ТЕОРИЈА ХОМОТОПИЈЕ – ДОМАЋИ ЗАДАЦИ

1. Нека је $p : E \to B$ фибрација и $f : X \to B$ (непрекидно) пресликавање.

(а) Ако је $\widehat{f} : X \to E$ подизање пресликавања f до на хомотопију ($p \circ \widehat{f} \simeq f$), доказати да постоји право подизање $\widetilde{f} : X \to E$ пресликавања f ($p \circ \widetilde{f} = f$) такво да је $\widetilde{f} \simeq \widehat{f}$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\widehat{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad p \circ \widehat{f} \simeq f \qquad\qquad \begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad p \circ \widetilde{f} = f$$

(б) Ако је $g : X \to B$ и $g \simeq f$, доказати да се g подиже до E ако и само ако се f подиже до E.

2. Нека је $i : A \hookrightarrow X$ кофибрација и $f : A \to Y$ (непрекидно) пресликавање.

(а) Ако је $\widehat{f} : X \to Y$ проширење пресликавања f до на хомотопију ($\widehat{f} \circ i \simeq f$), доказати да постоји право проширење $\overline{f} : X \to Y$ пресликавања f ($\overline{f} \circ i = f$) такво да је $\overline{f} \simeq \widehat{f}$.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\widehat{f}"'] \\ Y & A \arrow[l, "f"] \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd} \qquad \widehat{f} \circ i \simeq f \qquad\qquad \begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dashed, "\overline{f}"'] \\ Y & A \arrow[l, "f"] \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd} \qquad \overline{f} \circ i = f$$

(б) Ако је $g : A \to Y$ и $g \simeq f$, доказати да се g проширује на X ако и само ако се f проширује на X.

3. Нека је A затворен потпростор од X такав да пар (X, A) има својство проширења хомотопије (инклузија $j : A \hookrightarrow X$ јесте кофибрација).

(а) Ако је $j_1 : X \hookrightarrow C_j = X \cup CA$ инклузија (природно утапање) простора X у конус пресликавања j, доказати да је и j_1 кофибрација. [Упутство]

(б) Доказати да је и инклузија $CA \hookrightarrow X \cup CA$ такође кофибрација.

(в) Нека је $C_{j_1} = (X \cup CA) \cup CX$ конус пресликавања j_1, $h_2 : (X \cup CA) \cup CX \to SA$ пресликавање из овог конуса у суспензију од A добијено скупљањем конуса CX у тачку и $q_2 : (X \cup CA) \cup CX \to SX$ пресликавање које се добија скупљањем потпростора $X \cup CA$ у тачку. Доказати да је $Sj \circ r \circ h_2 \simeq q_2$, где је $Sj : SA \hookrightarrow SX$ суспензија инклузије j ($Sj[a, t] = [j(a), t] = [a, t]$), а $r : SA \to SA$ рефлексија ($r[a, t] = [a, 1 - t]$).

(г) Ако је Y путно повезан простор, доказати да постоји (*Пупеов*) тачан низ:

$$[SX, Y] \xrightarrow{(Sj)^*} [SA, Y] \longrightarrow [X/A, Y] \xrightarrow{q^*} [X, Y] \xrightarrow{j^*} [A, Y],$$

где је $q : X \to X/A$ природна сурјекција. [Упутство]

(д) Формулисати и доказати својство природности Пупеовог тачног низа.

4. Нека је $f : X \to Y$ непрекидно пресликавање. Означимо са $j : X \hookrightarrow M_f$ природно утапање простора X у цилиндар пресликавања f, $M_f := (X \times I \sqcup Y)/_{(x,0) \sim f(x)}$, $j(x) := [(x, 1)]$, $x \in X$. Нека је $i_Y : Y \hookrightarrow M_f$, $i_Y(y) := [y]$, $y \in Y$, природно утапање простора Y у M_f, а $h_f : M_f \to Y$ њему инверзна хомотопска еквиваленција, $h_f[(x, t)] := f(x)$ за $(x, t) \in X \times I$, $h_f[y] := y$ за $y \in Y$. Означимо још са $i : Y \hookrightarrow C_f$ природно утапање простора Y у конус пресликавања f, $C_f := (X \times I \sqcup Y)/ {\substack{(x,0) \sim f(x) \\ (x_1,1) \sim (x_2,1)}}$, $i(y) := [y]$, $y \in Y$.

Као што је и уобичајено, надаље слику датог простора при утапању не разликујемо од самог простора, па је, у том смислу, $X = j(X) \subset M_f$, $Y = i_Y(Y) \subset M_f$ и $Y = i(Y) \subset C_f$. Уочимо природне сурјекције настале скупљањем у тачку одговарајућих потпростора: $q : M_f \to C_f = M_f/X$, $q_Y : C_f \to SX = C_f/Y$, $\pi : C_j = M_f \cup CX \to C_f = (M_f \cup CX)/CX$ и $p : C_j = M_f \cup CX \to SX = (M_f \cup CX)/M_f$.

(а) Доказати да прва два од наредна три дијаграма комутирају, а да трећи комутира до на хомотопију ($q_Y \circ \pi \simeq p$).

$$
\begin{tikzcd}
 & M_f \arrow[d, "h_f"] \\
X \arrow[ur, hook, "j"] \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M_f \arrow[dr, "q"] & \\
Y \arrow[u, hook, "i_Y"] \arrow[r, hook, "i"] & C_f
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M_f \cup CX \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "p"'] & & C_f \arrow[dl, "q_Y"] \\
 & SX &
\end{tikzcd}
$$

(б) Ако је Z путно повезан простор, доказати да је следећи низ тачан.

$$[SY, Z] \xrightarrow{(Sf)^*} [SX, Z] \xrightarrow{q_Y^*} [C_f, Z] \xrightarrow{i^*} [Y, Z] \xrightarrow{f^*} [X, Z],$$

(Овај низ се назива *Пупеовим тачним низом придруженим пресликавању f и простору Z.*)

[Упутство]

(в) Формулисати и доказати својство природности овог Пупеовог тачног низа.

5. Ако је X H-простор с неутралом e и $(X, e) \simeq (Y, y_0)$, доказати да је Y H-простор с неутралом y_0.

6. Нека је X H-простор, $\mu : X \times X \to X$ одговарајућа операција, а e неутрал.

(а) Ако су дата непрекидна пресликавања $\varphi, \psi : (S^n, e_1) \to (X, e)$ $(n \in \mathbb{N})$, доказати да у групи $\pi_n(X, e)$ важи: $[\varphi]_0 + [\psi]_0 = [\mu \circ (\varphi, \psi)]_0$.

(б) Ако је $m \in \mathbb{N}$, наћи пресликавање $f : (X, e) \to (X, e)$ такво да за све $n \in \mathbb{N}$ важи да је хомоморфизам $f_* : \pi_n(X, e) \to \pi_n(X, e)$ множење са m.

7. Нека је X тополошки простор, $A \subseteq X$ и $i : A \hookrightarrow X$ инклузија.

(а) Ако је $u : I \to A$ пут у потпростору A, $a_0 = u(0)$ и $a_1 = u(1)$, доказати да комутира наредни дијаграм (водоравни низови су дуги тачни низови хомотопских група за пар (X, A)).

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_n(A, a_0) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\beta_u"'] & \pi_n(X, a_0) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_{i\circ u}"'] & \pi_n(X, A, a_0) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\beta_u"'] & \pi_{n-1}(A, a_0) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_u"'] & \cdots \arrow[r] & \pi_1(A, a_0) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\beta_u"'] & \pi_1(X, a_0) \arrow[d, "\beta_{i\circ u}"'] \\
\cdots \arrow[r] & \pi_n(A, a_1) \arrow[r, "i_*"] & \pi_n(X, a_1) \arrow[r] & \pi_n(X, A, a_1) \arrow[r, "\partial"] & \pi_{n-1}(A, a_1) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \pi_1(A, a_1) \arrow[r, "i_*"] & \pi_1(X, a_1)
\end{tikzcd}
$$

(б) Нека је $a_0 \in A$. Знамо да фундаментална група $\pi_1(A, a_0)$ дејствује на групе $\pi_n(A, a_0)$, $n \geqslant 1$, и $\pi_n(X, A, a_0)$, $n \geqslant 2$, али она дејствује и на групе $\pi_n(X, a_0)$, $n \geqslant 1$ (то дејство је композиција $\pi_1(A, a_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, a_0) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\pi_n(X, a_0))$, где је друга стрелица познато дејство фундаменталне групе $\pi_1(X, a_0)$ на $\pi_n(X, a_0)$). Доказати да су сви хомоморфизми у дугом тачном низу хомотопских група за пар (X, A)

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(A, a_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, a_0) \longrightarrow \pi_n(X, A, a_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, a_0) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \pi_1(A, a_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, a_0)$$

$\pi_1(A, a_0)$-еквиваријантна пресликавања. [Дефиниција еквиваријантног пресликавања]

8. Нека је $p : E \to B$ m-еквиваленција, а X n-димензион CW-комплекс $(m, n \in \mathbb{N}_0)$.

(а) Ако је $m > n$, доказати да за свака два непрекидна пресликавања $f, g : X \to E$ важи следећа еквиваленција: $f \simeq g \iff p \circ f \simeq p \circ g$.

(б) Ако је $m > n$, доказати да је $p_* : [X, E] \to [X, B]$ бијекција.

(в) Ако је $m = n$, доказати да је $p_* : [X, E] \to [X, B]$ сурјекција.

9. Доказати да је скуп хомотопских класа пресликавања пројективног простора $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ у самог себе (тј. скуп $[\mathbb{R}\mathrm{P}^n, \mathbb{R}\mathrm{P}^n]$) бесконачан за свако $n \in \mathbb{N}$. [Упутство]

10. За свако $n \in \mathbb{N}$ испитати да ли је количнички простор $\mathbb{R}\mathrm{P}^n / \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ ретракт простора $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n+1} / \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$.

[Упутство]

11. Нека је X тополошки простор. Доказати да су следећи искази међусобно еквивалентни.

(1) X је контрактибилан.

(2) За произвољан тополошки простор Y важи $X \times Y \simeq Y$.

(3) Постоји $n \in \mathbb{N}_0$такво да важи $X \times S^n \simeq S^n$. [Упутство]

12. Одредити групу $\pi_2(S^1 \vee S^2)$. [Упутство]

13. Нека је X просто повезан CW-комплекс, $n \geqslant 2$ и $f : S^n \to X$ непрекидно пресликавање. Ако је $h\big([f]_0\big) = 0$, где је $h : \pi_n(X, f(e_1)) \to H_n(X)$ Хуревићев хомоморфизам, доказати да је f хомотопно пресликавању $g : S^n \to X$ таквом да је $g(S^n) \subseteq X^{n-1}$. [Упутство]

14. Нека је $f : X \to Y$ непрекидно пресликавање између CW-комплекса X и Y. Нека су $p : \widetilde{X} \to X$ и $q : \widetilde{Y} \to Y$ њихова универзална наткривања (p и q су наткривања, а $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ просто повезани).

(а) Доказати да постоји (непрекидно) $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ које „наткрива” f (такво да је $q \circ \widetilde{f} = f \circ p$).

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, dashed, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & \widetilde{Y} \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

(б) Ако је $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ изоморфизам и ако је за свако $n \geqslant 2$ и $\widetilde{f}_* : H_n(\widetilde{X}) \to H_n(\widetilde{Y})$ изоморфизам, доказати да је f хомотопска еквиваленција.

15. Нека је $p : E \to B$ (Серова) фибрација, $e_0 \in E$, $b_0 = p(e_0) \in B$, E_0 компонента путне повезаности (простора E) која садржи тачку e_0 и B_0 компонента путне повезаности (простора B) која садржи тачку b_0. Доказати да је $p(E_0) = B_0$ и да је рестрикција $p|_{E_0} : E_0 \to B_0$ пресликавања p (с кодоменом суженим на B_0) такође (Серова) фибрација.

16. Нека је (X, A) тополошки пар.

(а) Претпоставимо да је A јаки деформациони ретракт од X и нека је $H : X \times I \to X$ пресликавање које остварује хомотопију релативно A између $i \circ r$ и $\mathbf{1}_X$ ($i : A \hookrightarrow X$ јесте инклузија, а $r : X \to A$ ретракција), тј. $H : i \circ r \simeq \mathbf{1}_X \ (\mathrm{rel}\, A)$. Претпоставимо још и да имамо непрекидно пресликавање $\alpha : X \to I$ такво да је $\alpha^{-1}(\{0\}) = A$ и дефинишимо $\varphi : X \times I \to I$ на следећи начин:

$$\varphi(x,t) := \begin{cases} \min\{1, \frac{t}{\alpha(x)}\}, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases}, \quad (x,t) \in X \times I.$$

Ако је $D : X \times I \to X$ пресликавање дефинисано са $D(x,t) := H(x, \varphi(x,t))$, $(x,t) \in X \times I$, доказати да је D непрекидно. [Упутство]

(б) Ако је (X, A) DR-пар и ако пресликавање $p : E \to B$ има својство подизања хомотопије (HLP) у односу на X, доказати да онда p има својство проширења подизања (LEP) у односу на пар (X, A). [Упутство]

17. Доказати да Серова фибрација има својство подизања хомотопије (HLP) у односу на све ћелијске комплексе. [Упутство]

18. Нека је $p : E \to B$ фибрација, B путно повезан, $b_1, b_2 \in B$ и нека су F_{b_1} и F_{b_2} одговарајући слојеви. Доказати да је дејство (до на хомотопију) групе $\pi_1(B, b_1)$ на F_{b_1} тривијално ако и само ако је дејство (до на хомотопију) групе $\pi_1(B, b_2)$ на F_{b_2} тривијално. [Упутство]

19. Нека је $p : E \to B$ Серова фибрација и $n \in \mathbb{N}_0$.

(а) Нека је $f : X \to B$ непрекидно пресликавање, $f^*p : f^*(E) \to X$ повлачење Серове фибрације p помоћу f и $q : f^*(E) \to E$ рестрикција друге пројекције на $f^*(E)$.

$$\begin{tikzcd} f^*(E) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f^*p"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Ако је f n-еквиваленција, доказати да је онда и q n-еквиваленција. [Упутство]

(б) Ако је $A \subseteq B$ такав да је пар (B, A) n-повезан, доказати да је онда и пар $(E, p^{-1}(A))$ такође n-повезан.

20. *Шварцов род* фибрације $p : E \to B$, у означи $\mathrm{SG}(p)$, дефинишемо као најмањи број $k \in \mathbb{N}$ такав да постоји отворен покривач $\{U_1, U_2, \ldots, U_k\}$ простора B са својством да p има секцију над сваким елементом покривача, тј. да за све $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ постоји подизање $s_i : U_i \to E$ инклузије $U_i \hookrightarrow B$ у односу на p (в. први дијаграм на наредној слици).

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ U_i \arrow[r, hook] \arrow[ur, dashed, "s_i"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & T \arrow[dl, "q"] \\ & B & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f^*(E) \arrow[r] \arrow[d, "f^*p"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

(а) Ако је $p : E \to B$ фибрација и B контрактибилан, доказати да је $\mathrm{SG}(p) = 1$. [Упутство]

(б) Ако су $p : E \to B$ и $q : T \to B$ фибрације такве да постоји (непрекидно) $\varphi : E \to T$ са својством $q \circ \varphi = p$ (в. други дијаграм на претходној слици), доказати да је $\mathrm{SG}(q) \leqslant \mathrm{SG}(p)$.

(в) Ако је $p : E \to B$ фибрација, $f : X \to B$ непрекидно пресликавање и $f^*p : f^*(E) \to X$ повлачење фибрације p помоћу f (в. трећи дијаграм на претходној слици), доказати да је $\mathrm{SG}(f^*p) \leqslant \mathrm{SG}(p)$.

Нека је сад X путно повезан простор.

(г) Наћи фибрацију p чији је Шварцов род једнак Љустерник–Шнирелмановој категорији простора X ($\mathrm{SG}(p) = \mathrm{cat}(X)$). [Дефиниција Љустерник–Шнирелманове категорије]

Нека је $\pi : X^I \to X \times X$ пресликавање дефинисано са $\pi(\omega) = (\omega(0), \omega(1))$, $\omega \in X^I$.

(д) Доказати да је π фибрација и одредити њен слој. [Упутство]

Тополошку комплексност простора X, у означи $\mathrm{TC}(X)$, дефинишемо као Шварцов род фибрације π:

$$\mathrm{TC}(X) := \mathrm{SG}(\pi).$$

(ђ) Доказати да је $\mathrm{TC}(X) = 1$ ако и само ако је X контрактибилан. [Упутство]

(е) Доказати да је $\mathrm{cat}(X) \leqslant \mathrm{TC}(X) \leqslant \mathrm{cat}(X \times X)$. [Упутство]

21. Ако је F хомотопски слој инклузије $i : \mathbb{R}\mathrm{P}^n \hookrightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$, доказати да је $F \simeq S^n$ ($n \in \mathbb{N}$). [Упутство]

22. Нека је $0 \to A \longrightarrow B \longrightarrow C \to 0$ кратак тачан низ Абелових група и $n \in \mathbb{N}$. Доказати да постоји фибрација $p : K(B, n) \to K(C, n)$ са слојем $K(A, n)$. [Упутство]

$$\begin{tikzcd} K(A,n) \arrow[r] & K(B,n) \arrow[d, "p"] \\ & K(C,n) \end{tikzcd}$$

23.
- Одредити следеће хомотопске групе (K је Клајнова боца):
  $\pi_4(K)$, $\pi_{17}(\mathbb{R}\mathrm{P}^{18})$, $\pi_{11}(S(S^{10} \times S^{10}))$, $\pi_{17}(\Omega S^{17})$.
- Одредити кардиналност скупа хомотопских класа $[D^3, \Omega(\mathbb{R}\mathrm{P}^3)]$.
- Наћи потребан и довољан услов за k и n да би букет $S^k \vee S^n \vee S^k \vee S^n$ био прост ($k, n \in \mathbb{N}$).

24. Ако је X произвољан CW-комплекс, доказати да је пресликавање $\Phi : [X, L_m^\infty]_0 \to [X, L_m^\infty]$ бијекција. (L_m^∞ је бесконачно димензиони лећасти простор, $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Φ је дато са $\Phi([f]_0) = [f]$, $[f]_0 \in [X, L_m^\infty]_0$.)

25. Нека је Y путно повезан простор с базном тачком y_0. Ако је $p : E \to X$ главна фибрација добијена повлачењем канонске фибрације над Y помоћу пресликавања $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, доказати да је простор $E = f^*(PY)$ управо хомотопски слој пресликавања f.

26. Нека су $n \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и нека је $L_m^{2n+1} = S^{2n+1}/\mathbb{Z}_m$ лећасти простор (елемент $k \in \mathbb{Z}_m$ дејствује на S^{2n+1} као множење са $e^{i\frac{2k\pi}{m}}$).

(а) Доказати да постоји раслојење $q : L_m^{2n+1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ са слојем S^1. [Упутство]

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r] & L_m^{2n+1} \arrow[d, "q"] \\ & \mathbb{C}\mathrm{P}^n \end{tikzcd}$$

(б) Описати повезујући хомоморфизам $\pi_2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \to \pi_1(S^1)$ из дугог тачног низа придруженог раслојењу из дела (а).

27. Да ли је $\mathbb{C}\mathrm{P}^2 \simeq S^2 \vee S^4$?

28. Ако је $k \in \mathbb{Z}$ и $f : S^2 \to S^2$ пресликавање степена k, одредити хомоморфизам $f_* : \pi_3(S^2) \to \pi_3(S^2)$.
[Упутство]

29. Нека је $i : S^2 \hookrightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ инклузија, тј. природно утапање ($S^2 \approx \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ јесте 2-скелет од $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ при уобичајеној ћелијској декомпозицији овог простора).

(а) Доказати да је пресликавање $f : S^2 \to S^2$ хомотопски тривијално ако и само ако се може проширити на $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$. [Упутство]

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}\mathrm{P}^2 \arrow[dr, dashed] & \\ S^2 \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "f"] & S^2 \end{tikzcd}$$

(б) Користећи чињеницу $\pi_1^S = \mathbb{Z}_2$ (или некако другачије) доказати да је $[\mathbb{C}\mathrm{P}^2, S^2] = 0$. [Упутство]

30. Нека је $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$, M многострукост и $p : S^{m+n-1} \to M$ раслојење са слојем S^{n-1}.

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r] & S^{m+n-1} \arrow[d, "p"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Доказати да је тада конус пресликавања p, тј. $C_p = D^{m+n} \cup_p M$, затворена повезана $(m+n)$-димензиона многострукост. [Упутство]

31. Користећи чињеницу $\pi_1^S = \mathbb{Z}_2$ (или некако другачије) одредити групе $\pi_3(SO(4))$ и $\pi_3(V_2(\mathbb{R}^4))$.

32. (Подразумевамо да су сви простори који се појављују у овом задатку Хауздорфови.)
Нека група G дејствује на простор Y. Уочимо следећи услов:

$$(\forall y \in Y)\,(\exists U \in \mathcal{T}_Y) \quad y \in U \,\wedge\, \big[(\forall g_1, g_2 \in G)\;\, g_1 \neq g_2 \implies g_1U \cap g_2U = \emptyset\big]. \qquad (*)$$

Доказати:

(а) $(*) \Rightarrow$ дејство је слободно;

(б) ако је G коначна и дејство слободно, онда важи $(*)$.

Нека G дејствује и на простор X и нека је $f : X \to Y$ непрекидно G-еквиваријантно пресликавање.
[Дефиниција еквиваријантног пресликавања]

(в) Доказати да f индукује непрекидно пресликавање $\widetilde{f} : X/G \to Y/G$ такво да комутира дијаграм на слици (ρ и π су природне сурјекције).

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho"'] & Y \arrow[d, "\pi"] \\ X/G \arrow[r, dashed, "\widetilde{f}"] & Y/G \end{tikzcd}$$

(г) Ако дејство на Y задовољава услов $(*)$, доказати да онда и дејство на X задовољава услов $(*)$.

Нека је сада $p : E \to B$ раслојење и нека група G дејствује и на E и на B тако да је p G-еквиваријантно и да дејство G на B задовољава услов $(*)$.

(д) Доказати да је индуковано пресликавање $\widetilde{p} : E/G \to B/G$ такође раслојење са истим слојем као p.
[Упутство]

(ђ) Ако је $\pi : B \to B/G$ природна сурјекција, доказати да се повлачење раслојења $\widetilde{p}$ помоћу π (означимо га са $\pi^*\widetilde{p} : \pi^*(E/G) \to B$) поклапа са p (у смислу да постоји хомеоморфизам φ тако да комутира дијаграм на слици). [Упутство]

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi", "\approx"'] \arrow[dr, "p"'] & & \pi^*(E/G) \arrow[dl, "\pi^*\widetilde{p}"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

33. Група $\mathbb{Z}_2$ дејствује на природан начин на Штифелову многострукост $V_k(\mathbb{R}^n)$:

$$(v_1, v_2, \ldots, v_k) \mapsto (-v_1, -v_2, \ldots, -v_k).$$

(На пример, $V_1(\mathbb{R}^n)/\mathbb{Z}_2 = S^{n-1}/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$.) При том дејству је раслојење $p : V_m(\mathbb{R}^n) \to V_k(\mathbb{R}^n)$, $(v_1, v_2, \ldots, v_m) \mapsto (v_1, v_2, \ldots, v_k)$, $\mathbb{Z}_2$-еквиваријантно пресликавање ($k \leqslant m$).

Доказати да за $k, n \in \mathbb{N}$ постоји $\mathbb{Z}_2$-еквиваријантно пресликавање $S^n \to V_{n+1}(\mathbb{R}^{n+k+1})$ ако и само ако постоји подизање инклузије $\mathbb{R}\mathrm{P}^n \hookrightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^{n+k}$ у односу на пресликавање $\widetilde{p}$, где је $\widetilde{p} : V_{n+1}(\mathbb{R}^{n+k+1})/\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n+k}$ индуковано пресликавањем $p : V_{n+1}(\mathbb{R}^{n+k+1}) \to S^{n+k}$. [Упутство]

$$\begin{tikzcd}
 & V_{n+1}(\mathbb{R}^{n+k+1})/\mathbb{Z}_2 \arrow[d, "\widetilde{p}"] \\
\mathbb{R}\mathrm{P}^n \arrow[r, hook] \arrow[ur, dashed] & \mathbb{R}\mathrm{P}^{n+k}
\end{tikzcd}$$

34. Нека је $1 \leqslant k \leqslant n$ и $V_k(\mathbb{C}^n) = \big\{(v_1, v_2, \ldots, v_k) \in (\mathbb{C}^n)^k \mid (\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, k\})\, \langle v_i, v_j \rangle = \delta_i^j \big\}$, где је $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ стандардни скаларни (хермитски) производ на $\mathbb{C}^n$.

(а) Доказати да је $V_k(\mathbb{C}^n)$ $(2n - 2k)$-повезана затворена многострукост.

(б) Колика је димензија Штифелове многострукости $V_k(\mathbb{C}^n)$?

(в) Одредити групу $\pi_{2n-2k+1}(V_k(\mathbb{C}^n))$.

(г) Наћи фундаменталну групу унитарне (тополошке) групе $U(n) = \big\{A \in M_n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^n)^n \mid A^T \overline{A} = E\big\}$ ($E \in M_n(\mathbb{C})$ је јединична матрица).