Odatle sledi da se valjanost svakog izvođenja može proveriti konstrukcijom istinitosne tablice. Na primer, prethodno izvođenje se može simbolički izraziti sa:

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow K \\ P \\ \hline \therefore K \end{array}$$

gde se simbol $\therefore$ čita kao „prema tome“. Valjanost izvođenja može se proveriti istinitosnom tablicom:

P	K	$P \Rightarrow K$	$(P \Rightarrow K) \wedge P$	$((P \Rightarrow K) \wedge P) \Rightarrow K$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$

Pošto su u poslednjoj koloni sve vrednosti $\top$, iskaz $((P \Rightarrow K) \wedge P) \Rightarrow K$ je tautologija i izvođenje je valjano.

Kao sledeći primer pogledajmo sledeće izvođenje:

Ako Smit ima američku zastavu na kolima on je patriot.
Smit nema američku zastavu na kolima.

$\therefore$ Smit nije patriota.

Valjanost izvođenja može se proveriti na sledeći način:

$$\begin{array}{l} S \Rightarrow P \\ \neg S \\ \hline \therefore \neg P \end{array}$$

S	P	$S \Rightarrow P$	$\neg S$	$(S \Rightarrow P) \wedge \neg S$	$\neg P$	$((S \Rightarrow P) \wedge \neg S) \Rightarrow \neg P$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Pošto u poslednjoj koloni nisu sve vrednosti $\top$, izvođenje nije valjano. U ovom primeru, moguće je da obe premise budu tačne a zaključak netačan i iz tog razloga $((S \Rightarrow P) \wedge \neg S) \Rightarrow \neg P$ nije tautologija. Karakteristika valjanog izvođenja je da nije moguće da istovremeno premise budu tačne a zaključak netačan.

Konstrukcija izvođenja

Premda je osnovno pravilo izvođenja adekvatno za testiranje valjanosti ma kog izvođenja, direktna primena istinitosnih tablica je često zamorna, naročito onda kada se izvođenje zasniva na više od dve, tri premise. Na primer,

Ako bude lep dan, g-đa Tarana će ići u kupovinu.
Ako g-đa Tarana bude išla u kupovinu deca će ići kod bake ili će ih čuvati g. Tarana.
Lep je dan.
Deca neće ići kod bake.

∴ G. Tarana će čuvati decu.

Ako osnovne iskaze označimo na sledeći način:

L	Lep je dan
K	G-đa Tarana će ići u kupovinu.
B	Deca će ići kod bake.
G	Decu će čuvati g. Tarana.

Ovo se simbolički može predstaviti na sledeći način:

$$\begin{array}{l} L \Rightarrow K \\ K \Rightarrow (B \vee G) \\ L \\ \neg B \\ \hline \therefore G \end{array}$$

Da bi se proverila valjanost ovog izvođenja trebalo bi konstruisati istinitosnu tablicu od 16 redova i utvrditi da li je

$$((L \Rightarrow K) \wedge (K \Rightarrow (B \vee G)) \wedge L \wedge \neg B) \Rightarrow G$$

tautologija. Uvodi se stoga drugi metod za utvrđivanje valjanosti izvođenja koji se takođe zasniva na osnovnom pravilu izvođenja, a koji ne zahteva izgradnju istinitosne tablice.

U prethodnom primeru može se videti da se iz dve premise $L \Rightarrow K$ i L valjano može zaključiti K prema osnovnom pravilu izvođenja (videti primer o psu i krugovima). Na osnovu K (koje je upravo dokazano) i $K \Rightarrow (B \vee G)$, valjano se može zaključiti $B \vee G$, a na osnovu sličnog zaključivanja. Zatim, iz $B \vee G$ i $\neg B$, na osnovu osnovnog pravila izvođenja, zaključuje se G. U ovom poslednjem slučaju treba utvrditi da je $((B \vee G) \wedge \neg B) \Rightarrow G$ tautologija jer to do sada nije utvrđeno. Ovo zaključivanje može se predstaviti sledećom listom:

	Premise:	
1.	$L \Rightarrow K$	
2.	$K \Rightarrow (B \vee G)$	
3.	L	
4.	$\neg B$	
5.	K	Iz 1. i 3. jer je $((L \Rightarrow K) \wedge L) \Rightarrow K$ tautologija
6.	$B \vee G$	Iz 2. i 5. jer je $(K \Rightarrow (B \vee G) \wedge K) \Rightarrow (B \vee G)$ tautologija
	Zaključak:	
7.	G	Iz 4. i 6. jer je $\neg B \wedge (B \vee G)) \Rightarrow G$ tautologija

Ovaj metod za konstruisanje valjanog iskaznog izvođenja sastoji se u osnovi od izvođenja zaključka iz premisa u određenom broju koraka. Izvođenje se sastoji od liste iskaza od koji su prve u listi zadate premise a svaki iskaz dodat listi sledi iz prethodnih premisa na osnovu osnovnog pravila izvođenja. Poslednji iskaz u listi je zaključak.

Ovaj metod je pogodan zato što se svaki korak u izvođenju može opravdati tautologijom koja se može proveriti istinitosnom tablicom koja, obično, ima 4 ili 8 redova. Osim toga, jednom dokazane tautologije mogu se ponovo koristiti bez dokazivanja. Na primer, u prethodnom izvođenju u redovima 5. i 6. korišćena je ista tautologija.

Neke poznate tautologije dobile su imena i ovde ih navodimo bez dokaza.

Ekvivalencije	
Dvostruka negacija	$X \Leftrightarrow \neg\neg X$
Zakon komutativnosti	$(X \wedge Y) \Leftrightarrow (Y \wedge X)$
	$(X \vee Y) \Leftrightarrow (Y \vee X)$
Zakon asocijativnosti	$((X \vee Y) \vee Z) \Leftrightarrow (X \vee (Y \vee Z))$
	$((X \wedge Y) \wedge Z) \Leftrightarrow (X \wedge (Y \wedge Z))$
De Morganovi zakoni	$\neg(X \wedge Y) \Leftrightarrow (\neg X \vee \neg Y)$
	$\neg(X \vee Y) \Leftrightarrow (\neg X \wedge \neg Y)$

Distributivni zakoni	$(X \wedge (Y \vee Z)) \Leftrightarrow ((X \wedge Y) \vee (X \wedge Z))$
	$(X \vee (Y \wedge Z)) \Leftrightarrow ((X \vee Y) \wedge (X \vee Z))$
Kontrapozicija	$(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg Y \Rightarrow \neg X)$
Ekvivalent implikacije	$(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg X \vee Y)$
Negacija implikacije	$\neg(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (X \wedge \neg Y)$
Ekvivalent ekvivalencije	$(X \Leftrightarrow Y) \Leftrightarrow ((X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X))$
Implikacije	
Modus ponens	$(X \wedge (X \Rightarrow Y)) \Rightarrow Y$
Modus tollens	$(\neg Y \wedge (X \Rightarrow Y)) \Rightarrow \neg X$
Modus tollendo ponens	$((X \vee Y) \wedge \neg X) \Rightarrow Y$
Pojednostavljenje	$(X \wedge Y) \Rightarrow X$
Dodavanje	$X \Rightarrow (X \vee Y)$
Spajanje	$X \wedge Y \Rightarrow (X \wedge Y)$

Kad god je $X \Leftrightarrow Y$ tautologija i $X \Rightarrow Y$ i $Y \Rightarrow X$ su tautologije, što sledi iz ekvivalenta ekvivalencije. To znači da se obe strane tautoloških ekvivalencija mogu koristiti prilikom konstrukcije izvođenja. Na primer, na osnovu De Morganovog zakona mogu se koristiti i tautologija $\neg(X \wedge Y) \Rightarrow (\neg X \vee \neg Y)$ i tautologija $(\neg X \vee \neg Y) \Rightarrow \neg(X \wedge Y)$.

Tautologija spajanja se koristi kada u listi imamo X i Y kao zasebne iskaze a hoćemo da dodamo $X \wedge Y$ listi. Tautologija pojednostavljenja se koristi kada u listi imamo $X \wedge Y$ a za konstrukciju izvođenja nam je potrebno X koje dodajemo listi. Ako, pak, želimo da listi dodamo Y moramo prvo da primenimo zakon komutativnosti da bismo dobili $Y \wedge X$.

Primer

Dokazati da je formula $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ tautologija (De Morganov zakon) i na osnovu toga i tvrđenja: $(x \cdot y = 0) \Leftrightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$ dokazati tvrđenje $(x \cdot y \neq 0) \Leftrightarrow (x \neq 0) \wedge (y \neq 0)$.

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

$$\begin{aligned} (x \cdot y = 0) \Leftrightarrow &\quad (x = 0) \vee (y = 0) \\ (x \cdot y \neq 0) \Leftrightarrow &\quad \neg((x = 0) \vee (y = 0)) \Leftrightarrow \quad \neg(x = 0) \wedge (\neg(y = 0) \\ \Leftrightarrow &\quad (x \neq 0) \wedge (y \neq 0) \end{aligned}$$

Primer

Premise:	1.	$(A \wedge B) \Rightarrow C$	Treba zaključiti $\neg B$
	2.	A	
	3.	$\neg C$	
	4.	$\neg(A \wedge B)$	Iz 1. i 3. Modus tollens
	5.	$\neg A \vee \neg B$	Iz 4. De Morganov zakon
	6.	$\neg\neg A$	Iz 2. dvostruka negacija
Zaključak:	7.	$\neg B$	Iz 5. i 6. Modus tollendo ponens

Primer

Premise:	1.	$(A \vee B) \Rightarrow C$	Treba zaključiti $C \wedge E$
	2.	$D \Rightarrow (E \wedge F)$	
	3.	A	
	4.	D	
	5.	$E \wedge F$	Iz 2. i 4. Modus ponens
	6.	$A \vee B$	Iz 3. dodavanje
	7.	C	Iz 1. i 6. Modus ponens
	8.	E	Iz 5. pojednostavljenje
Zaključak:	9.	$C \wedge E$	Iz 7. i 8. spajanje

Primer

Premise:	1.	$\neg(A \Rightarrow B)$	Treba zaključiti C
	2.	$\neg C \Rightarrow B$	
	3.	$A \wedge \neg B$	Iz 1. negacija implikacije
	4.	$\neg B \wedge A$	Iz 3. komutativni zakon
	5.	$\neg B$	Iz 4. pojednostavljenje
	6.	$\neg\neg C$	Iz 2. i 5. Modus tollens
Zaključak:	7.	C	Iz 6. dvostruka negacija

Primer

Premise:	1.	$P \Rightarrow Q$	Treba zaključiti $Q \wedge R$
	2.	$P \wedge R$	
	3.	P	Iz 2. Pojednostavljenje
	4.	$\neg P \vee Q$	Iz 1. Ekvivalent implikacije
	5.	$\neg\neg P$	Iz 3. Dvostruka negacija
	6.	Q	Iz 4. i 5. Modus tollendo ponens
	7.	$R \wedge P$	Iz 2. Komutativni zakon
	8.	R	Iz 7. Pojednostavljenje
Zaključak:	9.	$Q \wedge R$	Iz 6. i 8. Spajanje

Konstruisanje izvođenja je pogodnije i interesantnije od provere valjanosti korišćenjem istinitosnih tablica, ali se ne može izvesti mehanički. Ne postoji način da se utvrdi koji bi trebalo da bude sledeći red u izvođenju jer ih je obično više mogućih a mehanički nije moguće utvrditi koji je najbolji red. Tu pomaže samo vežba.

Pravilo supstitucije ekvivalenata

Postoje još dva dodatna pravila zaključivanja koja se mogu koristiti u konstruisanju izvođenja koja omogućavaju da izvođenja budu jednostavnija. Jedno od njih je *pravilo supstitucije ekvivalenata*. To pravilo će biti ilustrovano na jednom primeru. Neka su date sledeće dve premise:

1.	$(B \wedge \neg\neg C) \Rightarrow D$
2.	$B \wedge C$

Ako bismo želeli da izvedemo D koristeći do sada izložene metode morali bismo prvo da izvedemo $B \wedge \neg\neg C$ u pet koraka:

3.	$C \wedge B$	Iz 2. Komutativni zakon
4.	C	Iz 3. Pojednostavljenje
5.	$\neg\neg C$	Iz 4. Dvostruka negacija
6.	B	Iz 2. Pojednostavljanje
7.	$B \wedge \neg\neg C$	Iz 6. i 5. Spajanje

Sada se na iskaze 7. i 1. može primeniti tautologija Modus ponens odakle sledi D. Pravilo supstitucije ekvivalenata nam dozvoljava da u 2. direktno zamenimo C sa $\neg\neg C$ na osnovu toga što je $C \Leftrightarrow \neg\neg C$, što znači da se sa koraka 2. može direktno preći na korak 7.

Pravilo supstitucije ekvivalenata se može ovako formalno izraziti. Ako je:

a) R iskaz koji se pojavljuje u izvođenju;

b) P iskaz koji je deo od R;

c) S je iskaz koji identičan sa R osim što S sadrži Q na mestu na kome R sadrži P;

d) $P \Leftrightarrow Q$.

onda se iskaz S može dodati izvođenju. U gornjem primeru je

$$\begin{array}{rcl} R & = & B \wedge C \\ P & = & C \\ S & = & B \wedge \neg\neg C \\ Q & = & \neg\neg C \\ C & \Leftrightarrow & \neg\neg C \end{array}$$

Tautološke ekvivalencije koje su ranije date su dvostruko korisne: svaka od njih obezbeđuje par implikacija koje se mogu koristiti prilikom izvođenja a osim toga mogu se koristiti sa pravilom supstitucije ekvivalenata. Treba zapamtiti da pravilo supstitucije ekvivalenata zahteva ekvivalenciju, implikacija nije dovoljna.

U listi izvođenja, kada se koristi pravilo supstitucije ekvivalenata, navodi se pravilo i odgovarajuća tautološka ekvivalencija.

Primer

Premise:

1.	$\neg(B \Rightarrow \neg A)$	Treba zaključiti $A \wedge \neg(B \Rightarrow C)$
2.	$\neg C$	
3.	$B \wedge \neg\neg A$	Iz 1. Negacija implikacije
4.	$B \wedge A$	Iz 3. suspstitucija ekvivalenata dvostruka negacija
5.	$A \wedge B$	Iz 4. Komutativni zakon
6.	$(A \wedge B) \wedge \neg C$	Iz 5. i 2. Spajanje
7.	$A \wedge (B \wedge \neg C)$	Iz 6. Asocijativni zakon
	Zaključak:	
8.	$A \wedge \neg(B \Rightarrow C)$	Iz 7. Supstitucija ekvivalenata Negacija implikacije

Primer

Premise:

1.	$(\neg A \wedge B) \Rightarrow (C \wedge D)$	Treba zaključiti $B \Rightarrow A$
2.	$\neg C$	
3.	$\neg C \vee \neg D$	Iz 2. Dodavanje
4.	$\neg(C \wedge D)$	Iz 3. De Morganov zakon
5.	$\neg(\neg A \wedge B)$	Iz 4. i 1. Modus tollens
6.	$\neg\neg A \vee \neg B$	Iz 5. De Morganov zakon
7.	$\neg B \vee \neg\neg A$	Iz 6. Komutativni zakon
8.	$\neg B \vee A$	Iz 7. Supstitucija ekvivalenata Dvostruka negacija
	Zaključak:	
9.	$B \Rightarrow A$	Iz 8. Ekvivalent implikacije

Pravilo uslovnog dokaza

Drugo pravilo izvođenja u iskaznoj logici je pravilo koje je posebno korisno kada je željeni zaključak oblika $A \Rightarrow B$. Ono se zasniva na sledećem: Ako se B može izvesti iz datog skupa premisa uz jednu dodatnu premisu A, onda $A \Rightarrow B$ sledi iz datog skupa premisa. Valjanost ovog principa počiva na činjenici da ako je $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots P_n \wedge A) \Rightarrow B$ tautologija onda je i $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots P_n) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ takođe tautologija, što se može pokazati valjanim izvođenjem. Jednostavnosti radi pretpostavimo da je $n = 1$, to jest da imamo jednu premisu iz koje izvodimo zaključak B uz dodatnu uslovnu premisu A.

	Premise:	
1.	$(P \wedge A) \Rightarrow B$	Treba zaključiti $P \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
2.	$\neg(P \wedge A) \vee B$	Iz 1. Ekvivalent implikacije
3.	$(\neg P \vee \neg A) \vee B$	Iz 2. Supstitucija ekvivalenata De Morganov zakon
4.	$\neg P \vee (\neg A \vee B)$	Iz 3. Asocijativni zakon
5.	$\neg P \vee (A \Rightarrow B)$	Iz 4. Supstitucija ekvivalenata Ekvivalent implikacije
	Zaključak:	
6.	$P \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	Iz 5. Ekvivalent implikacije

Pravilo uslovnog dokaza

Jedna dodatna premisa R, koja se naziva *uslovna premisa* može se uvesti ma gde u izvođenju pod uslovom da se negde kasnije u izvođenju, kada je izveden iskaz S, iskaz $R \Rightarrow S$ doda izvođenju a od tog mesta nadalje premisa R se više ne koristi.

Vertikalna linija se crta od uslovne premise do odgovarajućeg zaključka da bi se ukazalo na domen u kome se pravilo primenjuje. Unutar tog domena uslovna premisa se slobodno koristi dok se izvan tog domena ne sme koristiti. Pravilo se može koristiti više puta u toku dokaza ali se mora voditi računa da domen jedne primene pravila mora biti ili potpuno sadržan ili potpuno izvan domena bilo koje druge primene istog pravila.

Primer

	Premise:	
1.	$\neg A \vee B$	Treba zaključiti $A \Rightarrow D$
2.	$B \Rightarrow C$	
3.	$\neg D \Rightarrow \neg C$	
4.	A	Uslovna premisa
5.	$A \Rightarrow B$	Iz 1. Ekvivalent implikacije
6.	B	Iz 4. i 5. Modus ponens
7.	C	Iz 2. i 6. Modus ponens
8.	$C \Rightarrow D$	Iz 3. Kontrapozicija
9.	D	Iz 7. i 8. Modus ponens
	Zaključak:	
10.	$A \Rightarrow D$	Iz 4. i 9. Uslovni dokaz

Primer

	Premise:	
1.	$P \Rightarrow Q$	Treba zaključiti $P \Rightarrow (Q \wedge R)$
2.	$P \Rightarrow R$	
3.	$\neg P \vee Q$	Iz 1. Ekvivalent implikacije
4.	$\neg P \vee R$	Iz 2. Ekvivalent implikacije
5.	P	Uslovna premisa
6.	$\neg\neg P$	Iz 5. Dvostruka negacija
7.	Q	Iz 3. i 6. Modus tollendo ponens
8.	R	Iz 4. i 6. Modus tollendo ponens
9.	$Q \wedge R$	Iz. 7. i 8. Spajanje
	Zaključak:	
10.	$P \Rightarrow (Q \wedge R)$	Iz 5. i 9. Uslovni dokaz

Primer

	Premise:	
1.	$A \Rightarrow (B \wedge \neg C)$	Treba zaključiti $A \Rightarrow (E \Leftrightarrow H)$
2.	$B \Rightarrow (\neg E \Rightarrow D)$	
3.	$\neg C \Rightarrow (E \Rightarrow G)$	
4.	$D \Rightarrow \neg H$	
5.	$G \Rightarrow H$	
6.	A	Uslovna premisa
7.	$B \wedge \neg C$	Iz 1. i 6. Modus ponens
8.	B	Iz 7. Pojednostavljenje
9.	$\neg E \Rightarrow D$	Iz 8. i 2. Modus ponens
10.	$\neg C \wedge B$	Iz 7. Komutativni zakon
11.	$\neg C$	Iz 10. Pojednostavljenje
12.	$E \Rightarrow G$	Iz 11. i 3. Modus ponens
13.	E	Uslovna premisa
14.	G	Iz 12. i 13. Modus ponens
15.	H	Iz 5. i 14. Modus ponens
16.	$E \Rightarrow H$	Iz 13. i 15. Uslovni dokaz
17.	$\neg E$	Uslovna premisa
18.	D	Iz 9. i 17. Modus ponens
19.	$\neg H$	Iz. 4. i 18. Modus ponens
20.	$\neg E \Rightarrow \neg H$	Iz 17. i 19. Uslovni dokaz
21.	$H \Rightarrow E$	Iz 20. Kontrapozicija
22.	$(E \Rightarrow H) \wedge (H \Rightarrow E)$	Iz 16. i 21. Spajanje
23.	$E \Leftrightarrow H$	Iz 22. Ekvivalent ekvialencije
	Zaključak:	
23.	$A \Rightarrow (E \Leftrightarrow H)$	Iz 6. i 23. Uslovni dokaz

Reductio ad absurdum

Dokaz *reductio ad absurdum* je specijalna vrsta uslovnog dokaza koji se često koristi u matematici. (To su dokazi koji počinju rečenicom „Pretpostavimo suprotno.. . .“) On se sprovodi uvođenjem uslovne premise koja je negacija željenog zaključka. Ako je željeni zaključak Q valjan biće moguće izvesti iz $\neg Q$ i datih premisa iskaz oblika $A \wedge \neg A$ što je kontradikcija. Tada se na osnovu pravila o uslovnom dokazu može izvesti $\neg Q \Rightarrow (A \wedge \neg A)$. Pošto je $\neg(A \wedge \neg A)$ tautologija ona se može uvesti kao valjani korak u svakom dokazu jer se tautologija može izvesti iz svakog iskaza. Iz ta dva iskaza, na osnovu modus tollens sledi $\neg\neg Q$, a potom i Q na osnovu dvostruke negacije. Ako su $P_1, P_2, \ldots, P_n$ početne premise a Q željeni zaključak dokaz bi imao sledeći oblik:

Primer

Premise:	
P_1	Treba zaključiti Q
P_2	
$\vdots$	
P_n	
$\quad \neg Q$	Uslovna premisa
$\quad \vdots$	
$\quad A$	
$\quad \vdots$	
$\quad \neg A$	
$\quad A \wedge \neg A$	Spajanje
$\neg Q \Rightarrow (A \wedge \neg A)$	Uslovni dokaz
$\neg(A \wedge \neg A)$	Tautologija
$\neg\neg Q$	Modus tollens
Zaključak:	
Q	Dvostruka negacija

A može biti bilo koji iskaz; u mnogim slučajevima je najlakše izvesti iz $\neg Q$ negaciju $\neg P_i$ jedne od premisa. Tada se $P_i \wedge \neg P_i$ dobija spajanjem.

Primer

	Premise:	
1.	$A \Rightarrow B$	Treba zaključiti $\neg A$
2.	$B \Rightarrow C$	
3.	$\neg C$	

4.	$\neg\neg A$	Negacija željenog zaključka
5.	A	Iz 4. Dvostruka negacija
6.	B	Iz 1. i 5. Modus ponens
7.	C	Iz 2. i 6. Modus ponens
8.	$C \wedge \neg C$	Iz 7. i 3. Spajanje
9.	$\neg\neg A \Rightarrow (C \wedge \neg C)$	Iz 4. i 8. Uslovni dokaz
10.	$A \Rightarrow (C \wedge \neg C)$	Iz 9. supstitucija ekvivalenata (dvostruka negacija)
11.	$\neg(C \wedge \neg C)$	Tautologija
	Zaključak:	
12.	$\neg A$	Iz 10. i 11. Modus tollens

Primer

	Premise:	
1.	$P \Rightarrow Q$	Treba zaključiti $\neg P$
2.	$P \Rightarrow \neg Q$	
3.	$\neg P \vee Q$	Iz 1. Ekvivalent implikacije
4.	$\neg P \vee \neg Q$	Iz 2. Ekvivalent implikacije
5.	$\neg\neg P$	Negacija željenog zaključka
6.	Q	Iz 3. i 5. Modus tollendo ponens
7.	$\neg Q$	Iz 4. i 5. Modus tollendo ponens
8.	$Q \wedge \neg Q$	Iz 6. i 7. Spajanje
9.	$\neg\neg P \Rightarrow (Q \wedge \neg Q)$	Iz 5. i 8. Uslovni dokaz
10.	$P \Rightarrow (Q \wedge \neg Q)$	Iz 9. Supstitucija ekvivalenata (dvostruka negacija)
11.	$\neg(Q \wedge \neg Q)$	Tautologija
	Zaključak:	
12.	$\neg P$	Iz 10. i 11. Modus tollens

2.9 Zadaci

Primer jednog testa

1. Odrediti istinitosnu vrednost sledećih rečenica:

   a) $(2+2=4) \wedge (2+3=4)$;

   b) $(2+2=4) \Rightarrow (2+3=4)$;

   c) $(2=1) \Rightarrow \neg(2=1)$;

   d) $\neg(3=2) \Leftrightarrow (5<6)$;

2. Sastaviti istinitosnu tablicu za sledeće formule i odrediti da li su tautologije:

   a) $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$;

b) $(p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow q$;

3. Poznato je da je $p \Leftrightarrow q$ tačno. Šta se može reći o tačnosti sledećih iskaza (tačan, netačan, može da bude i tačan i netačan):.

   a) $\neg p \Leftrightarrow q$;

   b) $q \Rightarrow p$;

   c) $\neg p \Rightarrow q$.

4. Na osnovu osnovnog pravila izvođenja, konstrukcijom istinitosne tablice pokazati da li iz premisa $p \Rightarrow \neg(q \wedge r)$ i $q \wedge r$ logički sledi zaključak $\neg p$.

Rešenja zadataka

1. a) $\perp$;

   b) $\perp$;

   c) $\top$;

   d) $\top$.

2. a) $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$;

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$

   Jeste tautologija.

   b) $(p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow q$;

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$

   Nije tautologija.

3. Treba sastaviti zajedničku istinitosnu tablicu za dva osnovna iskaza i dati iskaz $p \Leftrightarrow q$ i sve izraze čiju istinitost treba da utvrdimo.

p	q	$p \Leftrightarrow$ q	$\neg p$	$\neg p \Leftrightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\neg p \Rightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$

a) $\neg p \Leftrightarrow q$ je netačno;

b) $q \Rightarrow p$ je tačno;

c) $\neg p \Rightarrow q$ može da bude i tačno i netačno.

4. Treba utvrditi da li je $F = (p \Rightarrow \neg(q \wedge r)) \wedge (q \wedge r) \Rightarrow \neg p$ tautologija.

			f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
p	q	r	$\neg p$	$q \wedge r$	$\neg(q \wedge r)$	$p \Rightarrow \neg(q \wedge r)$	$f_4 \wedge f_2$	F
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$

Tautologija je, $\neg p$ sledi valjano iz zadatih premisa.

Zadaci za vežbu

1. Utvrditi i obrazložiti da li je valjano sledeće izvođenje:

Ako ne budem učio neću položiti ispite.

Ako ne položim ispite izgubiću godinu.

Učiću.

$\therefore$ Neću izgubiti godinu.

2. Da li je valjano sledeće izvođenje? Obrazložiti na osnovu osnovnog pravila izvođenja.

   Ako dobijem platu platiću račune ili ću otići na vikend.

   Dobiću platu.

   $\therefore$ Otići ću na vikend.

3. Da li je valjano sledeće izvođenje? Obrazložiti na osnovu osnovnog pravila izvođenja.

   Ako Zoran ne puši u društvu nepušača on je pristojan.

   Zoran puši u prisustvu nepušača.

   $\therefore$ Zoran nije pristojan.

4. Konstruisati dokaz za sledeća izvođenja koristeći osnovno pravilo izvođenja i listu poznatih tautologija:

a)	Premise:	1.	A
		2.	B
	Zaključiti		$(A \wedge B) \vee C$
b)	Premise:	1.	$A \Leftrightarrow B$
	Zaključiti:		$\neg B \vee A$
c)	Premise:	1.	$A \vee B$
		2.	$\neg A \vee C$
		3.	$\neg B$
	Zaključiti:		C
d)	Premise:	1.	$A \Rightarrow B$
		2.	$\neg(B \vee C)$
	Zaključiti:		$\neg A$

5. Konstruisati dokaz za sledeća izvođenja koristeći osnovno pravilo izvođenja i pravilo supstitucije ekvivalenata:

a)	Premise:	1.	$A \Rightarrow (B \Rightarrow \neg\neg C)$
		2.	$A \wedge \neg C$
	Zaključiti:		$\neg B$
b)	Premise:	1.	$A \wedge (B \Rightarrow (C \vee \neg\neg E))$
		2.	B
	Zaključiti:		$A \wedge (E \vee C)$
c)	Premise:	1.	$\neg(A \vee \neg B)$
		2.	$C \vee A$
	Zaključiti:		$B \wedge C$
d)	Premise:	1.	$A \Rightarrow (B \wedge C)$
		2.	$\neg A \Rightarrow \neg B$
	Zaključiti:		$A \Leftrightarrow B$

6. Konstruisati uslovni dokaz za:

a)	Premise:	1.	$E \Rightarrow N$
		2.	$E \Rightarrow (N \Rightarrow M)$
		3.	$N \Rightarrow (M \Rightarrow B)$
	Zaključiti:		$E \Rightarrow B$

b)	Premise:	1.	$(P \Rightarrow Q) \vee R$
	Zaključiti:		$P \Rightarrow (R \vee Q)$

c)	Premise:	1.	W
		2.	$Q \Rightarrow Y$
	Zaključiti:		$(W \Rightarrow Q) \Rightarrow Y$

d)	Premise:	1.	$A \Rightarrow C$
		2.	$B \Rightarrow C$
		3.	$A \vee B$
	Zaključiti:		C

7. Konstruisati dokaz *reductio ad absurdum* za:

a)	Premise:	1.	$A \Rightarrow B$
		2.	$\neg B \wedge C$
	Zaključiti:		$\neg A$
b)	Premise:	1.	$A \vee B$
		2.	$C \wedge \neg A$
	Zaključiti:		B
c)	Premise:	1.	$P \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow R)$
		2.	$\neg R \wedge \neg(S \Rightarrow Q)$
	Zaključiti:		$\neg P$
d)	Premise:	1.	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$
	Zaključiti:		P
e)	Premise:	1.	$P \Rightarrow Q$
		2.	$Q \Rightarrow R$
		3.	$\neg R$
	Zaključiti:		$\neg P$