Задаци из Топологије Б

1. Ако су X и Y тополошки простори, $A \subseteq X$ и $f : A \to Y$ непрекидно пресликавање, доказати да је

$$S(X \cup_f Y) \approx SX \cup_{Sf} SY$$

($Sf : SA \to SY$ је суспензија пресликавања f, а суспензију SA видимо као потпростор суспензије SX).

2. Ако су X и Y Хауздорфови простори и $f : X \to Y$ непрекидно пресликавање, доказати да су онда и цилиндар и конус пресликавања f (M_f и C_f) такође Хауздорфови простори.

3. Нека је X простор и $x_0 \in X$ базна тачка (тад кажемо да је (X, x_0) *простор с базном тачком*). Дефинишемо *редуковану суспензију* простора X као количнички простор $\Sigma X := (X \times I)/(X \times \{0,1\} \cup \{x_0\} \times I)$.

Нека је још и (Y, y_0) простор с базном тачком и $f : X \to Y$ непрекидно пресликавање такво да је $f(x_0) = y_0$.

(а) Доказати да је са $\Sigma f([x,t]) := [f(x), t]$ исправно дефинисано непрекидно пресликавање $\Sigma f : \Sigma X \to \Sigma Y$.

Нека је сад и (Z, z_0) простор с базном тачком. Дефинишемо *редуковани производ* (*smash product*) простора X и Z као следећи количнички простор $X \wedge Z := (X \times Z)/(X \times \{z_0\} \cup \{x_0\} \times Z)$.

(б) Ако је још и (W, w_0) простор с базном тачком и $g : Z \to W$ непрекидно пресликавање такво да је $g(z_0) = w_0$, доказати да је са $(f \wedge g)([x,z]) := [f(x), g(z)]$ исправно дефинисано непрекидно пресликавање $f \wedge g : X \wedge Z \to Y \wedge W$.

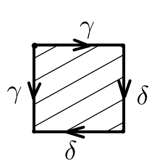
(в) Доказати да је пресликавање $h_X : \Sigma X \to S^1 \wedge X$, дато са $h_X([x,t]) := [e^{i2\pi t}, x]$, хомеоморфизам (базна тачка у S^1 је $\mathbf{1} = e^{i0}$).

(г) Доказати да следећи дијаграм комутира.

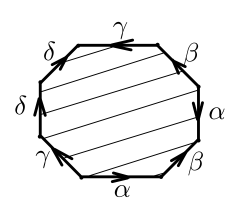
$$\begin{tikzcd}
\Sigma X \arrow[r, "\Sigma f"] \arrow[d, "h_X"', "\approx"] & \Sigma Y \arrow[d, "\approx"', "h_Y"] \\
S^1 \wedge X \arrow[r, "\mathbf{1}_{S^1} \wedge f"] & S^1 \wedge Y
\end{tikzcd}$$

4. (а) Доказати да је количнички простор са прве (леве) слике хомеоморфан пројективној равни.

(б) Доказати да је простор X (слика десно) хомеоморфан некој затвореној површи и одредити ту површ (одредити њен род и утврдити да ли је оријентабилна).

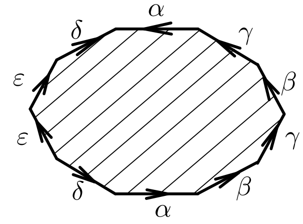


X :



5. Доказати да је простор X хомеоморфан некој затвореној површи и одредити ту површ (одредити њен род и утврдити да ли је оријентабилна).

X :



6. Нека су $f : X \to Y \times Z$ и $g : X \to Y \times Z$ непрекидна пресликавања и нека су $p_1 : Y \times Z \to Y$ и $p_2 : Y \times Z \to Z$ пројекције. Доказати да је $f \simeq g$ ако и само ако је $p_1 \circ f \simeq p_1 \circ g$ и $p_2 \circ f \simeq p_2 \circ g$.

7. Нека је Y путно повезана тополошка група (операција групе и инверз јесу непрекидна пресликавања) и $e \in Y$ њен неутрал. Нека је још X тополошки простор и $x_0 \in X$.

(а) Ако је $f : X \to Y$ непрекидно пресликавање, доказати да постоји непрекидно пресликавање $g : X \to Y$ такво да је $f \simeq g$ и $g(x_0) = e$.

(б) Ако су $f, g : X \to Y$ непрекидна пресликавања таква да је $f(x_0) = g(x_0) = e$, доказати да важи еквиваленција

$$f \simeq g \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \simeq g \quad (\mathrm{rel}\{x_0\}).$$

8. Нека је X повезан тополошки простор и $f, g : X \to S^n$ два непрекидна пресликавања. Ако пресликавање f није хомотопно ни са g ни са $-g$, доказати да постоји $x_0 \in X$ такво да је $f(x_0) \perp g(x_0)$.

9. (а) Ако је X путно повезан простор и $X \simeq Y$, доказати да је и Y путно повезан. (Другим речима, доказати да је путна повезаност хомотопска инваријанта.)

Нека је $\pi_0(X) := \{P_x \mid x \in X\}$ скуп свих компонената путне повезаности простора X (са P_x је означена компонента која садржи тачку x). За непрекидно пресликавање $f : X \to Y$, дефинишимо $f_*(P_x) := P_{f(x)}$, $x \in X$.

(б) Доказати да је овим исправно дефинисана функција $f_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$.

(в) Ако је f хомотопска еквиваленција, доказати да је f_* бијекција.

10. Ако је $n \in \mathbb{N}$, доказати да је $D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I$ јаки деформациони ретракт од $D^n \times I$.

11. (а) Нека је X тополошки простор и $C \subseteq A \subseteq X$. Ако је A јаки деформациони ретракт од X и C јаки деформациони ретракт од A, доказати да је онда C јаки деформациони ретракт од X.

(б) Нека је X тополошки простор и A и B његови затворени потпростори такви да је $A \cup B = X$. Ако је $A \cap B$ јаки деформациони ретракт од B, доказати да је онда A јаки деформациони ретракт од X.

(в) Нека је сад $n \in \mathbb{N}$ и $I^n \subset \mathbb{R}^n$ n-димензиона коцка. За $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $j \in \{0, 1\}$ означимо са $I^{n-1}_{(k,j)} = \{x \in I^n \mid x_k = j\}$ одговарајућу страну коцке. Ако је

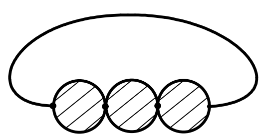
$$A := I^{n-1}_{(n,0)} \cup \bigcup_{(k,j)\in\Lambda} I^{n-1}_{(k,j)},$$

где је $\Lambda \subseteq \{1, 2, \ldots, n-1\} \times \{0, 1\}$ (дакле, A садржи доњу базу коцке и евентуално још неколико бочних страна; не садржи горњу базу!), доказати да је A јаки деформациони ретракт од I^n. (Може се, без доказивања, користити чињеница да за $n \geqslant 2$ постоји хомеоморфизам $h : D^{n-1} \times I \to I^n$ такав да је $h(D^{n-1} \times \{0\} \cup S^{n-2} \times I) = I^{n-1}_{(n,0)} \cup \bigcup_{k=1}^{n-1} \bigcup_{j=0}^{1} I^{n-1}_{(k,j)}$.)

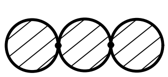
12. Нека је $GL_n(\mathbb{R})$ простор свих инвертибилних матрица реда n с топологијом наслеђеном од еуклидског простора $\mathbb{R}^{n^2}$. Доказати да је скуп свих ортогоналних матрица $O(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}$ јаки деформациони ретракт простора $GL_n(\mathbb{R})$.

13. Дат је простор X и три његова потпростора.

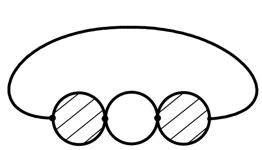
X :



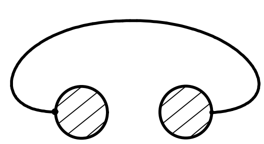
(1)



(2)



(3)



(а) Који од ових потпростора су ретракти од X?

(б) Који од ових потпростора имају СФТ?

(в) Доказати да је $X \simeq S^1$.

(г) Да ли X има СФТ?

14. (а) Нека је $z_0 \in \mathbb{C} \setminus S^1$ и $f_0 : S^1 \to S^1$ пресликавање дато са $f_0(z) := \frac{z - z_0}{|z - z_0|}$. Ако је $|z_0| > 1$, доказати да је $f_0 \simeq \mathrm{const}$, а ако је $|z_0| < 1$, доказати да је $f_0 \simeq \mathbf{1}_{S^1}$.

(б) Нека је p полином са комплексним коефицијентима који нема нула на кружници S^1 и нека је $f : S^1 \to S^1$ пресликавање дато са $f(z) := \frac{p(z)}{|p(z)|}$. Доказати да је f хомотопски тривијално ако и само ако полином p нема нула у диску D^2.

15. Ако је $S^2_+ = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \geqslant 0\}$, $S^2_- = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \leqslant 0\}$ и $f : S^2_+ \to S^2_-$ непрекидно пресликавање, доказати да постоји тачка $P \in S^2_+$ таква да је вектор $\overrightarrow{Pf(P)}$ паралелан са z-осом (подразумевамо да је нула-вектор паралелан са сваком правом).

16. (а) Означимо са $E_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geqslant 0\}$ затворени први октант у $\mathbb{R}^3$ и нека је $B_1 := S^2 \cap E_1$. Ако је $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ непрекидно пресликавање такво да је $f(B_1) \subseteq E_1 \setminus \{\mathbf{0}\}$, доказати да постоји $v_0 \in B_1$ такво да је $f(v_0) = \|f(v_0)\| \cdot v_0$.

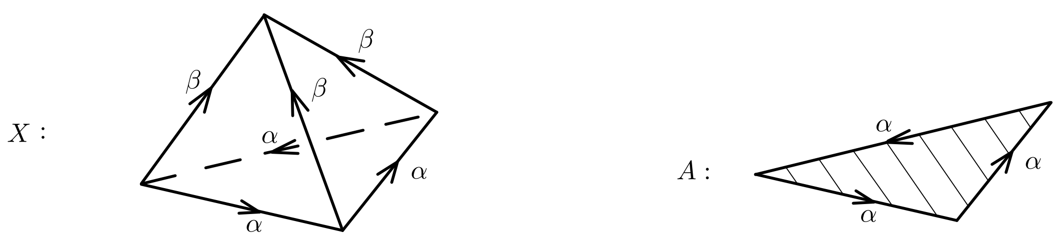
(б) Ако је A регуларна квадратна матрица реда 3 ($A \in GL_3(\mathbb{R})$) чије су све компоненте ненегативне ($a_{ij} \geqslant 0$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$), доказати да A има бар једну позитивну сопствену вредност.

17. Нека је X (путно повезан) простор са коначном фундаменталном групом и $f : X \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ непрекидно пресликавање које индукује нетривијалан хомоморфизам фундаменталних група ($f_* \neq 0$). Доказати да је f „на”.

18. Нека је X тополошки простор. Доказати да су следећи искази међусобно еквивалентни.

(1) X је контрактибилан.
(2) За произвољан тополошки простор Y важи $X \times Y \simeq Y$.
(3) $X \times S^1 \simeq S^1$.

19. Простор X је настао од тетраедра (површи тетраедра) идентификацијом ивица описаном на слици. Нека је A основа тетраедра са наслеђеном идентификацијом.



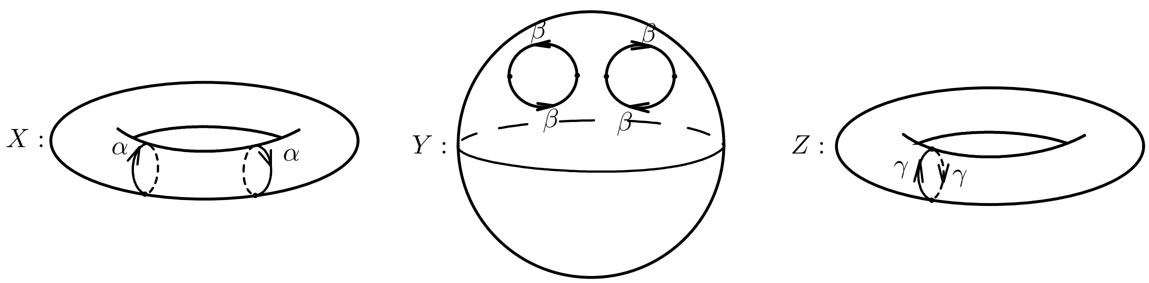
(а) Наћи $\pi_1(X)$.
(б) Да ли је A ретракт од X?

20. (а) Ако је A потпростор простора X, доказати да је $(X \times Y)/(A \times Y) \simeq X/A$ за сваки контрактибилан простор Y.

(б) Примером показати да количнички простори из дела (а) не морају бити хомотопски еквивалентни ако Y није контрактибилан.

21. Нека је $S \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^2$, $|S| = 3$. Наћи $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \setminus S)$ и $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2 / S)$.

22. Дати су простори X, Y и Z (X и Z су количници торуса, а Y је добијен тако што су са сфере избачена два отворена диска па на рубу добијене површи уведена назначена идентификација).

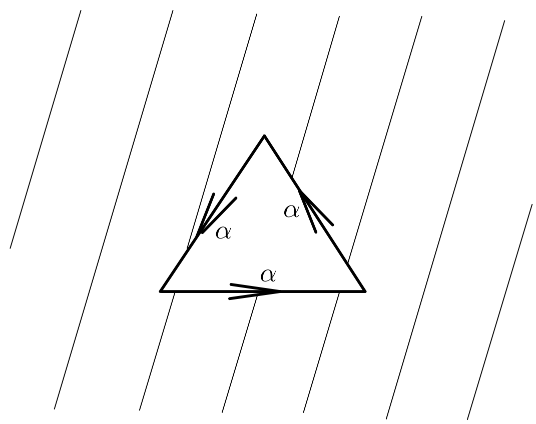


(а) Одредити фундаменталне групе ових простора.

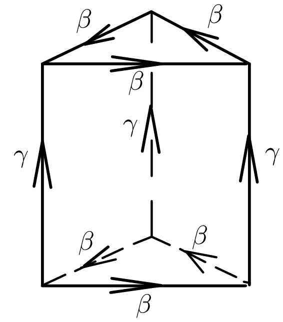
(б) Да ли међу овим просторима има хомеоморфних?

23. Простор X је добијен тако што је из равни избачен један отворен троугао и на рубу добијене површи уведена назначена идентификација. Простор Y је количник површи тростране призме са назначеном идентификацијом ивица, а Z је доња база те призме са наслеђеном идентификацијом.

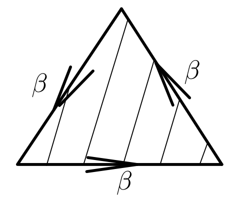
X :



Y :



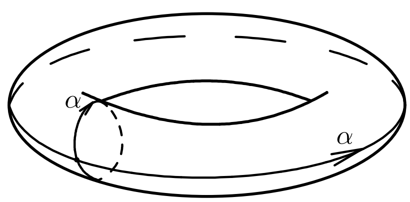
Z :



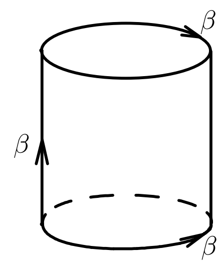
(а) Наћи фундаменталне групе ових простора.
(б) Да ли је кружница α ретракт простора X? Да ли је α деформациони ретракт простора X?
(в) Да ли је Z ретракт простора Y? Да ли је Z деформациони ретракт простора Y?
(г) Да ли је кружница β ретракт простора Z? Да ли је β деформациони ретракт простора Z?

24. Простор X је количник торуса, а Y је количник цилиндра (в. слику).

X :



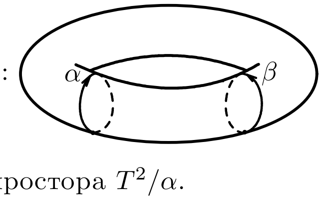
Y :



(а) Да ли је $X \approx Y$? Да ли је $Y \approx \mathbb{RP}^2$?
(б) Да ли је кружница α ретракт простора X?
(в) Да ли је кружница β ретракт простора Y?

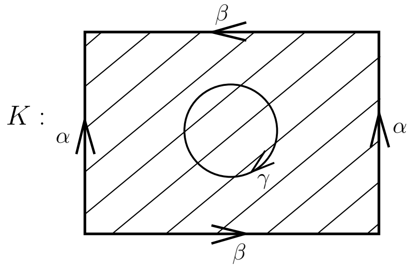
25. На торусу T^2 уочена су два меридијана (две кружнице) α и β.

T^2 :



(а) Одредити фундаменталну групу простора T^2/α.
(б) Одредити фундаменталну групу простора који настаје колабирањем кружница α и β (сваке понаособ), тј. простора $(T^2/\alpha)/\beta$.
(в) Одредити фундаменталну групу простора $T^2/(\alpha \cup \beta)$.
(г) Да ли је β ретракт простора T^2/α?

26. На Клајновој боци K уочене су кружнице α, β и γ.



(а) Које од ових кружница су ретракти од K?
(б) Да ли је нека од ових кружница деформациони ретракт од K?

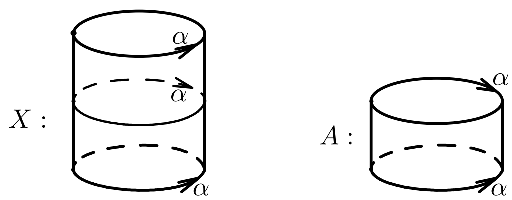
27. Простори X и Y су добијени од торуса са кога су избачена два отворена диска идентификацијама на рубу (в. слику).

(а) Одредити $\pi_1(X)$ и $\pi_1(Y)$.
(б) Испитати да ли је кружница α ретракт простора X.
(в) Испитати да ли је кружница β ретракт простора Y.
(г) Испитати да ли је X хомеоморфан некој затвореној површи и, у случају да јесте, одредити ту површ (утврдити да ли је оријентабилна и одредити јој род). Исто и за Y.

28. Простор X је количнички простор торуса са кога је избачен један отворен диск. И простор Y је добијен на исти начин (в. слику).

(а) Наћи фундаменталне групе ових простора.
(б) Да ли је $X \approx Y$? Да ли је $X \simeq Y$?
(в) Да ли је кружница β ретракт простора X?

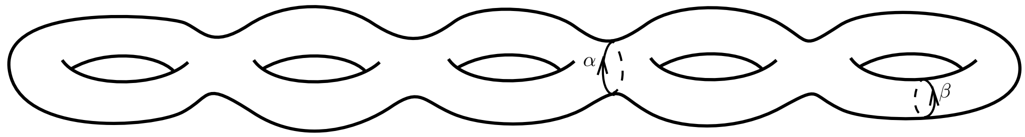
29. Простор X је количник цилиндра $C = S^1 \times I$ (в. слику).



(а) Одредити фундаменталну групу простора X.
(б) Испитати да ли је X хомеоморфан некој затвореној површи и, у случају да јесте, одредити ту површ (утврдити да ли је оријентабилна и одредити јој род).
(в) Ако је A „доња половина” овог цилиндра са наслеђеном идентификацијом, испитати да ли је A ретракт простора X.

30. На оријентабилној површи рода g уочена је кружница α која настаје као пресек ове површи са равни таквом да се h „ручки" налази са једне стране равни, а $g-h$ „ручки" са друге, $0<h<g$ (на слици је представљен случај $g=5$, $h=3$). Нека је β кружница „око једне ручке" (в. слику).

M_5 :



(а) Да ли је α ретракт површи M_g?
(б) Да ли је β ретракт површи M_g?

31. (а) Дате су три кружнице у еуклидском простору $\mathbb{R}^3$:

$$k_1 := \{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1\},\quad k_2 := \{(x,y,1)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1\},\quad k_3 := \{(0,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (y-1)^2+z^2=1\}.$$

Одредити следеће фундаменталне групе: $\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus k_1)$, $\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus(k_1\cup k_2))$, $\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus(k_1\cup k_3))$, $\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus(k_2\cup k_3))$ и $\pi_1(\mathbb{R}^3/k_1)$.

(б) Ако је $0\leqslant k<n$ и ако је $S^k := \{(x_1,x_2,\dots,x_{k+1},0,\dots,0)\in\mathbb{R}^n \mid x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{k+1}^2=1\}$, одредити $\pi_1(\mathbb{R}^n/S^k)$.

32. Нека је $p:E\to B$ наткривање. Доказати наредних пет тврђења.

(а) Ако E има својство T_1, онда и B има то својство.
(б) Ако E има својство T_2 и ако је $p^{-1}(b)$ коначан скуп за све $b\in B$, онда и B има својство T_2.
(в) Ако је E компактан T_2-простор, онда је и B компактан T_2-простор.
(г) Ако је B многострукост, онда је и E многострукост (исте димензије као и B).
(д) Ако је E затворена многострукост, онда је и B затворена многострукост (исте димензије као и E).

33. Дат је Хауздорфов простор X и коначна група G (са неутралом e) која слободно дејствује на X. Нека је, за $g\in G$, са $\widetilde{g}:X\to X$ означен одговарајући хомеоморфизам. Нека је још X/G простор орбита овог дејства ($X/G := X/\!\sim$, при чему је $x\sim y$ ако и само ако је $y=\widetilde{g}(x)$ за неко $g\in G$).

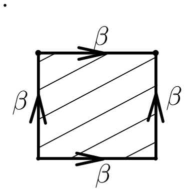
(а) Доказати да за свако $x\in X$ постоји његова отворена околина U таква да је $U\cap\widetilde{g}(U)=\emptyset$ за све $g\in G\setminus\{e\}$.
(б) Доказати да за околину U из дела (а) важи да је $\widetilde{g}_1(U)\cap\widetilde{g}_2(U)=\emptyset$ за све $g_1,g_2\in G$ такве да је $g_1\neq g_2$.
(в) Доказати да је природна сурјекција $\pi:X\to X/G$ наткривајуће пресликавање.
(г) Ако је X просто повезан, доказати да је $\pi_1(X/G)\cong G$.

34. (а) Наћи нека два међусобно нехомеоморфна простора X и Y таква да је $\pi_1(X)\cong\pi_1(Y)\cong\mathbb{Z}_4$.
(б) Да ли је могуће (у делу (а)) одабрати просторе X и Y тако да постоји наткривање $p:X\to Y$?
(в) Наћи неки простор Z такав да је $\pi_1(Z)\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$.
(г) Да ли је могуће (у деловима (а) и (в)) одабрати просторе X и Z тако да постоји наткривање $q:X\to Z$?

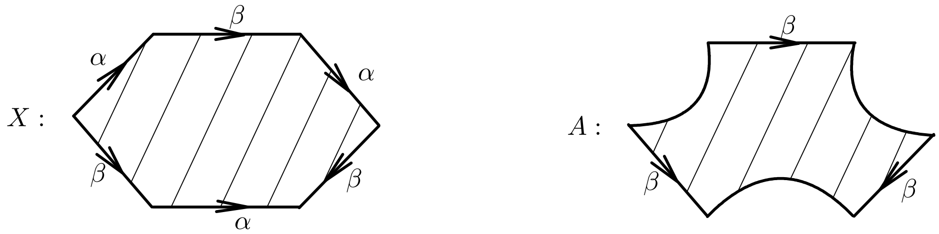
35. Испитати да ли постоји наткривање: (а) $S^2\times\mathbb{R}^2\to S^2\times T^2$; (б) $S^2\times T^2\to S^2\times\mathbb{R}^2$; (в) $S^2\times S^2\to S^2\times T^2$; (г) $S^2\times T^2\to S^2\times S^2$.

36. Ако је Y количник квадрата представљен на доњој слици, а X количнички простор из 29. задатка, испитати да ли постоји наткривање $p:X\to Y$.

Y :

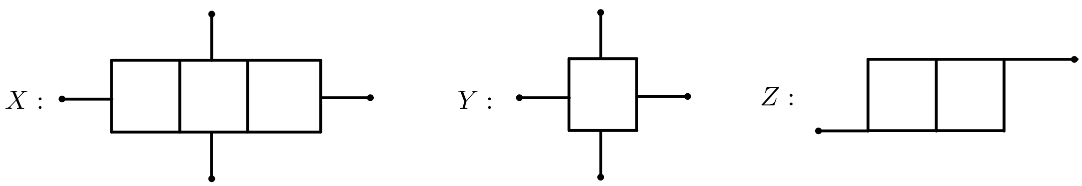


37. Дат је количнички простор X и његов потпростор A (са наслеђеном идентификацијом).

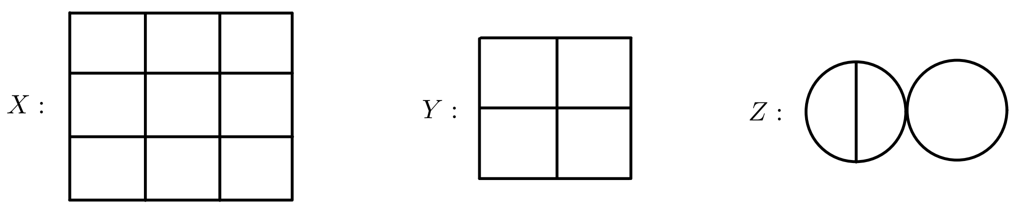


(а) Да ли је A ретракт од X?
(б) Одредити $\pi_1(X/A)$.
(в) Да ли је $X/A \simeq S^2 \vee S^2$?
(г) Постоји ли наткривање $p : X/A \to D^2$?

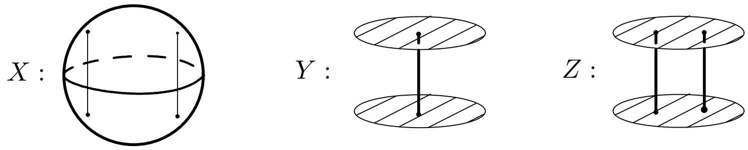
38. Дати су простори X, Y и Z (потпростори еуклидске равни). Одредити фундаменталне групе ових простора и утврдити да ли постоји наткривање: (а) $X \to Y$; (б) $X \to Z$; (в) $Y \to Z$.



39. Дати су простори X, Y и Z (потпростори еуклидске равни). За свака два од ова три простора испитати да ли постоји наткривање из једног у други.



40. Простор X се састоји од сфере и две њене паралелне тетиве, а простори Y и Z од по два отворена диска и једне (односно две) дужи која повезује дискове (в. слику).



За свака два од ова три простора испитати да ли постоји наткривање из једног у други.

41. (а) Испитати да ли постоји наткривање $p : \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \vee S^2 \to S^2 \vee S^2$.
(б) Испитати да ли постоји наткривање $q : S^2 \vee S^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \vee S^2$.

42. (а) Нека су $g, h \in \mathbb{N}_0$. Ако је $n \in \mathbb{N}$ такво да је $g-1 = n(h-1)$, доказати да постоји n-лисно наткривање $M_g \to M_h$.
(б) Нека су $g, h \in \mathbb{N}$. Ако је $n \in \mathbb{N}$ такво да је $g-2 = n(h-2)$, доказати да постоји n-лисно наткривање $N_g \to N_h$.
(в) Нека је $g \in \mathbb{N}_0$ и $h \in \mathbb{N}$. Ако је $n \in \mathbb{N}$ такво да је $g-1 = n(h-2)$, доказати да постоји $2n$-лисно наткривање $M_g \to N_h$.

43. Нека је $f : S^1 \to S^1$ хомотопски тривијално пресликавање.

(а) Доказати да постоји $z_0 \in S^1$такво да је $f(z_0) = -z_0$.
(б) Доказати да постоји $w_0 \in S^1$ такво да је $f(w_0) = f(-w_0)$.

44. Ако је Z количнички простор из 23. задатка, доказати да је свако (непрекидно) пресликавање $f : Z \to T^2$ хомотопски тривијално.

45. За тополошки простор X кажемо да је *H-простор* (или *јаки H-простор*) уколико постоји непрекидна бинарна операција $\mu : X \times X \to X$ са обостраним неутралом $e \in X$: $\mu(e, x) = \mu(x, e) = x$ за све $x \in X$ (не захтевамо асоцијативност операције μ, нити постојање инверза). Као што је уобичајено, пресликавање $I \to X \times X$ чије су координатне функције f и g означавамо са (f, g) (то је тзв. *сужени производ* пресликавања f и g).

(а) Ако је X H-простор са операцијом μ и неутралом e, $u, v : I \to X$ две петље у тачки e и $c_e : I \to X$ константна петља у тачки e, доказати да је

$$\mu \circ (u \cdot c_e, c_e \cdot v) = u \cdot v,$$

где је са $\cdot$ означена операција надовезивања петљи.

(б) Ако је X H-простор са операцијом μ и неутралом e, $\mu_* : \pi_1\big(X \times X, (e, e)\big) \to \pi_1\big(X, e\big)$ индуковани хомоморфизам и $u, v : I \to X$ две петље у тачки e, доказати да је

$$\mu_*[(u, v)] = [u] * [v],$$

где је са $*$ означена операција фундаменталне групе $\pi_1\big(X, e\big)$.

(в) Нека је $p : E \to B$ наткривање, при чему је E повезан и локално путно повезан простор. Ако је B H-простор, доказати да је онда и E H-простор.

46. (а) Ако су $F_1, F_2, F_3 \in \mathcal{F}_{S^2}$ и $F_1 \cup F_2 \cup F_3 = S^2$, доказати да постоје $i \in \{1, 2, 3\}$ и $x \in S^2$ такви да је $\{x, -x\} \subseteq F_i$ (другим речима, сфера S^2 се не може покрити трима затвореним скуповима тако да ниједан од њих не садржи пар антиподалних тачака).

(б) Да ли се сфера S^2 може покрити трима отвореним скуповима тако да ниједан од њих не садржи пар антиподалних тачака?

(в) Доказати да се сфера S^2 може покрити са четири отворена скупа тако да ниједан од њих не садржи пар антиподалних тачака.

(г) Да ли се сфера S^2 може покрити са четири затворена скупа тако да ниједан од њих не садржи пар антиподалних тачака?

47. Нека је $K \subset \mathbb{R}^3$ компактан, конвексан скуп с непразном унутрашњошћу и глатком границом $S = \partial K$. Означимо са T_xS тангентну раван на површ S у тачки $x \in S$, али транслирану тако да $x \in T_xS$ (дакле, T_xS је афини потпростор од $\mathbb{R}^3$), и претпоставимо да за сваку тачку $x \in S$ важи да је $S \cap T_xS = \{x\}$ (површ S нема „равних” делова).

Ако је $\overrightarrow{u}$ било који вектор у $\mathbb{R}^3$, доказати да постоје различите тачке $x_0, y_0 \in S$ такве да је вектор $\overrightarrow{x_0y_0}$ колинеаран са $\overrightarrow{u}$, а тангентне равни $T_{x_0}S$ и $T_{y_0}S$ међусобно паралелне.