Домаћи задаци из Очигледне топологије

1. Нека је X бесконачан скуп и $\mathcal{T}$ топологија на X која садржи све бесконачне подскупове од X. Доказати да је $\mathcal{T}$ једнака дискретној топологији на X.

2. Нека је X тополошки простор и $A \subseteq X$.

(а) Доказати да је скуп A отворен ако и само ако не садржи ниједну тачку са своје границе (тј. ако и само ако је $A \cap \partial A = \emptyset$).
(б) Доказати да је скуп A затворен ако и само ако садржи целу своју границу (тј. ако и само ако је $\partial A \subseteq A$).

3. Нека је $f : X \to Y$ пресликавање између тополошких простора X и Y. Доказати да је f непрекидно ако и само ако за сваки $B \subseteq Y$ важи $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

4. Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функција дата са:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 27, & x \leqslant -3 \\ 2, & -3 < x \leqslant 0 \\ -\ln x, & x > 0 \end{cases} .$$

(а) Скицирати график функције f.
(б) Наћи отворен скуп $V \subseteq \mathbb{R}$ такав да $f^{-1}(V)$ није отворен.
(в) Наћи скуп $A \subseteq \mathbb{R}$ такав да $f(\overline{A}) \nsubseteq \overline{f(A)}$.
(г) Наћи скуп $B \subseteq \mathbb{R}$ такав да $\overline{f^{-1}(B)} \nsubseteq f^{-1}(\overline{B})$.
(д) Да ли је f непрекидна функција?

5. Нека су $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ две непрекидне функције такве да је $f(x) < g(x)$ за све $x \in \mathbb{R}$. Доказати да је $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) < y < g(x)\} \approx \mathbb{R} \times (0, 1)$.

6. Дати су потпростори еуклидске равни: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 5 - 2|y|\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 9y^2 = 36\}$, $C = S^2 \setminus \{(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})\}$, $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < z < 6\}$, $E = \partial D$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y \leqslant e^x\}$, $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$. Попунити следећу табелу, која се попуњава тако што се у свако поље упише $\top$ или $\perp$ у зависности од тога да ли су одговарајући простори хомеоморфни или не.

$\approx$	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$	D^2	$\mathbb{R} \times [0, +\infty)$	$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \lvert y\rvert = 1\}$	$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \lvert y\rvert > 1\}$	$[0, 1)$	S^1	S^2	T^2
A										
B										
C										
D										
E										
F										
G										

7. Дати су потпростори еуклидске равни: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0, x + y \leqslant 2, y - x \leqslant 2\}$, $B = A \setminus \{(0, 1)\}$, $C = A \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$, $D = A \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\}$, $E = A \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2\}$, $F = \partial A \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2\}$, $G = \partial E$. Попунити следећу табелу, која се попуњава тако што се у свако поље упише $\top$ или $\perp$ у зависности од тога да ли су одговарајући простори хомеоморфни или не.

$\approx$	$\mathbb{R}$	D^2	$\mathbb{R} \times [0, +\infty)$	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|y\| \geqslant 1\}$	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|y\| > 1\}$	$[0,1)$	S^1	$S^1 \times [0,1)$
A								
B								
C								
D								
E								
F								
G								

8. Нека је X компактан тополошки простор и нека је $\mathcal{C}$ фамилија (неких) његових затворених потпростора таква да за сваку коначну подфамилију $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\} \subseteq \mathcal{C}$ важи $C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_n \neq \emptyset$. Доказати да је $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$.

9. Нека је X Хауздорфов простор и $K \subseteq X$ његов компактан подскуп.

(а) Ако је $a \in X \setminus K$, доказати да постоје отворени скупови U и V такви да је $K \subseteq U$, $a \in V$ и $U \cap V = \emptyset$.

(б) Ако је L још један компактан подскуп од X дисјунктан са K ($K \cap L = \emptyset$), доказати да постоје отворени скупови U и V такви да је $K \subseteq U$, $L \subseteq V$ и $U \cap V = \emptyset$.

10. Доказати *Теорему о цветићу* за путну повезаност: Ако је X тополошки простор, A његов путно повезан подскуп и $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ фамилија путно повезаних подскупова од X таква да је $A \cap A_\lambda \neq \emptyset$ за све $\lambda \in \Lambda$, тада је и скуп $A \cup \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ путно повезан.

11. Нека је X тополошки простор и $\sim$ бинарна релација на X дефинисана са: $x \sim y$ ако постоји пут $\omega : I \to X$ такав да је $\omega(0) = x$ и $\omega(1) = y$. Доказати да је $\sim$ релација еквиваленције.

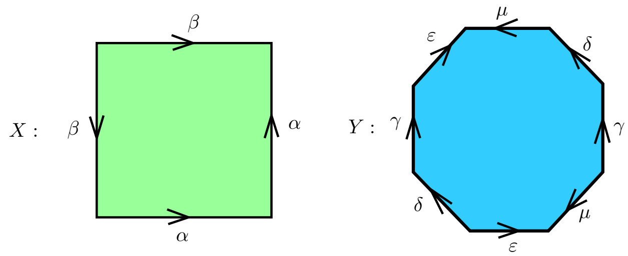
12. Нека су $f, g : X \to \mathbb{R}$ два непрекидна пресликавања из повезаног простора X у реалну праву и нека су $\Gamma_f, \Gamma_g \subset X \times \mathbb{R}$ њихови графици. Ако се пресликавања f и g поклапају у бар једној тачки (ако постоји $x_0 \in X$ такво да је $f(x_0) = g(x_0)$), доказати да је $\Gamma_f \cup \Gamma_g$ повезан потпростор производа $X \times \mathbb{R}$.

13. Ако су $p : X \to Y$ и $q : Y \to X$ непрекидна пресликавања таква да је $p \circ q = \mathbb{1}_Y$, доказати да је p količничко.

14. Нека је $p : X \to Y$ количничко пресликавање при чему је Y повезан. Ако за свако $y \in Y$ важи да је скуп $p^{-1}(\{y\})$ повезан, доказати да је онда и X повезан.

15. За сваки од количничких простора X и Y са слике десно доказати да је хомеоморфан једном од простора са следећег списка (и одредити којем).

- сфера
- цилиндар
- Мебијусова трака
- торус
- Клајнова боца
- пројективна раван



16. Нека је G повезан граф.

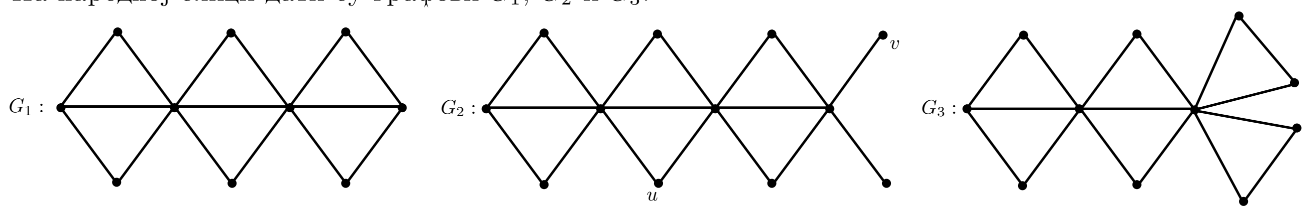
(а) Ако се свака два различита темена графа G могу спојити са бар два елементарна ланца, доказати да у графу G нема темена индекса 1 ($a_1(G) = 0$).

(б) Ако је $a_1(G) = 0$, да ли онда за свака два различита темена графа G постоје бар два елементарна ланца која их спајају?

17. Нека је G граф.

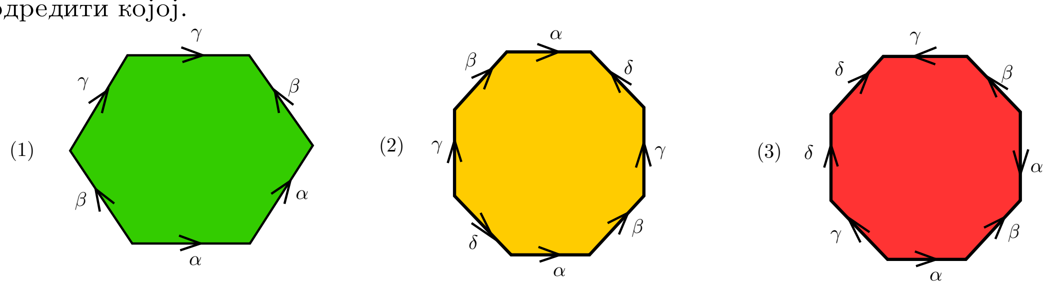
(а) Ако је G дрво, доказати да за свака два његова различита темена постоји јединствени елементарни ланац који их спаја.
(б) Ако за свака два различита темена графа G постоји јединствени елементарни ланац који их спаја, и ако G нема петљи, доказати да је G дрво.
(в) Да ли би важило тврђење под (б) без претпоставке да G нема петљи?

18. На наредној слици дати су графови G_1, G_2 и G_3.

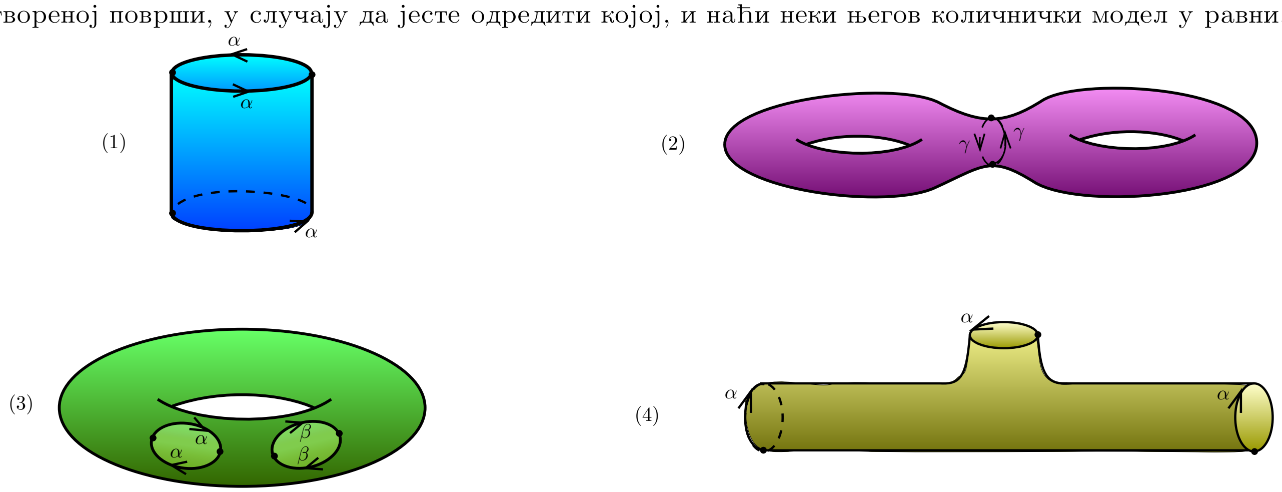


(а) Одредити Ојлерове карактеристике ових графова.
(б) Који од ових графова су уникурсални? Оне који јесу нацртати „једним потезом”.
(в) Да ли међу овим графовима има хомеоморфних?
(г) Колико граф G_2 има подграфова хомеоморфних са S^1?
(д) Колико у графу G_2 има елементарних ланаца који повезују теме u с теменом v?
(ђ) У сваком од ових графова наћи по једно максимално дрво.

19. За сваки од наредна три количничка простора доказати да је хомеоморфан некој затвореној површи и одредити којој.

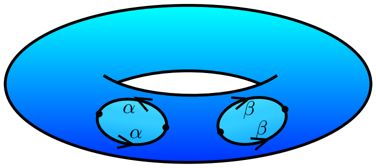


20. За сваки од четири количничка простора с наредне слике испитати да ли је хомеоморфан некој затвореној површи, у случају да јесте одредити којој, и наћи неки његов количнички модел у равни.

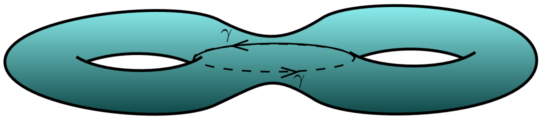


21. За сваки од три количничка простора с наредне слике испитати да ли је хомеоморфан некој затвореној површи, у случају да јесте одредити којој, и наћи неки његов количнички модел у равни.

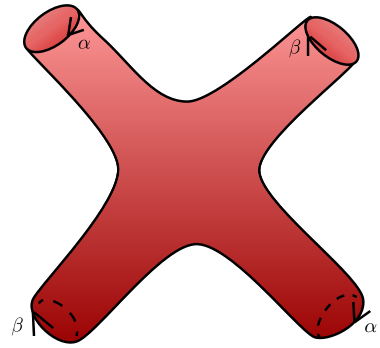
(1)



(2)

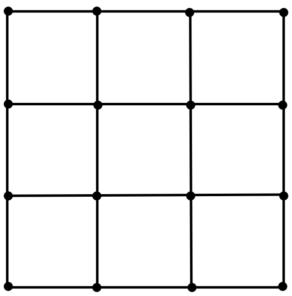


(3)

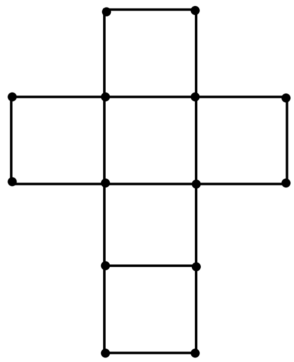


22. Дати су графови G_1, G_2 и G_3 (в. наредну слику).

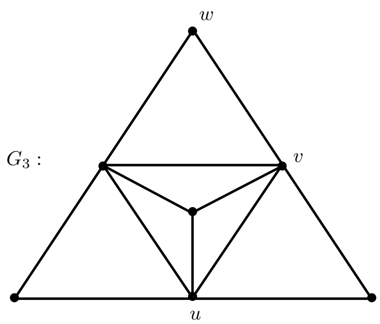
G_1 :



G_2 :



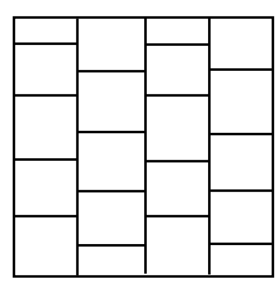
G_3 :



(а) Одредити Ојлерове карактеристике и хроматске бројеве ових графова.
(б) Наћи по једно максимално дрво у сваком од ових графова.
(в) Да ли је граф G_1 уникурсалан? Ако јесте, нацртати га „у једном потезу”, а ако није, додати му најмањи могући број ивица тако да новодобијени граф G_1' буде уникурсалан, па онда нацртати G_1' „у једном потезу”.
(г) Да ли је граф G_2 уникурсалан? Ако јесте, нацртати га „у једном потезу”, а ако није, додати му најмањи могући број ивица тако да новодобијени граф G_2' буде уникурсалан, па онда нацртати G_2' „у једном потезу”.
(д) Колико у графу G_3 има елементарних ланаца који спајају теме u с теменом w, а пролазе кроз теме v?
(ђ) Да ли постоји ивица у графу G_3 чијим би се избацивањем смањио хроматски број?

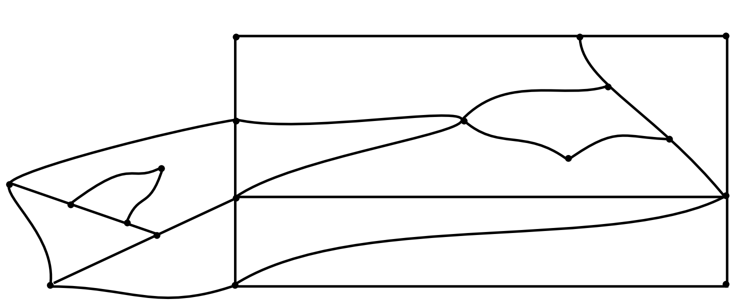
23. Нека је граф G добијен од дисјунктне уније потпуног графа K_n ($n \geqslant 2$) и потпуног бипартитног графа $K_{m,l}$ ($m, l \geqslant 1$) тако што је једно теме графа K_n спојено једном ивицом са једним теменом графа $K_{m,l}$.
(а) Одредити хроматски број графа G.
(б) Ако су природни бројеви m и l парни, а n непаран, доказати да је граф G уникурсалан.

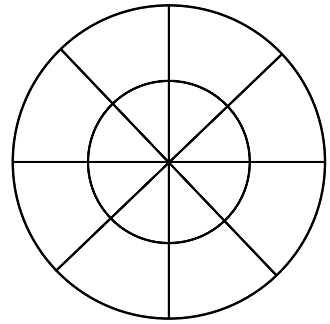
24. Ако прост граф има n темена и хроматски број 2, колико максимално ивица може имати тај граф?



25. На цртежу десно дата је једна мапа у равни. Одредити њен хроматски број. (Боји се и неограничени регион.)

26. На наредној слици лево дата је једна мапа у равни.
(а) Правилно обојити ову мапу са четири боје.
(б) Нацртати дуални граф ове мапе.
(в) Доказати да се она не може правилно обојити са три боје.
(г) Уклонити једну ивицу из графа на слици тако да се новодобијена мапа може правилно обојити помоћу три боје.





27. Одредити хроматски број мапе на претходној слици десно и нацртати њен дуални граф.

28. Наћи највеће n такво да се потпуни граф над n темена K_n може нацртати без самопресека на пројективној равни $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ (тј. наћи $\max\{n \mid \text{постоји утапање } K_n \hookrightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^2\}$).

29. Нека је дата мапа φ на (некој) површи таква да за свака два њена суседна региона важи да бар један од њих има укупно највише три граничне ивице. Доказати да је $\mathrm{col}(\varphi) \leqslant 4$.

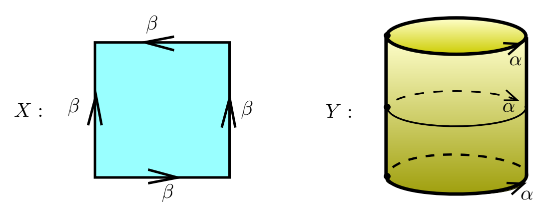
30. Нека су $f : X \to Y \times Z$ и $g : X \to Y \times Z$ непрекидна пресликавања и $p_Y : Y \times Z \to Y$ и $p_Z : Y \times Z \to Z$ пројекције. Доказати да је $f \simeq g$ ако и само је $p_Y \circ f \simeq p_Y \circ g$ и $p_Z \circ f \simeq p_Z \circ g$.

31. Нека је X повезан тополошки простор и $f, g : X \to S^n$ два непрекидна пресликавања. Ако пресликавање f није хомотопно ни са g ни са $-g$, доказати да постоји $x_0 \in X$такво да је $f(x_0) \perp g(x_0)$.

32. Дато је пресликавање $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ са $f(x_1, x_2, x_3) := (x_1 + 1, x_2 + 1, x_3 + 1)$ (транслација за вектор $(1, 1, 1)$). Доказати да је са $g(x) := \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$ добро дефинисано непрекидно пресликавање $g : S^2 \to S^2$ које је хомотопски тривијално.

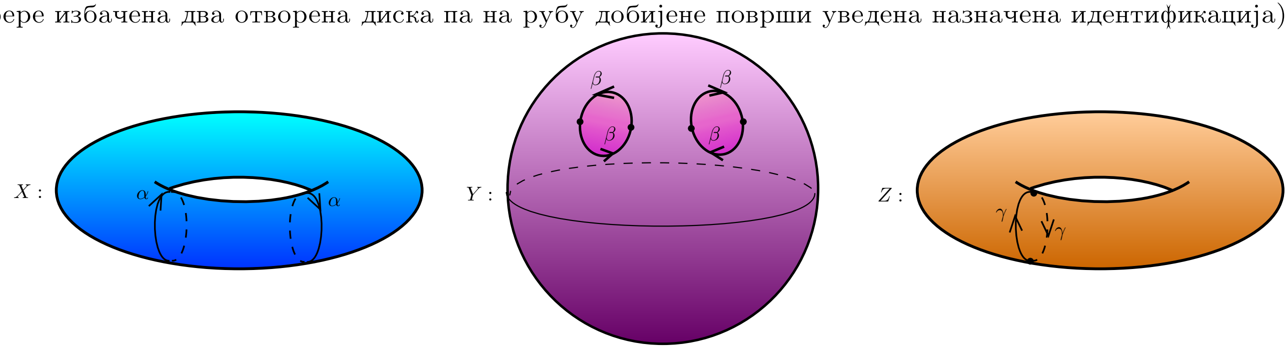
33. Одредити фундаменталне групе и абелизације тих фундаменталних група за све затворене повезане површи.

34. На слици десно дати су количнички простори X и Y (простор X је количник квадрата, а простор Y је количник цилиндра).



(а) Одредити Ојлерове карактеристике, фундаменталне групе ових простора, као и абелизације тих фундаменталних група.
(б) Да ли је $X \approx Y$?
(в) Да ли је $X \approx \mathbb{R}\mathrm{P}^2$?

35. Дати су количнички простори X, Y и Z (X и Z су количници торуса, а Y је добијен тако што су са сфере избачена два отворена диска па на рубу добијене површи уведена назначена идентификација).



(а) Одредити Ојлерове карактеристике и фундаменталне групе ових простора.
(б) Да ли је неки од ових простора хомеоморфан некој затвореној површи?

(в) Да ли међу овим просторима има међусобно хомеоморфних?

36. Одредити Ојлерове карактеристике, фундаменталне групе, као и њихове абелизације, за четири простора из 20. задатка.

37. Одредити Ојлерове карактеристике, фундаменталне групе, као и њихове абелизације, за три простора из 21. задатка.

38. Доказати да је свака ретракција количничко пресликавање.

39. Ако је $n \in \mathbb{N}$ и $f : D^2 \to D^2$ непрекидно пресликавање, доказати да постоји $x_0 \in D^2$ такво да је $\|x_0\| = \|f(x_0)\|^n$.

40. Ако је $S^2_+ = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \geqslant 0\}$, $S^2_- = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \leqslant 0\}$ и $f : S^2_+ \to S^2_-$ непрекидно пресликавање, доказати да постоји тачка $u \in S^2_+$ таква да је вектор $\overrightarrow{uf(u)}$ паралелан са z-осом (подразумевамо да је нула-вектор паралелан са сваком правом).

41. Дате су кружнице у равни $K_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\}$ и $K_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 = 1\}$. Нека је $f : S^1 \to K_1 \cup K_2$ непрекидно пресликавање. Ако координатни почетак $O(0, 0) \notin f(S^1)$, доказати да постоји тачка $z_0 \in S^1$ таква да је $f(z_0) = f(-z_0)$.

42. Нека је $f : S^2 \to \mathbb{R}^3$ непрекидно пресликавање такво да је $f(u) \neq f(-u)$ за све $u \in S^2$. Доказати да постоји $u_0 \in S^2$ такво да је права одређена тачкама $f(u_0)$ и $f(-u_0)$ нормална на раван $\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.