КОХОМОЛОГИЈА (задаци за испит)

1. Нека је R комутативан прстен (с јединицом). Ако је M слободан R-модул ранга 1 (тј. слободан цикличан R-модул) и $\{m_0\}$ једна његова база, онда пишемо $M = R\langle m_0\rangle$.

(а) Нека је M R-модул и $m_0 \in M$. Доказати да је $M = R\langle m_0\rangle$ ако и само ако постоји изоморфизам R-модула $\varphi : R \to M$ такав да је $\varphi(1) = m_0$ (спољно множење у R-модулу R дефинисано је помоћу унутрашњег множења у прстену R: $rs := r \cdot s$, $r, s \in R$).

(б) Ако су M и N слободни циклични R-модули и $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, доказати да су следећа четири услова међусобно еквивалентна:

(1) f је епиморфизам;
(2) f је изоморфизам;
(3) ако је $M = R\langle m_0\rangle$, онда је $N = R\langle f(m_0)\rangle$;
(4) $\mathrm{Hom}_R(M, N) = R\langle f\rangle$.

2. Нека је X путно повезан простор и R комутативан прстен такав да је градирани R-модул $H^*(X; R)$ коначног типа и слободан у свим димензијама ($H^n(X; R)$ је слободан R-модул за све $n \in \mathbb{N}_0$).

(а) Ако је и Y путно повезан простор, $i_1 : X \hookrightarrow X \times Y$ утапање дато са $i_1(x) = (x, y_0)$, $x \in X$ (за неко $y_0 \in Y$), и слично, $i_2 : Y \hookrightarrow X \times Y$, $i_2(y) = (x_0, y)$, $y \in Y$ (за неко $x_0 \in X$), доказати да се свака позитивно димензионална класа $a \in H^*(X \times Y; R)$ може представити у облику

$$a = i_1^*(a) \times 1 + 1 \times i_2^*(a) + \sum_i a_i' \times a_i'',$$

где су $a_i' \in H^*(X; R)$ и $a_i'' \in H^*(Y; R)$ неке позитивно димензионалне класе (сума у овој једнакости је коначна, а може бити и празна, тј. једнака нули).

(б) Ако је X (слаби) H-простор, уочимо хомоморфизам градираних R-алгебри $\Delta : H^*(X; R) \to H^*(X; R) \otimes_R H^*(X; R)$ дат као композиција

$$H^*(X; R) \xrightarrow{\mu^*} H^*(X \times X; R) \xleftarrow{\times} H^*(X; R) \otimes_R H^*(X; R),$$

где је $\mu : X \times X \to X$ операција H-простора, а $\times$ „крос” производ (који је изоморфизам по Кинетовој формули). Доказати да за сваку позитивно димензионалну класу $\alpha \in H^*(X; R)$ постоје позитивно димензионалне класе $\alpha_i', \alpha_i'' \in H^*(X; R)$ такве да је

$$\Delta(\alpha) = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha + \sum_i \alpha_i' \otimes \alpha_i''.$$

Напомена: Тврђење (б) овог задатка заправо казује да је, под наведеним условима, $H^*(X; R)$ једна (повезана) *Хопфова алгебра* (отуда и слово „Х” у називу H-простора).

3. (а) Нека су X и Y путно повезани простори с базним тачкама $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ таквим да су парови (X, x_0) и (Y, y_0) добри и нека је $j : X \vee Y \hookrightarrow X \times Y$ природно утапање ($j(X \vee Y) = X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$). Ако је R комутативан прстен (с јединицом) такав да је бар један од градираних R-модула $H^*(X; R)$ и $H^*(Y; R)$ коначног типа и слободан у свим димензијама, и ако је $\widetilde{H}^k(X; R) = 0$ за све $k < m$ и $\widetilde{H}^k(Y; R) = 0$ за све $k < n$ ($m, n \in \mathbb{N}$), доказати је $j^* : H^k(X \times Y; R) \to H^k(X \vee Y; R)$ изоморфизам за све $k < m + n$.

(б) За које $m, n \in \mathbb{N}_0$ је $S^m \vee S^n$ ретракт од $S^m \times S^n$?

4. Нека је X CW-комплекс и R комутативан прстен с јединицом. За $p \in \mathbb{N}_0$ дефинишемо

$$F^pH^* := \ker\big(H^*(X; R) \to H^*(X^{p-1}; R)\big),$$

где је X^{p-1} $(p-1)$-скелет од X (подразумевамо да је $X^{-1} = \emptyset$), а морфизам у загради индукован инклузијом $X^{p-1} \hookrightarrow X$.

(а) Доказати да је $\{F^pH^*\}_{p \in \mathbb{N}_0}$ једна *филтрација* R-модула $H^*(X; R)$, тј. да важи

$$H^*(X; R) = F^0H^* \supseteq F^1H^* \supseteq F^2H^* \supseteq \cdots \supseteq F^pH^* \supseteq F^{p+1}H^* \supseteq \cdots .$$

(б) Ако је за $p, n \in \mathbb{N}_0$, $F^pH^n := F^pH^* \cap H^n(X; R)$, доказати да је $F^pH^n = 0$ кад год је $p > n$.

(в) Ако су $a \in F^pH^*$ и $b \in F^qH^*$, доказати да за њихов „кап” производ важи $a \cdot b \in F^{p+q}H^*$.

Напомена: Својство из дела (в) овог задатка може се и овако формулисати: $F^pH^* \cdot F^qH^* \subseteq F^{p+q}H^*$ (за све $p, q \in \mathbb{N}_0$); а у тој ситуацији се каже да је $\{F^pH^*\}_{p \in \mathbb{N}_0}$ једна *стабилна* филтрација R-алгебре $H^*(X; R)$.

5. Ако се кратак тачан низ Абелових група $0 \to G \to H \to K \to 0$ цепа, доказати да је одговарајући Бокштајнов хомоморфизам $\beta : H^n(\mathcal{C}; K) \to H^{n+1}(\mathcal{C}; G)$ тривијалан за све ланчасте комплексе слободних Абелових група $\mathcal{C}$ и све $n \in \mathbb{Z}$.

6. Нека је M затворена многострукост димензије n и R комутативан прстен с јединицом.

(а) Доказати да M има коначно много компонената повезаности и да је свака од њих затворена многострукост димензије n.

(б) Доказати да је M R-оријентабилна ако и само ако је свака њена компонента R-оријентабилна.

(в) Нека је M R-оријентисана и нека су $M_1, M_2, \ldots, M_k$ све компоненте повезаности од M (R-оријентација многострукости M индукује R-оријентације свих компонената $M_1, M_2, \ldots, M_k$). Ако су $[M] \in H_n(M;R)$ и $[M_j] \in H_n(M_j;R)$, $j = \overline{1,k}$, одговарајуће фундаменталне класе и $i_j : M_j \hookrightarrow M$, $j = \overline{1,k}$, инклузије, доказати да је

$$[M] = (i_1)_*[M_1] + (i_2)_*[M_2] + \cdots + (i_k)_*[M_k].$$

7. Ако је M затворена оријентабилна многострукост димензије $2n$ ($n \in \mathbb{N}$) и ако је група $H_{n-1}(M)$ торзионо слободна, доказати да је онда и $H_n(M)$ торзионо слободна.

8. (а) Ако је M_g оријентабилна površ рода $g \in \mathbb{N}$ и R комутативан прстен, описати кохомолошку алгебру $H^*(M_g;R)$. (За упутство, видети 1. задатак код Хечера на страни 228.)

(б) Ако је N_g неоријентабилна површ рода $g \in \mathbb{N}$, описати кохомолошку алгебру $H^*(N_g;\mathbb{Z}_2)$.

(в) Одредити Љустерник–Шнирелманове категорије $\mathrm{cat}(M_g)$ и $\mathrm{cat}(N_g)$ за све $g \in \mathbb{N}$.

9. Да ли је суспензија затворене повезане површи многострукост?

10. (а) Доказати да је, као градирана $\mathbb{Z}$-алгебра, $H^*(\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha]/(2\alpha)$, $|\alpha| = 2$.

(б) Описати кохомолошке алгебре $H^*(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z})$, $n \in \mathbb{N}$.

(в) Доказати да су кохомолошке алгебре $H^*(\mathbb{R}\mathrm{P}^{2k+1};\mathbb{Z})$ и $H^*(\mathbb{R}\mathrm{P}^{2k} \vee S^{2k+1};\mathbb{Z})$ међусобно изоморфне.

(г) Да ли су за све комутативне прстене R, кохомолошке алгебре $H^*(\mathbb{R}\mathrm{P}^{2k+1};R)$ и $H^*(\mathbb{R}\mathrm{P}^{2k} \vee S^{2k+1};R)$ изоморфне?

(д) Да ли је $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2k+1} \simeq \mathbb{R}\mathrm{P}^{2k} \vee S^{2k+1}$?

11. (а) Ако је $k \in \mathbb{N}$ и $g : \mathbb{C}^{2k} \to \mathbb{C}^{2k}$ пресликавање дато са

$$g(z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots, z_{2k-1}, z_{2k}) := (-\overline{z_2}, \overline{z_1}, -\overline{z_4}, \overline{z_3}, \ldots, -\overline{z_{2k}}, \overline{z_{2k-1}}),$$

доказати да g индукује (непрекидно) пресликавање $\overline{g} : \mathbb{C}\mathrm{P}^{2k-1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{2k-1}$.

Нека је сад $n \in \mathbb{N}$ и $f : \mathbb{C}\mathrm{P}^n \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ непрекидно пресликавање.

(б) Доказати да је

$$\mathrm{tr}(f_*, H_k(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)) = \mathrm{tr}(f^*, H^k(\mathbb{C}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z})), \quad \text{за све } k \in \mathbb{Z}$$

($\mathrm{tr}(f_*, H_k(\mathbb{C}\mathrm{P}^n))$ је траг хомоморфизма $f_* : H_k(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \to H_k(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$, а $\mathrm{tr}(f^*, H^k(\mathbb{C}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}))$ траг хомоморфизма $f^* : H^k(\mathbb{C}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}) \to H^k(\mathbb{C}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z})$).

(в) Ако је $m = \mathrm{tr}(f^*, H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}))$, доказати да је $\mathrm{tr}(f^*, H^{2j}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z})) = m^j$ за све $j \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

(г) Да ли $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ има својство фиксне тачке?

(д) Да ли кватернионски пројективни простор $\mathbb{H}\mathrm{P}^n$ има својство фиксне тачке?

Напомена: За део (д) овог задатка дозвољено је користити 21. задатак под (ђ).

12. Доказати да, за дато $n \in \mathbb{N}$, постоји тачно једна нетривијална кохомолошка операција типа $(\mathbb{Z}_2, n; \mathbb{Z}_2, n+1)$. Која је то кохомолошка операција?

13. Ако је u произвољна позитивно димензионална кохомолошка класа, доказати да за све $n, k \in \mathbb{N}_0$ важи да је

$$Sq^n\left(u^{2^k}\right) = \begin{cases} \left(Sq^{\frac{n}{2^k}} u\right)^{2^k}, & 2^k \mid n \\ 0, & 2^k \nmid n \end{cases}.$$

14. Ако је (X, A) тополошки пар и $u \in H^2(X, A;\mathbb{Z}_2)$ класа таква да је $Sq^1 u = 0$, доказати да за све $n \in \mathbb{N}$ и све $k \in \mathbb{N}_0$ важи

$$Sq^{2k}(u^n) = \binom{n}{k} u^{n+k} \quad \text{и} \quad Sq^{2k+1}(u^n) = 0.$$

15. Нека је M затворена повезана многострукост димензије n. Доказати да за свако $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ постоји јединствена класа $v_k \in H^k(M;\mathbb{Z}_2)$ са својством да је

$$Sq^k x = v_k \cdot x, \quad \text{за све } x \in H^{n-k}(M;\mathbb{Z}_2),$$

где је са $\cdot$ означен „кап” производ.

Напомена: Класа v_k из овог задатка назива се k-том *Вуовом класом* многострукости M.

16. Доказати да у Стинродовој алгебри $\mathcal{A}_2$ важе следеће релације:

- $Sq^{2m-1}Sq^m = 0 \qquad (m \geqslant 1);$
- $Sq^{2m-2}Sq^m = Sq^{2m-1}Sq^{m-1} \qquad (m \geqslant 1);$
- $Sq^{2m-3}Sq^m = Sq^{2m-1}Sq^{m-2} \qquad (m \geqslant 2);$
- $Sq^{2m-4}Sq^m = Sq^{2m-1}Sq^{m-3} + Sq^{2m-2}Sq^{m-2} \qquad (m \geqslant 3).$

17. Нека је $n \in \mathbb{N}$ и M затворена повезана многострукост димензије $2n$ таква да је $H^i(M;\mathbb{Z}_2) = 0$ за $1 \leqslant i \leqslant n-1$ и $H^n(M;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$. Доказати да је n степен двојке.

18. Нека су тополошки простор X, $m \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in H^m(X;\mathbb{Z})$ такви да је, као градирана $\mathbb{Z}$-алгебра, $H^*(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha]$ или $H^*(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^{n+1})$ за неко $n \geqslant 2$. Доказати да је $m = 2^k$ за неко $k \in \mathbb{N}$.

Напомена: Под наведеним условима, све хомолошке групе простора X морају бити коначно генерисане (пропозиција 3F.12 код Хечера, стр. 318).

19. Нека је $p : S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ познато дволисно наткривање ($p(x) = [x]$, $x \in S^n$), тј. раслојење са слојем S^0.

(а) Доказати да је Ојлерова класа (за $\mathbb{Z}_2$ коефицијенте) овог раслојења нетривијална.

(б) Одредити хомоморфизам $H^n(S^n;\mathbb{Z}_2) \to H^n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2)$ из Гисиновог низа раслојења p.

20. Нека је M многострукост, $n \in \mathbb{N}$ и $p : S^{2n+1} \to M$ раслојење са слојем S^1.

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r] & S^{2n+1} \arrow[d, "p"] \\ & M \end{tikzcd}$$

(а) Доказати да је многострукост M просто повезана.

(б) Доказати да, за сваки комутативан прстен R, постоји изоморфизам градираних R-алгебри:

$$H^*(M;R) \cong H^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^n;R).$$

Напомена: Како горње раслојење свакако постоји у случају $M = \mathbb{C}\mathrm{P}^n$, то овај задатак даје још један начин одређивања кохомолошке алгебре $H^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^n;R)$ (на исти начин могу се одредити и кохомолошке алгебре $H^*(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2)$ и $H^*(\mathbb{H}\mathrm{P}^n;R)$).

21. Нека је $n \in \mathbb{N}$.

(а) Доказати да идентификација $\mathbb{C}^{2n+2} \cong \mathbb{H}^{n+1}$ индукује непрекидно пресликавање $p : \mathbb{C}\mathrm{P}^{2n+1} \to \mathbb{H}\mathrm{P}^n$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^{2n+2} \setminus \{0\} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[d] \\ \mathbb{C}\mathrm{P}^{2n+1} \arrow[r, dashed, "p"] & \mathbb{H}\mathrm{P}^n \end{tikzcd}$$

(б) Доказати да је p раслојење са слојем $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \approx S^2$.

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r] & \mathbb{C}\mathrm{P}^{2n+1} \arrow[d, "p"] \\ & \mathbb{H}\mathrm{P}^n \end{tikzcd}$$

(в) Доказати да је $p^* : H^4(\mathbb{H}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_3) \to H^4(\mathbb{C}\mathrm{P}^{2n+1};\mathbb{Z}_3)$ изоморфизам.

(г) Ако је $n \geqslant 2$, доказати да је Стинродов степен $\mathcal{P}^1 : H^4(\mathbb{H}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_3) \to H^8(\mathbb{H}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_3)$ изоморфизам.

(д) Ако је $n \geqslant 2$ и $w \in H^4(\mathbb{H}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_3)$ генератор, доказати да не постоји (непрекидно) пресликавање $f : \mathbb{H}\mathrm{P}^n \to \mathbb{H}\mathrm{P}^n$ такво да је $f^*(w) = -w$.

(ђ) Ако је $n \geqslant 2$ и $w \in H^4(\mathbb{H}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z})$ генератор, доказати да не постоји (непрекидно) пресликавање $f : \mathbb{H}\mathrm{P}^n \to \mathbb{H}\mathrm{P}^n$ такво да је $f^*(w) = -w$.

22. Нека је $n \in \mathbb{N}$ и

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r] & E \arrow[d, "p"] \\ & B \end{tikzcd}$$

раслојење са слојем S^{n-1}, при чему је $H^*(B;\mathbb{Z}_2)$ коначне димензије (као векторски простор над $\mathbb{Z}_2$). Нека је $p^* : H^*(B;\mathbb{Z}_2) \to H^*(E;\mathbb{Z}_2)$ индуковани морфизам кохомолошких алгебри.

(а) Доказати да је и $\dim\bigl(H^*(E;\mathbb{Z}_2)\bigr)$ коначна.

(б) Доказати да за свако $k \in \mathbb{Z}$ постоји кратак тачан низ облика

$$0 \to \operatorname{coker}\Bigl(p^* : H^{k+n-1}(B;\mathbb{Z}_2) \to H^{k+n-1}(E;\mathbb{Z}_2)\Bigr) \longrightarrow H^k(B;\mathbb{Z}_2) \longrightarrow \ker\Bigl(p^* : H^{k+n}(B;\mathbb{Z}_2) \to H^{k+n}(E;\mathbb{Z}_2)\Bigr) \to 0.$$

(в) Доказати да постоји кратак тачан низ облика

$$0 \to \operatorname{coker} p^* \longrightarrow H^*(B;\mathbb{Z}_2) \longrightarrow \ker p^* \to 0.$$

(г) Доказати да је $\dim\bigl(H^*(E;\mathbb{Z}_2)\bigr) = 2 \cdot \dim(\operatorname{im} p^*)$.