# Poglavlje 1

# Brojevi i brojni sistemi

## Cvetana Krstev

## 1.1 O brojevima

*Prirodni brojevi* su brojevi sa kojima se broji, uključujući i nulu: $0, 1, 2, 3, \ldots$. Pojam pozitivnih i negativnih brojeva nije definisan u sistemu prirodnih brojeva.

*Celi brojevi* su svi nerazlomljeni brojevi, pozitivni, negativni i nula. To su brojevi: $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$. U osnovi, prirodni brojevi nisu negativni celi brojevi jer koncept pozitivnog i negativnog nije ugrađen u sistem prirodnih brojeva.

*Racionalni brojevi* su brojevi koji se mogu izraziti kao količnik dva cela broja s tim što imenilac ne sme biti 0. Naime, racionalni brojevi se mogu predstaviti u obliku $p/q$ gde su $p$ (brojilac) i $q$ (imenilac) celi brojevi i $q$ je različito od 0 ($q \neq 0$).

*Primer*

Mešoviti broj (složeni broj) $5\frac{1}{2}$ je racionalan broj jer se može predstaviti u obliku razlomka 11/2. Zapisi, $(-2)/3$, $2/(-3)$, $-2/3$ predstavljaju isti, negativan racionalan broj, a zapisi $(-2)/(-3)$ i $2/3$ predstavljaju isti pozitivan racionalan broj. Racionalni brojevi, kao i celi brojevi mogu pozitivni, negativni i nula.

Notacija $p/q$ vodi u beskonačno mnogo istovetnih notacija. Na primer, $1/2 = 2/4 = 3/6 = \ldots$ i $0 = 0/1 = 0/2 = 0/3 = \ldots$. Celi brojevi su takođe racionalni brojevi jer se svaki ceo broj $p$ može predstaviti u obliku $p/1$.

*Realni brojevi* se ne mogu predstaviti ni jednom konačnom notacijom, ali ako se uvede pojam decimalnog zapisa koji se nikada ne završava, onda su to svi brojevi koji se mogu predstaviti u obliku celog broja iza koga sledi, možda i beskonačan, decimalni razvoj. Svi racionalni brojevi, a prema tome i svi celi brojevi, su realni brojevi. Naime, svaki racionalni broj ima decimalnu reprezentaciju koja može biti konačna ili beskonačna. Na primer, $1/4 = 0.25$, to jest $1/4$ je racionalni broj koji ima konačnu decimalnu reprezentaciju. S druge strane, $326/1100 = 0.29636363\ldots$, što znači da je $326/1100$ racionalni broj koji ima beskonačnu decimalnu reprezentaciju u kojoj se obrazac 63 beskonačno ponavlja.

Realni brojevi koji nisu racionalni nazivaju se *iracionalni brojevi*. To su brojevi čija beskonačna decimalna reprezentacija nikada ne dolazi u tačku odakle počinje beskonačno ponavljanje nekog obrasca. Kvadratni koren broja 2, je primer iracionalnog broja koji se može aproksimirati proizvoljno izabranim konačnim brojem decimalnih cifara, na primer $\sqrt{2} = 1.414213562373$, ali stvarni realni broj nema konačnu reprezentaciju niti se u njegovom decimalnom zapisu pojavljuje petlja u kojoj se cifre ponavljaju. Primer iracionalnog broja je i broj $\pi$ (koji predstavlja odnos obima kruga i prečnika).

## 1.2 Osobine broja 0

Ponekad se pogrešno govori da broj 0 nije ni paran ni neparan, pa nije na odmet da se istaknu neki razlozi zašto svrstavanje nule u parne brojeve nije proizvoljno:

1. Parni brojevi su deljivi sa 2 bez ostatka, dok neparni brojevi pri deljenju sa 2 daju ostatak 1. Prema tome i 0 je paran broj.
2. Zbir dva parna broja je paran broj, zbir dva neparna broja je takođe paran broj, dok je zbir parnog i neparnog broja neparan broj. Kako je zbir bilo kog broja i 0 uvek taj isti broj, ova pravila važe samo ako je nula nedvosmisleno paran broj.
3. Proizvod dva neparna broja je neparan, dok svi ostali slučajevi daju paran rezultat. Kako je proizvod bilo kog broja i 0 uvek 0, ova opšta pravila važe samo ako je 0 paran broj.

Bilo koji broj stepenovan brojem 0 kao rezultat daje broj 1. Podsetimo se da $a^n$ znači da se broj $a$ množi sa $a$ $n$ puta, $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots a}_{n}$, ali ova definicija očigledno ima smisla samo ako je $n$ pozitivan ceo broj. Postavlja se pitanje koju vrednost treba izabrati za slučaj $n = 0$ a da to ne bude proizvoljno. Jedan način da se pokaže da $a^0$ treba da bude 1 je uopštavanje izraza

$$a^n \cdot a^m = a^{(n+m)}$$

koji se može ilustrovati sledećim primerima:

$$\begin{array}{rcl} 3^2 \cdot 3^3 & = & 3^5 \; (9 \cdot 27 = 243) \\ 2^1 \cdot 2^2 & = & 2^3 \; (2 \cdot 4 = 8) \end{array}$$

Da bi se održala opštost mora da važi:

$$a^0 \cdot a^m = a^{(0+m)} = a^m$$

Da bi ova jednakost važila, $a^0$ mora biti 1 i to mora da važi za bilo koju vrednost $a$. Znači, $a^0 = 1$ se može smatrati posledicom opštih pravila a ne proizvoljnom konvencijom koju treba zapamtiti.

Deljenje sa nulom nije dozvoljeno. Bližim razmatranjem vidi se da sve specijalne osobine broja 0 potiču otuda što 0 treba da ima takve osobine koje ne krše neko opšte prihvaćeno pravilo. Pokazuje se da je zabrana deljenja sa 0 nužna jer bi dozvola deljenja s nulom obavezno narušila neko opšte prihvaćeno pravilo. Razmotrimo, na primer, koju vrednost bi trebalo da ima količnik 0/0. Jedno pravilo kaže da je $n/n = 1$ za svako $n \neq 0$. S druge strane, drugo pravilo je da je $0/n = 0$ za svako $n \neq 0$. Prema tome, ako bi bilo $0/0 = 1$ onda bi bilo narušeno drugo pravilo, a ako bi bilo $0/0 = 0$ onda bi bi bilo narušeno prvo pravilo. Ako bi neka treća vrednost bila izabrana kao vrednost od 0/0 onda bi oba pravila bila narušena. To je jedan od razloga zašto ni jedna vrednost ne može biti dodeljena ovom količniku a slično bi se moglo pokazati i za druge slučajeve deljenja s nulom.

## 1.3 Brojni sistemi

Brojni sistemi su notacije koje služe za zapisivanje brojeva. Oni mogu biti *nepozicioni* i *pozicioni*. Karakteristika nepozicionih brojnih sistema je da vrednost cifre ne zavisi od pozicije u broju. Primer nepozicionog brojnog sistema su *Rimski brojevi*. Cifre ovog brojnog sistema su `I`, `V`, `X`, `L`, `C`, `D` i `M`, čije su vrednosti, redom, 1, 5, 10, 50, 100, 500 i 1000. U Rimskom broju `III` cifra `I` ima uvek istu vrednost 1, a vrednost broja se dobija sabiranjem vrednosti svih cifara. U Rimskim brojevima `IV` i `VI` cifra `I` opet ima istu vrednost 1 samo što se vrednost broja dobija oduzimanjem, sabiranjem prve cifre od druge, odnosno sabiranjem prve i druge cifre. Naime, kod računanja vrednosti broja pravilo oduzimanja se primenjuje kada cifra manja po vrednosti prethodi većoj.

Pozicioni brojni sistemi su brojni sistemi kod kojih vrednost koju predstavlja cifra u zapisu broja zavisi od cifre i njene pozicije u zapisu broja. Broj različitih cifara brojnog sistema zove se *osnova brojnog sistema*.

*Primer*

U svakodnevnoj je upotrebi *decimalni (ili dekadni) brojni sistem.* On koristi deset cifara: $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$. Osnova ovog brojnog sistema je 10. U broju 326 cifra 3 ima vrednost 300 cifra 2 vrednost 20 a cifra 6 vrednost 6. Taj broj se može analizirati na sledeći način: $326 = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$. U broju 4.23 cifra 4 ima vrednost 4, cifra 2 vrednost 2 desetinke a cifra 3 vrednost 3 stotinke. Ovaj broj može se analizirati na sledeći način: $4.23 = 4 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}$.

Osim dekadnog, u čestoj je upotrebi i *binarni brojni sistem.* On koristi samo dve cifre, $0, 1$ a osnova ovog brojnog sistema je 2.

*Primer*

Broj 1001 u binarnoj notaciji (čita se "jedan-nula-nula-jedan binarno", a ne "hiljadu jedan", a da bi se izbegla zabuna nekad zapisuje i kao $1001_2$) znači dekadno $1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 9$. Broj $10.11_2$ znači dekadno $1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 2 + 1/2 + 1/4 = 2.75$.

### 1.3.1 Pretvaranje iz jednog brojnog sistema u drugi

Konverzija iz decimalne u binarnu notaciju sastoji se u pronalaženju načina da se broj predstavi u obliku zbira brojeva koji su stepen broja 2. Broj $77_{10}$ bi se mogao predstaviti na sledeći način u obliku zbira brojeva koji su stepen broja 2 (uz pomoć tablice stepena broja 2):

$$\begin{aligned} 77 &= 64 + 8 + 4 + 1 = 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = \\ &= 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = \\ &= 1001101_2 \end{aligned}$$

| $2^0$ | $2^1$ | $2^2$ | $2^3$ | $2^4$ | $2^5$ | $2^6$ | $2^7$ | $2^8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 |

U opštem slučaju, pretvaranje iz dekadnog u brojni sistem s osnovom $n$ sastoji se u zapisivanju broja u obliku zbira brojeva koji su stepen te osnove $n$. Do takvog zapisa se može doći ako se broj $b$ podeli osnovom $n$: neka je $d$ celobrojni deo količnika a $r$ ostatak pri deljenju (stoga je $r < n$). Ovaj ostatak je cifra najmanje težine u zapisu brojnog sistema sa osnovom $n$. Sada se broj $b$ može zapisati u obliku $b = n * d + r$, a postupak deljenja se može primeniti na na celobrojni deo količnika $d$: neka je $d_1$ celobrojni deo količnika a $r_1$ ostatak pri deljenju. Ovaj ostatak je cifra sledeća po težini u zapisu broja. Sada se broj $d$ može zapisati u obliku $d = n * d_1 + r_1$, a broj $b$ u obiliku $b = n * (n * d_1 + r_1) + r$. Postupak se ponavlja sve dok celobrojni deo količnika ne postane jednak 0 — u svakom koraku dobija se sledeća cifra po težini u zapisu broja. Na primeru pretvaranja broja $77_{10}$ u brojni sistem s osnovom 2 ovaj postupak daje sledeći rezultat:

$$\begin{aligned}
77 &= 2\cdot 38+1 = 2\cdot(2\cdot 19+0)+1 = 2\cdot(2\cdot(2\cdot 9+1)+0)+1\\
&= 2\cdot(2\cdot(2\cdot(2\cdot 4+1)+1)+0)+1\\
&= 2\cdot(2\cdot(2\cdot(2\cdot(2\cdot 2+0)+1)+1)+0)+1\\
&= 2\cdot(2\cdot(2\cdot(2\cdot(2\cdot(2\cdot 1+0)+0)+1)+1)+0)+1\\
&= 2\cdot(2\cdot(2\cdot(2\cdot(2\cdot(2\cdot(2\cdot 0+1)+0)+0)+1)+1)+0)+1
\end{aligned}$$

Ako se dobijeni ostaci pri deljenju zapišu obrnutim redosledom u odnosu na onaj u kom su izračunati dobiaj zapis broja u binarnom brojnom sistemu $1001101_2$. Ceo postupak se šematski može prikazati na sledeći način:

$$\begin{array}{rll}
77 & :2 & \text{ostatak } 1 \Uparrow\\
38 & :2 & \text{ostatak } 0 \,\|\\
19 & :2 & \text{ostatak } 1 \,\|\\
9 & :2 & \text{ostatak } 1 \,\|\\
4 & :2 & \text{ostatak } 0 \,\|\\
2 & :2 & \text{ostatak } 0 \,\|\\
1 & :2 & \text{ostatak } 1 \,\|\\
0 & \text{kraj} &
\end{array}$$

Isti broj bi se preveo u brojni sistem sa osnovom 4 na sledeći način:

$$\begin{array}{rll}
77 & :4 & \text{ostatak } 1 \Uparrow\\
19 & :4 & \text{ostatak } 3 \,\|\\
4 & :4 & \text{ostatak } 0 \,\|\\
1 & :4 & \text{ostatak } 1 \,\|\\
0 & \text{kraj} &
\end{array}$$

Prema tome $77_{10} = 1031_4$.

U računarstvu se često koristi i brojni sistem sa osnovom 16 koji se naziva *heksadecimalni brojni sistem*. Njegovih 16 cifara predstavlja se dekadnim ciframa od 0 do 9 i slovima engleskog alfabeta od A do F, tako da je:

$$\begin{array}{ll}
A_{16} = 10_{10} & D_{16} = 13_{10}\\
B_{16} = 11_{10} & E_{16} = 14_{10}\\
C_{16} = 12_{10} & F_{16} = 15_{10}
\end{array}$$

Tako se heksadecimalni broj A2F analizira na sledeći način:

$$\begin{aligned}
A2F_{16} &= A\cdot 16^2 + 2\cdot 16^1 + F\cdot 16^0 =\\
&= 10\cdot 256 + 2\cdot 16 + 15 =\\
&= 2560 + 32 + 15 = 2607_{10}
\end{aligned}$$

Dekadni broj 77 bi se preveo u brojni sistem sa osnovom 16 na sledeći način:

$$\begin{array}{rll} 77 & :16 & \text{ostatak } 13 = D_{16} \Uparrow \\ 4 & :16 & \text{ostatak } 4 = 4_{16} \parallel \\ 0 & \text{kraj} & \end{array}$$

Prema tome $77_{10} = 4D_{16}$.

*Primer*

Decimalna vrednost brojs $AD65_{16}$ je:

$$\begin{aligned} AD65_{16} &= 10 \cdot 16^3 + 13 \cdot 16^2 + 6 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0 = \\ &= 10 \cdot 4096 + 13 \cdot 256 + 6 \cdot 16 + 5 = \\ &= 40960 + 3328 + 96 + 5 = 44389_{10} \end{aligned}$$

*Primer*

Heksadecimalna vrednost broja $14855_{10}$ je:

$$\begin{array}{rll} 14855 & :16 & \text{ostatak } 7 \Uparrow \\ 928 & :16 & \text{ostatak } 0 \parallel \\ 58 & :16 & \text{ostatak } 10 \parallel \\ 3 & :16 & \text{ostatak } 3 \parallel \\ 0 & \text{kraj} & \end{array}$$

Prema tome $14855_{10} = 3A07_{16}$.

Kada su u pitanju brojni sistemi kod kojih je osnova jednog stepen osnove drugog, onda je prevođenje iz jednog u drugi brojni sistem jednostavnije. Takav je, na primer, slučaj heksadecimalnog i binarnog brojnog sistema jer je $16 = 2^4$. Tada se broj iz heksadecimalnog brojnog sistema prevodi u broj u binarnom brojnom sistemu zamenom svake heksadecimalne cifre njenom binarnom vrednošću zapisanom sa 4 cifre. Na primer,

$$A2F_{16} = 1010 \mid 0010 \mid 1111_2$$

Broj se iz binarnog brojnog sistema prevodi u heksadecimalni brojni sistem tako što se binarne cifre grupišu u grupe od četiri cifre (ovde je četiri stepen osnove 2 koja daje drugu osnovu 16) počev od cifara manje težine ka ciframa veće težine. Na primer,

$$\overbrace{1010}\overbrace{0010}\overbrace{1111}_2 = A2F_{16}$$

Da bismo se uverili u ispravnost ovog postupka prevedimo oba broja u dekadni brojni sistem:

$$A2F_{16} = 10 \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 =$$

$$
\begin{aligned}
&= 2560 + 32 + 15 = 2607_{10} \\
101000101111_2 &= 1\cdot 2^{11} + 1\cdot 2^9 + 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = \\
&= \overbrace{2048 + 512} + \overbrace{32} + \overbrace{8+4+2+1} = 2605_{10}
\end{aligned}
$$

Formalnije se opravdanje za ovakav postupak nalazi u sledećem:

$$
\begin{aligned}
A2F_{16} &= A\cdot 16^2 + 2\cdot 16^1 + F\cdot 16^0 = \\
&= (1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0)\cdot (2^4)^2 + \\
&\quad (0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0)\cdot (2^4)^1 + \\
&\quad (1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0)\cdot (2^4)^0 = \\
&= 1\cdot 2^{11} + 1\cdot 2^9 + 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = \\
&= 101000101111_2
\end{aligned}
$$

## 1.3.2 Računanje u pozicionim brojnim sistemima

Osnovne računske operacije se u svim pozicionim brojnim sistemima izvode u osnovi na isti način. Na primer, da bismo sabrali dva broja, 153 i 98 u dekadnom brojnom sistemu postupili bismo na sledeći način: Postupak sabiranja počinje od cifara najmanje težine, odnosno od jedinica. Treba, dakle, sabrati cifre najmanje težine 3 i 8. Rezultat je broj 11 koji je veći od 9, najveće cifre u ovom brojnom sistemu, pa zadržavamo cifru 1 kao cifru najmanje težine rezultata a cifru 1 na poziciji desetica pamtimo kao prenos. Zatim se sabiraju cifre 5 i 9 na poziciji desetica uz dodavanje prenosa. Rezultat je broj $15 > 9$ pa postupamo opet na isti način: zadržavamo cifru 5 na poziciji desetica a cifru 1 pamtimo kao prenos na poziciji stotina. Konačan rezultat je broj 251.

Sabiranje u binarnom brojnom sistemu obavlja se na isti način:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | | prenos |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | | rezultat |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | = | $53_{10}$ |
| | | 1 | 0 | 0 | 1 | = | $9_{10}$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | = | $62_{10}$ |

Sledeći primer binarnog sabiranja je:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | prenos |
| | 10 | 10 | 10 | 11 | 10 | 10 | | rezultat |
| | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | = | $55_{10}$ |
| | | | 1 | 1 | 0 | 1 | = | $13_{10}$ |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | = | $68_{10}$ |

Sličan je slučaj i sa operacijom oduzimanja. Da bismo u dekadnom brojnom sistemu oduzeli broj 98 od broja 1053 postupili bismo na sledeći način: Oduzimanje počinje od cifara najmanje težine, odnosno od jedinica. Treba, dakle, oduzeti 8 od 3. Kako to nije moguće pozajmljuje se jedna destica a na mestu desetica u umenjeniku ostaje cifra 4. Oduzima se na mestu jedinica 8 od 13, pa je cifra jedinica rezultata 5. Prelazi se na oduzimanje cifara desetica, cifra 9 oduzima se od cifre 4. Kako to nije moguće pozajmljuje se jedna stotina, a kako ni to nije moguće jer je cifra stotina 0, pozajmljuje se jedna hiljada. Kao rezultat ove operacije, na cifri hiljada u umenjeniku pojavljuje se nula, na cifri stotina 10, a posle pozajmice 9. Na mestu desetica oduzima se 9 od 14, pa je cifra desetica rezultata 5. Kako u umanjiocu nema više cifara, konačan rezultat je 955.

Oduzimanje u binarnom brojnom sistemu obavlja se na isti način:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | | pozajmica |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 10 | 0 | | rezultat |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | = | $53_{10}$ |
| | | | | 1 | 1 | = | $3_{10}$ |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | = | $50_{10}$ |

Sledeći primer binarnog oduzimanja je:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | | pozajmica |
| | 0 | 10 | 10 | 10 | 0 | | rezultat |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | = | $53_{10}$ |
| | | | 1 | 1 | 0 | = | $6_{10}$ |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | = | $47_{10}$ |

U dekadnom pozicionom brojnom sistemu u svim brojevima deljivim sa 10 cifra najmanje težine je 0. Zašto je to tako može se ilustrovati na primeru broja 540. Taj broj se može analizirati na sledeći način: $540 = 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 = 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 = 10 \cdot (5 \cdot 10 + 4)$, a to znači da je broj 540 u kome je cifra jedinica 0 deljiv sa 10. Slično se može ilustrovati da su u brojevima koji su deljivi sa $100 = 10^2$ i cifre jedinica i cifre desetica 0.

Isto važi i u opštem slučaju. U broju koji je deljiv osnovom brojnog sistema cifra najmanje težine je 0, a u broju koji je deljiv $m$-tim stepenom osnove brojnog sistema $m$ cifara najmanje težine u tom broju su 0. Tako je u binarnom brojnom sistemu svaki broj deljiv osnovom 2 cifra najmanje težine 0. Na primer, broj $11010_2$ može se analizirati na sledeći način: $11010_2 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 2 \cdot (1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0)$, a to znači da je broj $11010_2$ deljiv sa 2. Ako taj broj pretvorimo u dekadni brojni sistem $11010_2 = 26_{10}$ još jednom ćemo se uveriti u to.

*Primer*

Binarni broj $1101000_2$ deljiv je sa 8, što se može pokazati na sledeći način:

$$\begin{aligned}
1101000_2 &= 1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = \\
&= 1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^3 = \\
&= 2^3\cdot(1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^0) = \\
&= 8\cdot(8+4+1) = 8\cdot 13 = 104
\end{aligned}$$

Da bi se u dekadnom pozicionom brojnom sistemu broj pomnožio sa 10 treba na zapis broja dopisati 0, što znači da cifra jedinica postaje 0, prethodna cifra jedinica postaje cifra desetica, prethodna cifra desetica postaje cifra stotina, i tako redom. Zašto je to tako može se ilustrovati na primeru množenja broja 53 brojem 10. Analiza proizvoda $53\cdot 10$ daje sledeće $(5\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0)\cdot 10 = 5\cdot 10^2 + 3\cdot 10^1 = 5\cdot 10^2 + 3\cdot 10^1 + 0\cdot 10^0 = 530$, a to znači da je na zapis broja 53 dopisana cifra 0.

Isto važi i u opštem slučaju. Množenje broja osnovom pozicionog brojnog sistema svodi se na dopisivanje 0 na zapis broja, a množenje broja $m$-tim stepenom osnove svodi se na dopisivanje $m$ nula na zapis broja. Na primer, množenje binarnog broja $1011_2$ osnovom 2 može se analizirati na sledeći način: $(1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0)\cdot 2 = 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 = 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 10110_2$. Oba broja $1011_2 = 11$ i $10110_2 = 22$ prevedena u dekadni brojni sistem pokazuju se da je prvi polovina drugog.

Slično važi i za operaciju deljenja. Deljenje broja osnovom pozicionog brojnog sistema svodi se na otpisivanje poslednje cifre (cifre najmanje težine) iz zapisa broja, a deljenje broja $m$-tim stepenom osnove svodi se na otpisivanje $m$ cifara najmanje težine iz zapisa broja. Na primer, deljenje binarnog broja $11011_2$ stepenom osnove $2^2$ može se analizirati na sledeći način: $(1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0) : 2^2 = (1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0) + (1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0) : 2^2 = 110_2 + 11_2 : 2^2$, a to znači da je celobrojni deo količnika $110_2$ dok je ostatak pri deljenju $11_2$. Deljenik $11011_2 = 27$, delilac $2^2 = 4$, celobrojni deo količnika $110_2 = 6$ i ostatak pri deljenju $11_2 = 3$ pretvoreni u dekadni brojni sistem još jednom potvrđuju ispravnost ovog postupka.

## 1.4 Zadaci

### 1.4.1 Primer jednog testa

1. a) Rimski broj $MMDXLIX$ pretvoriti u dekadni brojni sistem.

   b) Broj 2794 pretvoriti iz dekadnog brojnog sistema u rimski broj.

2. a) Koja je najveća cifra u pozicionom brojnom sistemu sa osnovom 7?
   b) Koje su vrednosti cifara u broju $123_7$?
   c) Koja je dekadna vrednost broja $123_7$?
3. Broj $1949_{10}$ predstaviti u brojnom sistemu sa osnovom 5.
4. a) Odrediti u binarnom brojnom sistemu tri broja koja neposredno prethode broju $11001001_2$.
   b) Odrediti u heksadekadnom brojnom sistemu tri broja koja neposredno slede iza broja $2AFE_{16}$.
5. a) Binarno sabrati brojeve $100111110101_2$ i $10101100_2$.
   b) Rezultat dobijen pod a) pretvoriti u heksadekadni brojni sistem, ne pretvarajući u dekadni sistem.

### 1.4.2 Rešenja zadataka

1. a) $MMDXLIX \to 2549$
   b) $2794 \to MMDCCXCIV$
2. a) 6
   b) Cifra 3 ima vrednost 3, cifra 2 ima vrednost $2 \cdot 7 = 14$, cifra 1 ima vrednost $1 \cdot 7^2 = 49$
   c) $123_7 = 49 + 14 + 3 = 66_{10}$
3. Vrednost broja $1949_{10}$ u brojnom sistemu sa osnovom 5 je:

$$\begin{array}{rll} 1949 & :5 & \text{ostatak } 4 \Uparrow \\ 389 & :5 & \text{ostatak } 4 \parallel \\ 77 & :5 & \text{ostatak } 2 \parallel \\ 15 & :5 & \text{ostatak } 0 \parallel \\ 3 & :5 & \text{ostatak } 3 \parallel \\ 0 & \text{kraj} & \end{array}$$

   Prema tome $1949_{10} = 30244_5$.
4. a) Ta tri broja su: $11001000_2$, $11000111_2$, $11000110_2$.
   b) Ta tri broja su: $2AFF_{16}$, $2B00_{16}$, $2B01_{16}$.
5. a) Zbir brojeva $100111110101_2$ i $10101100_2$ je $101010100001_2$.
   b) $\overbrace{1010}\overbrace{1010}\overbrace{0001}_2 = AA1_{16}$.

### 1.4.3 Zadaci za vežbu

1. Broj $23971_{10}$ pretvoriti u:

    a) brojni sistem s osnovom 2;
    b) brojni sistem s osnovom 16;
    c) brojni sistem s osnovom 7.

2. Pretvoriti u brojni sistem s osnovom 10:

    a) broj 11011001101 u binarnom brojnom sistemu;
    b) broj $B3FD$ u heksadecimalnom brojnom sistemu;
    c) broj 11001 u sistemu s osnovom 7.

3. Pretvoriti u binarni brojni sistem (ne pretvarajući u dekadni brojni sistem):

    a) broj $3012_4$;
    b) broj $B3FD$ u heksadecimalnom brojnom sistemu;
    c) broj $3012_8$.

4. Pretvoriti u heksadekadni brojni sistem (ne pretvarajući u dekadni brojni sistem):

    a) broj $1101011111000001_2$;
    b) broj $3012_4$;

5. Ne pretvarajući u dekadni brojni sistem, odrediti za broj $1100101_2$:

    a) tri sledeća broja;
    b) tri prethodna broj.

6. Ne pretvarajući u dekadni brojni sistem, odrediti za broj $C0FD_{16}$:

    a) tri sledeća broja;
    b) tri prethodna broj.

7. Ne pretvarajući u dekadni brojni sistem, sabrati brojeve:

    a) $1001011_2$ i $101101_2$;
    b) $1010111_2$ i $101010_2$;

c) $AB3F_{16}$ i $1D2_{16}$.

8. Ne pretvarajući u dekadni brojni sistem, oduzeti:

   a) $101_2$ od $1011001_2$;

   b) $1011_2$ od $100100_2$;

   c) $F9_{16}$ od $1D2_{16}$.

9. Ne pretvarajući u dekadni brojni sistem, odrediti koji od navedenih brojeva su deljivi sa 2, koji sa 4 a koji sa 8:

   a) $10010101_2$

   b) $10111000_2$

   c) $1101110110_2$.

   d) $1100110100_2$.

10. Ne pretvarajući u dekadni brojni sistem, odrediti količnik i ostatak pri deljenju sa 2, 4 i 8 brojeva:

    a) $10010101_2$

    b) $1101110110_2$.

    c) $1100110100_2$.