Задаци из Алгебарске топологије

1. (*Лема о лептиру*) Ако су на доњем комутативном дијаграму Абелових група и хомоморфизама низови по дијагоналама тачни, доказати да је $\operatorname{im} g / \operatorname{im} f \cong \operatorname{im} q / \operatorname{im} p$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "h"] \arrow[dd, "f"'] & & C \arrow[dl, "r"'] \arrow[dd, "p"] \\
& E \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "q"] & \\
B & & D
\end{tikzcd}$$

2. Нека је дат тачан низ Абелових група и хомоморфизама $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$.

(а) Ако су групе A и C коначне, доказати да је онда и B коначна.
(б) Ако су групе A и C коначно генерисане, доказати да је онда и B коначно генерисана.

3. (*Шестоугаона лема*) Нека је дат комутативан дијаграм Абелових група и хомоморфизама при чему су c_1 и e_1 изоморфизми (као што је и назначено на дијаграму одговарајућим стрелицама) и све композиције по дијагоналама $g_3 a_2$, $g_2 c_2$ и $g_1 e_2$ једнаке нули.

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "a_1"'] \arrow[dr, "a_3"] \arrow[dd, "a_2"'] & \\
B & & F \\
& G \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[dd, "g_3"'] & \\
C \arrow[uu, tail, two heads, "c_1"] \arrow[ur, "c_2"] \arrow[dr, "c_3"'] & & E \arrow[uu, tail, two heads, "e_1"'] \arrow[ul, "e_2"'] \arrow[dl, "e_3"] \\
& D &
\end{tikzcd}$$

Ако је још бар један од два низа по „попречним” дијагоналама тачан, тј. ако важи $\ker g_2 = \operatorname{im} c_2$ или $\ker g_1 = \operatorname{im} e_2$, доказати да је

$$c_3 c_1^{-1} a_1 + e_3 e_1^{-1} a_3 = 0.$$

4. (*3×3 лема*) Дат је комутативан дијаграм Абелових група и хомоморфизама такав да су сва три водоравна кратка низа тачна.

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & D \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[r] \arrow[d] & I \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

(а) Ако су леви и средњи усправни низ тачни, доказати да је онда тачан и десни.
(б) Ако су средњи и десни усправни низ тачни, доказати да је онда тачан и леви.
(в) Ако су леви и десни усправни низ тачни и композиција $B \to E \to H$ једнака нули, доказати да је онда и средњи усправни низ тачан.

5. Нека су A, B, C Абелове групе и $f : A \to B$ и $g : B \to C$ хомоморфизми. Доказати да постоји тачан низ облика

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow \ker(g \circ f) \longrightarrow \ker g \longrightarrow \operatorname{coker} f \longrightarrow \operatorname{coker}(g \circ f) \longrightarrow \operatorname{coker} g \longrightarrow 0.$$

6. Нека су следећи низови Абелових група и хомоморфизама тачни.

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0 \qquad\qquad 0 \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow E$$

Доказати да постоји тачан низ облика

$$A \longrightarrow B \longrightarrow D \longrightarrow E.$$

7. Нека је p прост број и

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

кратак тачан низ, где су A, B и C коначне Абелове групе. Доказати да група B нема елемената чији је ред дељив бројем p ако и само ако групе A и C немају таквих елемената.

8. Дат је комутативан дијаграм Абелових група и хомоморфизама

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & A_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, tail, "\alpha"'] & B_n \arrow[r] \arrow[d] & C_n \arrow[r] \arrow[d] & A_n \arrow[r] \arrow[d, tail, "\alpha"'] & B_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & E_{n+1} \arrow[r] & A'_{n+1} \arrow[r] & D_n \arrow[r] & E_n \arrow[r] & A'_n \arrow[r] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

при чему су водоравни низови тачни и $\alpha = \alpha_n : A_n \to A'_n$ изоморфизми (за све n). Доказати да постоји дуг тачан низ следећег облика:

$$\cdots \longrightarrow E_{n+1} \longrightarrow B_n \longrightarrow C_n \oplus D_n \longrightarrow E_n \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

9. Дат је комутативан дијаграм Абелових група и хомоморфизама, при чему су врсте тачни низови.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & A_3 \arrow[d, "\varphi_3"] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3
\end{tikzcd}$$

Доказати да φ_2 индукује изоморфизам $\ker(\varphi_3 \circ \alpha_2)/(\ker \alpha_2 + \ker \varphi_2) \longrightarrow (\operatorname{im} \varphi_2 \cap \operatorname{im} \beta_1)/\operatorname{im}(\varphi_2 \circ \alpha_1)$.

10. Дат је троугао Абелових група и хомоморфизама који је тачан на сва три места (тада се каже да групе D и E заједно са хомоморфизмима α, β и γ чине *тачан пар*).

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "\alpha"] & & D \arrow[dl, "\beta"] \\
& E \arrow[ul, "\gamma"] &
\end{tikzcd}$$

(а) Доказати да је $\operatorname{im}(\beta \circ \gamma) \subseteq \ker(\beta \circ \gamma)$.

Нека је $E_1 := \ker(\beta \circ \gamma)/\operatorname{im}(\beta \circ \gamma)$ и $D_1 := \operatorname{im} \alpha$.

Нека је $\alpha_1 : D_1 \to D_1$ хомоморфизам индукован са α (за $d \in D_1$, $\alpha_1(d) := \alpha(d)$).

(б) Доказати да је на следећи начин добро дефинисан хомоморфизам $\beta_1 : D_1 \to E_1$: за $d \in D_1$, $\beta_1(d) := [\beta(\tilde{d})]$, где је $\tilde{d} \in D$ произвољан елемент такав да је $\alpha(\tilde{d}) = d$.

(в) Доказати да је са $\gamma_1([e]) := \gamma(e)$, $e \in \ker(\beta \circ \gamma)$, добро дефинисан хомоморфизам $\gamma_1 : E_1 \to D_1$.

(г) Доказати да је следећи троугао тачан на сва три места (овај тачан пар се назива паром *изведеним* из горњег тачног пара).

$$\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[rr, "\alpha_1"] & & D_1 \arrow[dl, "\beta_1"] \\
& E_1 \arrow[ul, "\gamma_1"] &
\end{tikzcd}$$

11. Нека је $F : Ab \to Ab$ коваријантан функтор из категорије Абелових група у исту категорију, такав да преводи кратке тачне низове у кратке тачне низове; прецизније, важи да, ако је $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \to 0$ кратак тачан низ Абелових група и хомоморфизама, онда је и низ $0 \to F(A) \xrightarrow{F(i)} F(B) \xrightarrow{F(j)} F(C) \to 0$ тачан. Доказати да F преводи сваки тачан низ у тачан низ. (За овакав функтор F каже се да је *тачан.*)

12. Нека је X просто повезан простор и A његов потпростор који има коначно много компонената путне повезаности (означимо број тих компонената са a). Доказати да је релативна хомолошка група $H_1(X, A)$ слободна и да је њен ранг $a - 1$.

13. Нека је X тополошки простор и $f : X \to X$ непрекидно пресликавање хомотопно са $\mathbf{1}_X$. Доказати да за свако $n \in \mathbb{Z}$ важи $H_n(\operatorname{im} f) \cong H_n(X) \oplus H_{n+1}(X, \operatorname{im} f)$.

14. Нека су $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ пресликавања парова. Кажемо да су f и g *хомотопна кроз пресликавања парова* (или *хомотопна у категорији* Top^2) ако постоји (непрекидно) $H : X \times I \to Y$ такво да је $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ за све $x \in X$ и $H(A \times I) \subseteq B$.

Пресликавање $\varphi : (X, A) \to (Y, B)$ је *хомотопска еквиваленција парова* ако постоји $\psi : (Y, B) \to (X, A)$ такво да су композиције $\psi \circ \varphi$ и $\varphi \circ \psi$ хомотопне идентичким пресликавањима кроз пресликавања парова.

(а) Користећи чињеницу да ако су пресликавања f и g ($f, g : (X, A) \to (Y, B)$) хомотопна кроз пресликавања парова, онда је (за све $k \in \mathbb{Z}$) $f_* = g_*$ ($f_*, g_* : H_k(X, A) \to H_k(Y, B)$), доказати да хомотопска еквиваленција парова $\varphi : (X, A) \to (Y, B)$ индукује изоморфизме $\varphi_* : H_k(X, A) \to H_k(Y, B)$ за све $k \in \mathbb{Z}$.

(б) Доказати да за $n \in \mathbb{N}$ инклузија парова $i : (D^n, S^{n-1}) \hookrightarrow (D^n, D^n \setminus \{0\})$ није хомотопска еквиваленција парова, али да је ипак $i_* : H_k(D^n, S^{n-1}) \to H_k(D^n, D^n \setminus \{0\})$ изоморфизам за свако $k \in \mathbb{Z}$.

15. Нека су $A, B \subseteq X$, при чему је $\operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B = X$.

(а) Доказати да инклузија $(X, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ индукује епиморфизам $H_n(X, A \cap B) \twoheadrightarrow H_n(X, A)$ за све $n \in \mathbb{Z}$.

(б) Доказати да је $H_n(X, A \cap B) \cong H_n(X, A) \oplus H_n(X, B)$ за све $n \in \mathbb{Z}$.

16. У простору $\mathbb{R}^3$ су дате кружнице $\alpha_k = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - 2k)^2 + y^2 = 1\}$, за $k = \overline{1, 2016}$. Нека је $X = \mathbb{R}^3 \setminus \left(\{(0,0,0)\} \cup \bigcup_{k=1}^{2016} \alpha_k\right)$. Одредити релативне хомолошке групе $H_n(\mathbb{R}^3, X)$, $n \in \mathbb{Z}$.

17. Ако је X простор са познатим хомолошким групама, одредити хомолошке групе количничког простора Y који је добијен од n дисјунктних конуса CX идентификовањем свих „доњих” нивоа ($n \in \mathbb{N}$).

18. Нека су $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрекидне ограничене функције. Доказати да систем једначина

$$\begin{array}{rcl} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & x_1 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & x_2 \\ & \vdots & \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & x_n \end{array}$$

има решење.

19. Нека је $K_n = [-1, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ n-димензиона коцка и $\partial K_n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in K_n : |x_i| = 1 \text{ за бар једно } i\}$ њена граница.

(а) Доказати да је непрекидно пресликавање $f : \partial K_n \to Y$ (Y је произвољан тополошки простор) хомотопски тривијално ако и само ако се може проширити на K_n, тј. ако и само ако постоји непрекидно $\overline{f} : K_n \to Y$ такво да је $\overline{f}|_{\partial K_n} = f$. (Може се, без доказивања, користити чињеница да постоји (канонски) хомеоморфизам $h : K_n \to D^n$, $h(\partial K_n) = S^{n-1}$.)

(б) Доказати да инклузија $\partial K_n \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ није хомотопски тривијално пресликавање.

За скупове $A, B, C \subseteq K_n$ кажемо да скуп B *раздваја* скупове A и C ако постоји дисконексија $\{U, V\}$ простора $K_n \setminus B$ таква да је $A \subseteq U$ и $C \subseteq V$.

Означимо са $C_i^+ = \{x \in K_n \mid x_i = 1\}$ и $C_i^- = \{x \in K_n \mid x_i = -1\}$, $i = \overline{1,n}$, $(n-1)$-димензионе стране коцке K_n. Нека су $B_1, B_2, \ldots, B_n \subseteq K_n$ затворени скупови такви да B_i раздваја C_i^+ и C_i^-, $i = \overline{1,n}$.

(в) Конструисати непрекидне функције $f_i : K_n \to \mathbb{R}$ са својствима $f_i^{-1}\big(\{0\}\big) = B_i$, $f_i(C_i^+) \subseteq (0, +\infty)$ и $f_i(C_i^-) \subseteq (-\infty, 0)$, $i = \overline{1,n}$.

(г) Доказати да је $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} B_i \neq \emptyset$.

20. Нека је M n-димензиона многострукост и K коначан подскуп од M.

(а) Одредити релативне хомолошке групе $H_i(M, M \setminus K)$, $i \in \mathbb{Z}$.

(б) Доказати да је $H_i(M \setminus K) \cong H_i(M)$ за све $i \in \mathbb{Z} \setminus \{n-1, n\}$.

21. Нека је $n \in \mathbb{N}$, $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ n-димензиона сфера, $S^n_+ = \{x \in S^n \mid x_{n+1} \geqslant 0\}$ горња полусфера, $S^n_- = \{x \in S^n \mid x_{n+1} \leqslant 0\}$ доња полусфера и $S^{n-1} = \{x \in S^n \mid x_{n+1} = 0\}$ екваторијална $(n-1)$-димензиона сфера. Нека је још и $f : S^n \to S^n$ непрекидно пресликавање такво да је $f(S^n_+) \subseteq S^n_+$ и $f(S^n_-) \subseteq S^n_-$. Ако је $\widetilde{f} : S^{n-1} \to S^{n-1}$ рестрикција пресликавања f на S^{n-1}, доказати да је $\deg \widetilde{f} = \deg f$.

22. (а) Нека је $f : S^{n-1} \to S^{n-1}$ непрекидно пресликавање такво да је $|\deg f| \neq 1$. Доказати да постоје тачке $x, y \in S^{n-1}$ такве да је $f(x) = x$ и $f(y) = -y$.

(б) Ако је $\overrightarrow{F} : D^n \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (непрекидно) ненулто векторско поље на диску D^n, доказати да постоји тачка $x \in \partial D^n$ таква да су вектори $\overrightarrow{Ox}$ и $\overrightarrow{F}(x)$ колинеарни и исто усмерени, као и да постоји тачка $y \in \partial D^n$ таква да су вектори $\overrightarrow{Oy}$ и $\overrightarrow{F}(y)$ колинеарни и супротно усмерени.

23. Нека је $f : S^n \to S^n$ непрекидно пресликавање непарног степена. Доказати да постоји тачка $x \in S^n$ за коју важи $f(-x) = -f(x)$.

24. Нека је $\mathbb{C}$ комплексна раван и $S^1 \subset \mathbb{C}$ јединична кружница.

(а) За $z_0 \in \mathbb{C} \setminus S^1$ дефинишемо пресликавање $f_0 : S^1 \to S^1$ са $f_0(z) := \frac{z - z_0}{|z - z_0|}$. Ако је $|z_0| > 1$, доказати да је $f_0 \simeq \mathrm{const}$, а ако је $|z_0| < 1$, доказати да је $f_0 \simeq \mathbf{1}_{S^1}$.

(б) Ако је $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ полином (полиномијално пресликавање) чије су све нуле модула мањег од 1 и $f : S^1 \to S^1$ пресликавање дефинисано са $f(z) = \frac{q(z)}{|q(z)|}$, доказати да је $f \simeq \varphi_n$, где је $\varphi_n : S^1 \to S^1$ дато са $\varphi_n(z) = z^n$, а n степен полинома q.

Нека је $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ полиномијално пресликавање.

(в) Доказати да постоји јединствено (непрекидно) продужење $\overline{p} : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ пресликавања p, где је $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ Александровљева компактификација (компактификација једном тачком) комплексне равни.

Ако је $h : S^2 \xrightarrow{\approx} \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ хомеоморфизам, дефинишемо пресликавање $\widehat{p} : S^2 \to S^2$ као следећу композицију: $S^2 \xrightarrow{h} \mathbb{C} \cup \{\infty\} \xrightarrow{\overline{p}} \mathbb{C} \cup \{\infty\} \xrightarrow{h^{-1}} S^2$.

(г) Доказати да $\deg \widehat{p}$ не зависи од избора хомеоморфизма h.

(д) Ако је $r > 0$ такав да p нема нула на кружници $S_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$, доказати да хомоморфизам $p_* : H_1(S_r) \to H_1(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, индукован рестрикцијом пресликавања p на S_r, генератор групе $H_1(S_r) \cong \mathbb{Z}$ слика у $k\sigma$, где је σ генератор групе $H_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$, а $k \in \mathbb{N}_0$ број нула (рачунајући и вишеструкост) полинома p унутар кружнице S_r.

(ђ) Доказати да је $\deg \widehat{p} = \deg p$ ($\deg \widehat{p}$ је степен пресликавања у тополошком смислу, а $\deg p$ степен полинома p).

25. Нека је $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$ стандардни (еуклидски) скаларни производ на $\mathbb{R}^{2n+1}$. Ако су $\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G} : S^{2n} \to \mathbb{R}^{2n+1}$ два векторска поља на сфери S^{2n} таква да је $\langle x, \overrightarrow{F}(x) \rangle = \langle x, \overrightarrow{G}(x) \rangle$ за све $x \in S^{2n}$, доказати да постоји $x_0 \in S^{2n}$ такво да је $\overrightarrow{F}(x_0) = \overrightarrow{G}(x_0)$.

26. Нека је n непаран природан број, $n > 1$, и нека су $g_1, g_2, \ldots, g_n : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ непрекидне функције. Доказати да постоји $\lambda \in \mathbb{R}$ такво да систем једначина

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda x_i, \quad i = \overline{1,n},$$

има решење $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S^{n-1}$.

27. Нека је $n \geqslant 2$. Доказати да не постоји ретракт A од $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ такав да је $A \approx \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ (дакле, ни $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$, природно утопљен у $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, није ретракт од $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$).

28. Нека је X тополошки простор и A његов потпростор. Кажемо да је A *контрактибилан у* X ако је инклузија $i : A \hookrightarrow X$ хомотопски тривијално пресликавање.

(а) Ако је A контрактибилан или X контрактибилан, доказати да је A контрактибилан у X.

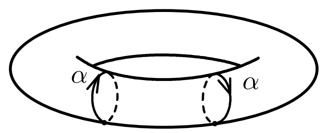
Дефинишимо *Љустерник–Шнирелманову категорију* простора X, у ознаци $\operatorname{cat} X$, на следећи начин:

$\operatorname{cat} X := \min\{k \in \mathbb{N} \mid$ постоји покривање простора X са k отворених подскупова контрактибилних у $X\}$.

(б) Доказати да је $\operatorname{cat} \mathbb{R}\mathrm{P}^2 = 3$.

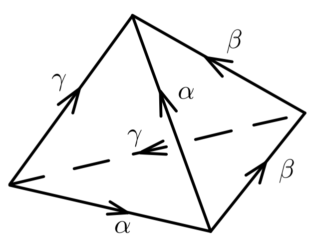
29. Нека су A, B и C отворени контрактибилни подскупови пројективне равни $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$. Ако је $A \cup B \cup C = \mathbb{R}\mathrm{P}^2$, доказати да је $A \cap B \cap C \neq \emptyset$.

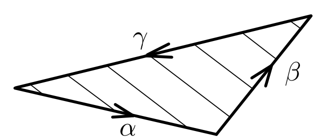
30. Простор X је задат као количник торуса (в. слику).

X :


(а) Одредити хомолошке групе простора X.
(б) Да ли је кружница α (деформациони) ретракт простора X?

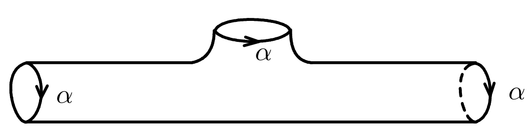
31. Простор X је настао од тетраедра (површи тетраедра) идентификацијом ивица описаном на слици, а $A \subset X$ је „база” тетраедра са наслеђеном идентификацијом.

X :


A :


(а) Одредити хомолошке групе простора X.
(б) Одредити релативне хомолошке групе $H_n(X, A)$, $n \in \mathbb{N}_0$.
(в) Да ли је A ретракт простора X?

32. Дат је простор X (в. слику).

X :


(а) Наћи неку CW-декомпозицију простора X са тачно једном 2-ћелијом.
(б) Одредити хомолошке групе $H_n(X)$, $n \in \mathbb{N}_0$.
(в) Ако је X^1 1-скелет простора X (реч је о CW-декомпозицији добијеној под (а)), $p : X \twoheadrightarrow X/X^1$ природна сурјекција, $h : X/X^1 \xrightarrow{\approx} S^2$ неки хомеоморфизам и $f : S^2 \to X$ произвољно (непрекидно) пресликавање, одредити $\deg(h \circ p \circ f)$.

33. Простор X је настао од кружнице S^1 лепљењем две 2-ћелије помоћу пресликавања степена 2 и 3 (редом).

(а) Одредити хомолошке групе $H_n(X)$, $n \in \mathbb{N}_0$.
(б) Да ли је (полазна) кружница S^1 ретракт простора X?
(в) Да ли је $X \simeq S^2$?

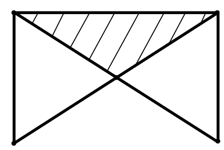
34. Нека су $k, n \in \mathbb{N}$ и $k < n$. Израчунати хомолошке групе простора X који се добије од сфере S^n антиподалном идентификацијом тачака сфере S^k димензије k (природно утопљене у S^n).

35. Нека су $n \in \mathbb{N}$, X CW-комплекс и A његов поткомплекс који садржи све ћелије у X димензије веће од n. Доказати да инклузија $i : A \hookrightarrow X$ индукује мономорфизам $i_* : H_n(A) \rightarrowtail H_n(X)$, као и да је $i_*(H_n(A))$ директан сабирак у $H_n(X)$ (да постоји подгрупа G групе $H_n(X)$ таква да је $H_n(X) = i_*(H_n(A)) \oplus G$).

36. Нека су K и L (коначни) симплицијални комплекси такви да је $\dim K < \dim L$.

(а) Да ли може постојати непрекидна сурјекција $f : |K| \to |L|$?
(б) Доказати да је свако (непрекидно) пресликавање $f : |K| \to |L|$ хомотопно неком које није „на".
(в) Ако је $n < m$, доказати да је свако (непрекидно) пресликавање $f : S^n \to S^m$ хомотопски тривијално.

37. Одредити симплицијалне хомолошке групе симплицијалног комплекса K (в. слику).

K :


38. Ако је $f : \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^3$ непрекидно пресликавање без фиксних тачака, доказати да је за свако $i \in \mathbb{Z}$ хомоморфизам $f_* : H_i(\mathbb{R}\mathrm{P}^3) \to H_i(\mathbb{R}\mathrm{P}^3)$ једнак идентитети на $H_i(\mathbb{R}\mathrm{P}^3)$.

39. Конструисати ћелијске комплексе X и Y који нису међусобно хомеоморфни, а да важи:

$$H_i(X) \cong H_i(Y) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0 \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4, & i = 1 \\ 0, & i \neq 0, 1 \end{cases}.$$

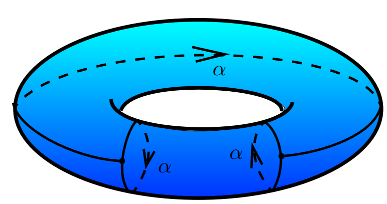
Да ли је могуће одабрати X и Y тако да један од њих има, а други нема својство фиксне тачке?

40. Нека је $k \in \mathbb{N}$ и $f : \mathbb{C}^{2k} \to \mathbb{C}^{2k}$ функција дата са $f(z_1, z_2, \ldots, z_{2k-1}, z_{2k}) = (-\overline{z_2}, \overline{z_1}, -\overline{z_4}, \overline{z_3}, \ldots, -\overline{z_{2k}}, \overline{z_{2k-1}})$.
(а) Доказати да за свако $z \in \mathbb{C}^{2k}$ и за свако $\lambda \in \mathbb{C}$ важи $f(\lambda z) = \overline{\lambda} f(z)$, као и да је $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.
(б) Доказати да f индукује непрекидно пресликавање $\bar{f} : \mathbb{C}\mathrm{P}^{2k-1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{2k-1}$.
(в) Да ли $\mathbb{C}\mathrm{P}^{2k-1}$ има својство фиксне тачке?
(г) Доказати да је за бар једно $j \in \{1, 2, \ldots, 2k-1\}$ хомоморфизам $\bar{f}_* : H_{2j}(\mathbb{C}\mathrm{P}^{2k-1}) \to H_{2j}(\mathbb{C}\mathrm{P}^{2k-1})$ множење негативним бројем.
(д) У случају $k = 1$ одредити $\deg \bar{f}$ ($\bar{f} : \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$, $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \approx S^2$).

41. (а) Конструисати простор X такав да је $H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, 4 \\ \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5, & n = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$.
(б) Одредити $H_n(X; \mathbb{Z}_5)$, $n \geqslant 0$.
(в) Одредити $H_4(X \times S^3; \mathbb{Z}_2)$.

42. Простор X је задат као количник торуса (в. слику десно).

(а) Одредити $H_n(X)$ за све $n \in \mathbb{N}_0$.
(б) Одредити $H_n(X; \mathbb{Z}_2)$ за све $n \in \mathbb{N}_0$.

X :


43. Нека је K Клајнова флаша.

(а) Израчунати $H_k(K^2)$, $k \in \mathbb{Z}$.
(б) Израчунати $H_2(K^n)$, $n \in \mathbb{N}$.
(в) Израчунати $H_2(K^n; \mathbb{Z}_p)$, $n \in \mathbb{N}$, где је p прост број.

44. (а) За $m \geqslant 2$ доказати да је $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Q} = 0$ и $\operatorname{Tor}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Q}) = 0$.

Нека је X тополошки простор за који је дефинисана Ојлерова карактеристика (све групе $H_i(X)$, $i \in \mathbb{N}_0$, јесу коначно генерисане, а $H_i(X) = 0$ за довољно велико i).

(б) Доказати да за свако $i \in \mathbb{N}_0$ важи $H_i(X; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}^{\beta_i}$, где је β_i i-ти Бетијев број простора X (дакле, $H_i(X; \mathbb{Q})$ има структуру векторског простора над пољем $\mathbb{Q}$), као и да је

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim H_i(X; \mathbb{Q}).$$

(в) Ако је p прост број, доказати да за свако $i \in \mathbb{N}_0$ важи $H_i(X; \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p^{\gamma_i}$, за неко $\gamma_i \in \mathbb{N}_0$ (дакле, $H_i(X; \mathbb{Z}_p)$ има структуру векторског простора над пољем $\mathbb{Z}_p$), као и да је

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim H_i(X; \mathbb{Z}_p).$$

45. Да ли је $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^6 \approx \mathbb{R}\mathrm{P}^4 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^4$?

46. Одредити за које $m, n \in \mathbb{N}$ је тачно наредно тврђење: ако је $f : D^n \to \mathbb{R}^m$ непрекидно пресликавање такво да за све $x \in \partial D^n$ важи $f(-x) = -f(x)$, онда постоји тачка $x_0 \in D^n$ таква да је $f(x_0) = 0$.

47. *Степен* монома $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$, $a_i \in \mathbb{N}_0$, дефинишемо као суму $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Кажемо да је полином $p \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *хомоген степена* m ако су сви мономи који се у њему јављају (са ненула коефицијентом) степена m.

Нека су $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1} \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ хомогени полиноми непарног степена (које видимо и као полиномијалне функције $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n-1}$). Доказати да постоји права $L \subset \mathbb{R}^n$ која пролази кроз координатни почетак (једнодимензиони потпростор векторског простора $\mathbb{R}^n$) таква да се сви полиноми f_i, $i = \overline{1, n-1}$, анулирају на L ($(\forall i)\ f_i|_L \equiv 0$).

48. (а) Ако је $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ отворен покривач нормалног простора X, доказати да постоји отворен покривач $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ простора X такав да је $\overline{V}_i \subseteq U_i$ за све $i = \overline{1, n}$.

(б) Доказати да постоји $n+2$ затворених скупова $F_1, F_2, \ldots, F_{n+2}$ на сфери S^n ($n \in \mathbb{N}_0$) таквих да је $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n+2} F_i = S^n$ и да ниједан од њих не садржи пар антиподалних тачака $\big(\{x, -x\} \nsubseteq F_i$ за све $x \in S^n$ и све $i = \overline{1, n+2}\big)$.

(в) Доказати да су за свако $n \in \mathbb{N}$ наредна четири тврђења међусобно еквивалентна.

(1) За свако непрекидно пресликавање $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ постоји тачка $x \in S^n$ таква да је $f(x) = f(-x)$ (Борсук–Уламова теорема).

(2) За сваки покривач сфере S^n са $n+1$ затворених скупова $F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}$ постоји бар један од тих скупова који садржи пар антиподалних тачака.

(3) За сваки покривач сфере S^n са $n+1$ отворених скупова $U_1, U_2, \ldots, U_{n+1}$ постоји бар један од тих скупова који садржи пар антиподалних тачака (Љустерник–Шнирелманова теорема).

(4) За сваки покривач сфере S^n са $n+1$ скупова $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$, од којих је сваки отворен или затворен, постоји бар један од тих скупова који садржи пар антиподалних тачака.

49. (а) Нека су $A_1, A_2, \ldots, A_n$ затворени подскупови сфере S^n такви да је $A_i \cap (-A_i) = \emptyset$ за све $i = \overline{1, n}$. Доказати да је тада $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \big(A_i \cup (-A_i)\big) \neq S^n$.

(б) Доказати Борсук–Уламову теорему помоћу тврђења (а).