

ТЕОРИЈА ХОМОТОПИЈЕ – ДОМАЋИ ЗАДАЦИ

1. Нека је $p : E \rightarrow B$ фибрација и $f : X \rightarrow B$ (непрекидно) пресликавање.

- (а) Ако је $\hat{f} : X \rightarrow E$ подизање пресликавања f до на хомотопију ($p \circ \hat{f} \simeq f$), доказати да постоји право подизање $\tilde{f} : X \rightarrow E$ пресликавања f ($p \circ \tilde{f} = f$) такво да је $\tilde{f} \simeq \hat{f}$.



- (б) Ако је $g : X \rightarrow B$ и $g \simeq f$, доказати да се g подиже до E ако и само ако се f подиже до E .

2. Нека је $i : A \hookrightarrow X$ кофибрација и $f : A \rightarrow Y$ (непрекидно) пресликавање.

- (а) Ако је $\hat{f} : X \rightarrow Y$ проширење пресликавања f до на хомотопију ($\hat{f} \circ i \simeq f$), доказати да постоји право проширење $\bar{f} : X \rightarrow Y$ пресликавања f ($\bar{f} \circ i = f$) такво да је $\bar{f} \simeq \hat{f}$.



- (б) Ако је $g : A \rightarrow Y$ и $g \simeq f$, доказати да се g проширује на X ако и само ако се f проширује на X .

3. Нека је A затворен потпростор од X такав да пар (X, A) има својство проширења хомотопије (инклузија $j : A \hookrightarrow X$ јесте кофибрација).

- (а) Ако је $j_1 : X \hookrightarrow C_j = X \cup CA$ инклузија (природно утапање) простора X у конус пресликавања j , доказати да је и j_1 кофибрација. [Упутство]
- (б) Доказати да је и инклузија $CA \hookrightarrow X \cup CA$ такође кофибрација.
- (в) Нека је $C_{j_1} = (X \cup CA) \cup CX$ конус пресликавања j_1 , $h_2 : (X \cup CA) \cup CX \rightarrow SA$ пресликавање из овог конуса у суспензију од A добијено скупљањем конуса CX у тачку и $q_2 : (X \cup CA) \cup CX \rightarrow SX$ пресликавање које се добија скупљањем потпростора $X \cup CA$ у тачку. Доказати да је $Sj \circ r \circ h_2 \simeq q_2$, где је $Sj : SA \hookrightarrow SX$ суспензија инклузије j ($Sj[a, t] = [j(a), t] = [a, t]$), а $r : SA \rightarrow SA$ рефлексја ($r[a, t] = [a, 1 - t]$).
- (г) Ако је Y путно повезан простор, доказати да постоји (Пулеов) тачан низ:

$$[SX, Y] \xrightarrow{(Sj)^*} [SA, Y] \rightarrow [X/A, Y] \xrightarrow{q^*} [X, Y] \xrightarrow{j^*} [A, Y],$$

где је $q : X \rightarrow X/A$ природна сурјекција.

[Упутство]

- (д) Формулисати и доказати својство природности Пулеовог тачног низа.

4. Нека је $f : X \rightarrow Y$ непрекидно пресликавање. Означимо са $j : X \hookrightarrow M_f$ природно утапање простора X у цилиндар пресликавања f , $M_f := (X \times I \sqcup Y) /_{(x,0) \sim f(x)}$, $j(x) := [(x, 1)]$, $x \in X$. Нека је $i_Y : Y \hookrightarrow M_f$, $i_Y(y) := [y]$, $y \in Y$, природно утапање простора Y у M_f , а $h_f : M_f \rightarrow Y$ њему инверзна хомотопска еквиваленција, $h_f[(x, t)] := f(x)$ за $(x, t) \in X \times I$, $h_f[y] := y$ за $y \in Y$. Означимо још са $i : Y \hookrightarrow C_f$ природно утапање простора Y у конус пресликавања f , $C_f := (X \times I \sqcup Y) /_{\substack{(x,0) \sim f(x) \\ (x_1,1) \sim (x_2,1)}}$, $i(y) := [y]$, $y \in Y$.

Као што је и уобичајено, надаље слику датог простора при утапању не разликујемо од самог простора, па је, у том смислу, $X = j(X) \subset M_f$, $Y = i_Y(Y) \subset M_f$ и $Y = i(Y) \subset C_f$. Уочимо природне сурјекције настале скупљањем у тачку одговарајућих потпростора: $q : M_f \rightarrow C_f = M_f/X$, $q_Y : C_f \rightarrow SX = C_f/Y$, $\pi : C_j = M_f \cup CX \rightarrow C_f = (M_f \cup CX)/CX$ и $p : C_j = M_f \cup CX \rightarrow SX = (M_f \cup CX)/M_f$.

- (а) Доказати да прва два од наредна три дијаграма комутирају, а да трећи комутира до на хомотопију ($q_Y \circ \pi \simeq p$).

$$\begin{array}{ccc}
 & M_f & \\
 j \nearrow & & \downarrow h_f \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 M_f & & \\
 \uparrow i_Y & & \searrow q \\
 Y \subset & \xrightarrow{i} & C_f
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 M_f \cup CX & \xrightarrow{\pi} & C_f \\
 \searrow p & & \swarrow q_Y \\
 & SX &
 \end{array}$$

- (б) Ако је Z путно повезан простор, доказати да је следећи низ тачан.

$$[SY, Z] \xrightarrow{(Sf)^*} [SX, Z] \xrightarrow{q_Y^*} [C_f, Z] \xrightarrow{i^*} [Y, Z] \xrightarrow{f^*} [X, Z],$$

(Овај низ се назива Пупеовим тачним низом придруженим пресликавању f и простору Z .)

[Упутство]

- (в) Формулисати и доказати својство природности овог Пупеовог тачног низа.

5. Ако је X H -простор с неутралом e и $(X, e) \simeq (Y, y_0)$, доказати да је Y H -простор с неутралом y_0 .

6. Нека је X H -простор, $\mu : X \times X \rightarrow X$ одговарајућа операција, а e неутрал.

- (а) Ако су дата непрекидна пресликавања $\varphi, \psi : (S^n, e_1) \rightarrow (X, e)$ ($n \in \mathbb{N}$), доказати да у групи $\pi_n(X, e)$ важи: $[\varphi]_0 + [\psi]_0 = [\mu \circ (\varphi, \psi)]_0$.
(б) Ако је $m \in \mathbb{N}$, наћи пресликавање $f : (X, e) \rightarrow (X, e)$ такво да за све $n \in \mathbb{N}$ важи да је хомоморфизам $f_* : \pi_n(X, e) \rightarrow \pi_n(X, e)$ множење са m .

7. Нека је X тополошки простор, $A \subseteq X$ и $i : A \hookrightarrow X$ инклузија.

- (а) Ако је $u : I \rightarrow A$ пут у потпростору A , $a_0 = u(0)$ и $a_1 = u(1)$, доказати да комутира наредни дијаграм (водоравни низови су дуги тачни низови хомотопских група за пар (X, A)).

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & \pi_n(A, a_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(X, a_0) & \longrightarrow & \pi_n(X, A, a_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(A, a_0) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \pi_1(A, a_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(X, a_0) \\
 & & \downarrow \beta_u & & \downarrow \beta_{i \circ u} & & \downarrow \beta_u & & \downarrow \beta_u & & & & \downarrow \beta_u & & \downarrow \beta_{i \circ u} \\
 \cdots & \longrightarrow & \pi_n(A, a_1) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(X, a_1) & \longrightarrow & \pi_n(X, A, a_1) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(A, a_1) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \pi_1(A, a_1) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(X, a_1)
 \end{array}$$

- (б) Нека је $a_0 \in A$. Знамо да фундаментална група $\pi_1(A, a_0)$ дејствује на групе $\pi_n(A, a_0)$, $n \geq 1$, и $\pi_n(X, A, a_0)$, $n \geq 2$, али она дејствује и на групе $\pi_n(X, a_0)$, $n \geq 1$ (то дејство је композиција $\pi_1(A, a_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, a_0) \rightarrow \text{Aut}(\pi_n(X, a_0))$, где је друга стрелица познато дејство фундаменталне групе $\pi_1(X, a_0)$ на $\pi_n(X, a_0)$). Доказати да су сви хомоморфизми у дугом тачном низу хомотопских група за пар (X, A)

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & \pi_n(A, a_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(X, a_0) & \longrightarrow & \pi_n(X, A, a_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(A, a_0) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \pi_1(A, a_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(X, a_0) \\
 & & \pi_1(A, a_0)\text{-еквиваријантна пресликавања.} & & & & & & & & & & & & \text{[Дефиниција еквиваријантног пресликавања]}
 \end{array}$$

8. Нека је $p : E \rightarrow B$ m -еквиваленција, а X n -димензион CW-комплекс ($m, n \in \mathbb{N}_0$).

- (а) Ако је $m > n$, доказати да за свака два непрекидна пресликавања $f, g : X \rightarrow E$ важи следећа еквиваленција: $f \simeq g \iff p \circ f \simeq p \circ g$.
(б) Ако је $m > n$, доказати да је $p_* : [X, E] \rightarrow [X, B]$ бијекција.
(в) Ако је $m = n$, доказати да је $p_* : [X, E] \rightarrow [X, B]$ сурјекција.

9. Доказати да је скуп хомотопских класа пресликавања пројективног простора $\mathbb{R}P^n$ у самог себе (тј. скуп $[\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n]$) бесконачан за свако $n \in \mathbb{N}$. [Упутство]

10. За свако $n \in \mathbb{N}$ испитати да ли је количнички простор $\mathbb{R}P^n / \mathbb{R}P^{n-1}$ ретракт простора $\mathbb{R}P^{n+1} / \mathbb{R}P^{n-1}$. [Упутство]

11. Нека је X тополошки простор. Доказати да су следећи искази међусобно еквивалентни.

- (1) X је контрактибилан.
(2) За произвољан тополошки простор Y важи $X \times Y \simeq Y$.
(3) Постоји $n \in \mathbb{N}_0$ такво да важи $X \times S^n \simeq S^n$.

[Упутство]

12. Одредити групу $\pi_2(S^1 \vee S^2)$.

[Упутство]

13. Нека је X просто повезан CW-комплекс, $n \geq 2$ и $f : S^n \rightarrow X$ непрекидно пресликавање. Ако је $h([f]_0) = 0$, где је $h : \pi_n(X, f(e_1)) \rightarrow H_n(X)$ Хуревихев хомоморфизам, доказати да је f хомотопно пресликавању $g : S^n \rightarrow X$ таквом да је $g(S^n) \subseteq X^{n-1}$.

[Упутство]

14. Нека је $f : X \rightarrow Y$ непрекидно пресликавање између CW-комплекса X и Y . Нека су $p : \tilde{X} \rightarrow X$ и $q : \tilde{Y} \rightarrow Y$ њихова универзална наткривања (p и q су наткривања, а \tilde{X} и \tilde{Y} просто повезани).

(а) Доказати да постоји (непрекидно) $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ које „наткрива“ f (такво да је $q \circ \tilde{f} = f \circ p$).

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y} \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

(б) Ако је $f_* : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ изоморфизам и ако је за свако $n \geq 2$ и $\tilde{f}_* : H_n(\tilde{X}) \rightarrow H_n(\tilde{Y})$ изоморфизам, доказати да је f хомотопска еквиваленција.

15. Нека је $p : E \rightarrow B$ (Серова) фибрација, $e_0 \in E$, $b_0 = p(e_0) \in B$, E_0 компонента путне повезаности (простора E) која садржи тачку e_0 и B_0 компонента путне повезаности (простора B) која садржи тачку b_0 . Доказати да је $p(E_0) = B_0$ и да је рестрикција $p|_{E_0} : E_0 \rightarrow B_0$ пресликавања p (с кодоменом суженим на B_0) такође (Серова) фибрација.

16. Нека је (X, A) тополошки пар.

(а) Претпоставимо да је A јаки деформациони ретракт од X и нека је $H : X \times I \rightarrow X$ пресликавање које остварује хомотопију релативно A између $i \circ r$ и $\mathbf{1}_X$ ($i : A \hookrightarrow X$ јесте инклузија, а $r : X \rightarrow A$ ретракција), тј. $H : i \circ r \simeq \mathbf{1}_X \text{ (rel } A)$. Претпоставимо још и да имамо непрекидно пресликавање $\alpha : X \rightarrow I$ такво да је $\alpha^{-1}(\{0\}) = A$ и дефинишимо $\varphi : X \times I \rightarrow I$ на следећи начин:

$$\varphi(x, t) := \begin{cases} \min\{1, \frac{t}{\alpha(x)}\}, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases}, \quad (x, t) \in X \times I.$$

Ако је $D : X \times I \rightarrow X$ пресликавање дефинисано са $D(x, t) := H(x, \varphi(x, t))$, $(x, t) \in X \times I$, доказати да је D непрекидно.

[Упутство]

(б) Ако је (X, A) DR-пар и ако пресликавање $p : E \rightarrow B$ има својство подизања хомотопије (HLP) у односу на X , доказати да онда p има својство проширења подизања (LEP) у односу на пар (X, A) .

[Упутство]

17. Доказати да Серова фибрација има својство подизања хомотопије (HLP) у односу на све ћелијске комплексе.

[Упутство]

18. Нека је $p : E \rightarrow B$ фибрација, B путно повезан, $b_1, b_2 \in B$ и нека су F_{b_1} и F_{b_2} одговарајући слојеви. Доказати да је дејство (до на хомотопију) групе $\pi_1(B, b_1)$ на F_{b_1} тривијално ако и само ако је дејство (до на хомотопију) групе $\pi_1(B, b_2)$ на F_{b_2} тривијално.

[Упутство]

19. Нека је $p : E \rightarrow B$ Серова фибрација и $n \in \mathbb{N}_0$.

(а) Нека је $f : X \rightarrow B$ непрекидно пресликавање, $f^*p : f^*(E) \rightarrow X$ повлачење Серове фибрације p помоћу f и $q : f^*(E) \rightarrow E$ рестрикција друге пројекције на $f^*(E)$.

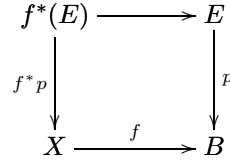
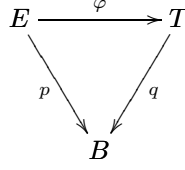
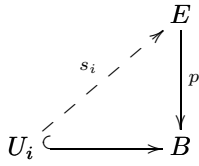
$$\begin{array}{ccc} f^*(E) & \xrightarrow{q} & E \\ f^*p \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Ако је f n -еквиваленција, доказати да је онда и q n -еквиваленција.

[Упутство]

(б) Ако је $A \subseteq B$ такав да је пар (B, A) n -повезан, доказати да је онда и пар $(E, p^{-1}(A))$ такође n -повезан.

20. Шварцов род фибрације $p : E \rightarrow B$, у ознаци $SG(p)$, дефинишемо као најмањи број $k \in \mathbb{N}$ такав да постоји отворен покривач $\{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ простора B са својством да p има секцију над сваким елементом покривача, тј. да за све $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ постоји подизање $s_i : U_i \rightarrow E$ инклузије $U_i \hookrightarrow B$ у односу на p (в. први дијаграм на наредној слици).



- (а) Ако је $p : E \rightarrow B$ фибрација и B контрактибилан, доказати да је $SG(p) = 1$. [Упутство]
- (б) Ако су $p : E \rightarrow B$ и $q : T \rightarrow B$ фибрације такве да постоји (непрекидно) $\varphi : E \rightarrow T$ са својством $q \circ \varphi = p$ (в. други дијаграм на претходној слици), доказати да је $SG(q) \leq SG(p)$.
- (в) Ако је $p : E \rightarrow B$ фибрација, $f : X \rightarrow B$ непрекидно пресликавање и $f^*p : f^*(E) \rightarrow X$ повлачење фибрације p помоћу f (в. трећи дијаграм на претходној слици), доказати да је $SG(f^*p) \leq SG(p)$.

Нека је сад X путно повезан простор.

- (г) Наћи фибрацију p чији је Шварцов род једнак Љустерник–Шнирелмановој категорији простора X ($SG(p) = \text{cat}(X)$). [Дефиниција Љустерник–Шнирелманове категорије]

Нека је $\pi : X^I \rightarrow X \times X$ пресликавање дефинисано са $\pi(\omega) = (\omega(0), \omega(1))$, $\omega \in X^I$.

- (д) Доказати да је π фибрација и одредити њен слој. [Упутство]

Тополошку комплексност простора X , у ознаци $TC(X)$, дефинишемо као Шварцов род фибрације π :

$$TC(X) := SG(\pi).$$

- (ђ) Доказати да је $TC(X) = 1$ ако и само ако је X контрактибилан. [Упутство]
- (е) Доказати да је $\text{cat}(X) \leq TC(X) \leq \text{cat}(X \times X)$. [Упутство]

21. Ако је F хомотопски слој инклузије $i : \mathbb{R}P^n \hookrightarrow \mathbb{R}P^\infty$, доказати да је $F \simeq S^n$ ($n \in \mathbb{N}$). [Упутство]

22. Нека је $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ кратак тачан низ Абелових група и $n \in \mathbb{N}$. Доказати да постоји фибрација $p : K(B, n) \rightarrow K(C, n)$ са слојем $K(A, n)$. [Упутство]

$$\begin{array}{ccc} K(A, n) & \longrightarrow & K(B, n) \\ & & \downarrow p \\ & & K(C, n) \end{array}$$

- 23.** • Одредити следеће хомотопске групе (K је Клајнова боца):
 $\pi_4(K)$, $\pi_{17}(\mathbb{R}P^{18})$, $\pi_{11}(S(S^{10} \times S^{10}))$, $\pi_{17}(\Omega S^{17})$.
 • Одредити кардиналност скупа хомотопских класа $[D^3, \Omega(\mathbb{R}P^3)]$.
 • Наћи потребан и довољан услов за k и n да би букет $S^k \vee S^n \vee S^k \vee S^n$ био прост ($k, n \in \mathbb{N}$).

24. Ако је X произвољан CW-комплекс, доказати да је пресликавање $\Phi : [X, L_m^\infty]_0 \rightarrow [X, L_m^\infty]$ бијекција. (L_m^∞ је бесконачно димензиони лећасти простор, $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Φ је дато са $\Phi([f]_0) = [f]$, $[f]_0 \in [X, L_m^\infty]_0$.)

25. Нека је Y путно повезан простор с базном тачком y_0 . Ако је $p : E \rightarrow X$ главна фибрација добијена повлачењем канонске фибрације над Y помоћу пресликавања $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, доказати да је простор $E = f^*(PY)$ управо хомотопски слој пресликавања f .

26. Нека су $n \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и нека је $L_m^{2n+1} = S^{2n+1}/\mathbb{Z}_m$ лећасти простор (елемент $k \in \mathbb{Z}_m$ дејствује на S^{2n+1} као множење са $e^{i\frac{2k\pi}{m}}$).

- (а) Доказати да постоји раслојење $q : L_m^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ са слојем S^1 . [Упутство]

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & L_m^{2n+1} \\ & & \downarrow q \\ & & \mathbb{C}P^n \end{array}$$

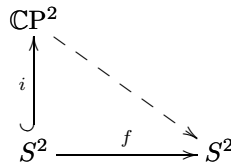
- (б) Описати повезујући хомоморфизам $\pi_2(\mathbb{C}P^n) \rightarrow \pi_1(S^1)$ из дугог тачног низа придруженог раслојењу из дела (а).

27. Да ли је $\mathbb{C}P^2 \simeq S^2 \vee S^4$?

28. Ако је $k \in \mathbb{Z}$ и $f : S^2 \rightarrow S^2$ пресликавање степена k , одредити хомоморфизам $f_* : \pi_3(S^2) \rightarrow \pi_3(S^2)$.
[Упутство]

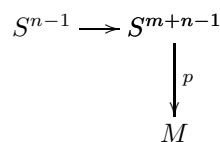
29. Нека је $i : S^2 \hookrightarrow \mathbb{C}P^2$ инклузија, тј. природно утапање ($S^2 \approx \mathbb{C}P^1$ јесте 2-скелет од $\mathbb{C}P^2$ при уобичајеној хелијској декомпозицији овог простора).

(а) Доказати да је пресликавање $f : S^2 \rightarrow S^2$ хомотопски тривијално ако и само ако се може проширити на $\mathbb{C}P^2$.
[Упутство]



(б) Користећи чињеницу $\pi_1^S = \mathbb{Z}_2$ (или некако другачије) доказати да је $[\mathbb{C}P^2, S^2] = 0$.
[Упутство]

30. Нека је $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$, M многострукост и $p : S^{m+n-1} \rightarrow M$ раслојење са слојем S^{n-1} .



Доказати да је тада конус пресликавања p , тј. $C_p = D^{m+n} \cup_p M$, затворена повезана $(m+n)$ -димензиона многострукост.
[Упутство]

31. Користећи чињеницу $\pi_1^S = \mathbb{Z}_2$ (или некако другачије) одредити групе $\pi_3(SO(4))$ и $\pi_3(V_2(\mathbb{R}^4))$.

32. (Подразумевамо да су сви простори који се појављују у овом задатку Хауздорфови.)

Нека група G дејствује на простор Y . Уочимо следећи услов:

$$(\forall y \in Y) (\exists U \in \mathcal{T}_Y) \quad y \in U \wedge [(\forall g_1, g_2 \in G) \quad g_1 \neq g_2 \implies g_1 U \cap g_2 U = \emptyset]. \quad (*)$$

Доказати:

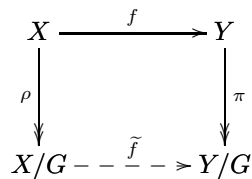
(а) $(*) \implies$ дејство је слободно;

(б) ако је G коначна и дејство слободно, онда важи $(*)$.

Нека G дејствује и на простор X и нека је $f : X \rightarrow Y$ непрекидно G -еквиваријантно пресликавање.

[Дефиниција еквиваријантног пресликавања]

(в) Доказати да f индукује непрекидно пресликавање $\tilde{f} : X/G \rightarrow Y/G$ такво да комутира дијаграм на слици (ρ и π су природне сурјекције).

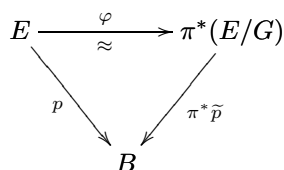


(г) Ако дејство на Y задовољава услов $(*)$, доказати да онда и дејство на X задовољава услов $(*)$.

Нека је сада $p : E \rightarrow B$ раслојење и нека група G дејствује и на E и на B тако да је p G -еквиваријантно и да дејство G на B задовољава услов $(*)$.

(д) Доказати да је индуковано пресликавање $\tilde{p} : E/G \rightarrow B/G$ такође раслојење са истим слојем као p .
[Упутство]

(ђ) Ако је $\pi : B \rightarrow B/G$ природна сурјекција, доказати да се повлачење раслојења \tilde{p} помоћу π (означимо га са $\pi^* \tilde{p} : \pi^*(E/G) \rightarrow B$) поклапа са p (у смислу да постоји хомеоморфизам φ тако да комутира дијаграм на слици).
[Упутство]



33. Група \mathbb{Z}_2 дејствује на природан начин на Штифелову многострукост $V_k(\mathbb{R}^n)$:

$$(v_1, v_2, \dots, v_k) \mapsto (-v_1, -v_2, \dots, -v_k).$$

(На пример, $V_1(\mathbb{R}^n)/\mathbb{Z}_2 = S^{n-1}/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^{n-1}$.) При том дејству је раслојење $p : V_m(\mathbb{R}^n) \rightarrow V_k(\mathbb{R}^n)$, $(v_1, v_2, \dots, v_m) \mapsto (v_1, v_2, \dots, v_k)$, \mathbb{Z}_2 -еквиваријантно пресликавање ($k \leq m$).

Доказати да за $k, n \in \mathbb{N}$ постоји \mathbb{Z}_2 -еквиваријантно пресликавање $S^n \rightarrow V_{n+1}(\mathbb{R}^{n+k+1})$ ако и само ако постоји подизање инклузије $\mathbb{R}P^n \hookrightarrow \mathbb{R}P^{n+k}$ у односу на пресликавање \tilde{p} , где је $\tilde{p} : V_{n+1}(\mathbb{R}^{n+k+1})/\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{R}P^{n+k}$ индуковано пресликавањем $p : V_{n+1}(\mathbb{R}^{n+k+1}) \rightarrow S^{n+k}$. [Упутство]

$$\begin{array}{ccc} & & V_{n+1}(\mathbb{R}^{n+k+1})/\mathbb{Z}_2 \\ & \nearrow & \downarrow \tilde{p} \\ \mathbb{R}P^n & \hookrightarrow & \mathbb{R}P^{n+k} \end{array}$$

34. Нека је $1 \leq k \leq n$ и $V_k(\mathbb{C}^n) = \{(v_1, v_2, \dots, v_k) \in (\mathbb{C}^n)^k \mid (\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}) \langle v_i, v_j \rangle = \delta_i^j\}$, где је $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ стандардни скаларни (хермитски) производ на \mathbb{C}^n .

- Доказати да је $V_k(\mathbb{C}^n)$ $(2n - 2k)$ -повезана затворена многострукост.
- Колика је димензија Штифелове многострукости $V_k(\mathbb{C}^n)$?
- Одредити групу $\pi_{2n-2k+1}(V_k(\mathbb{C}^n))$.
- Наћи фундаменталну групу унитарне (тополошке) групе $U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^n)^n \mid A^T \bar{A} = E\}$ ($E \in M_n(\mathbb{C})$ је јединична матрица).