Криве другог реда

Крива другог реда је скуп тачака равни $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ које задовољавају једначину

$$f(x_1, x_2) = 0, \tag{1}$$

где је f полином другог степена по x_1 и x_2 са реалним коефицијентима. Другим речима, важи

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33}, \tag{2}$$

где су $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33} \in \mathbb{R}$, при чему је $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 > 0$ (постоји барем један квадратни члан). Циљ којем тежимо је класификација кривих другог реда, односно желимо да геометријски опишемо све могуће скупове тачака који задовољавају једначину (1).

Уколико постоји члан $a_{12} \neq 0$, то геометријски значи да је крива некако искошена у постојећем координатном систему. Идеја је да потражимо нови координатни систем у коме ће она бити исправљена, односно нема члан a_{12}. То можемо постићи ротацијом координатног система око координатног почетка за неки угао $\theta \in \mathbb{R}$ (односно ротацијом тачака око координатног почетка за угао $-\theta$), при чему нам једначине ротације омогућавају везу

$$x_1 = x_1' \cos\theta - x_2' \sin\theta, \quad x_2 = x_1' \sin\theta + x_2' \cos\theta. \tag{3}$$

На овај начин, једначина криве (1) (у пакету са (2)) се ротацијом трансформише у нову једначину

$$a_{11}' {x_1'}^2 + 2a_{12}'x_1'x_2' + a_{22}'{x_2'}^2 + 2a_{13}'x_1' + 2a_{23}'x_2' + a_{33}' = 0, \tag{4}$$

где је $2a_{12}' = -2a_{11}\cos\theta\sin\theta + 2a_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2a_{22}\cos\theta\sin\theta$. Одавде је

$$a_{12}' = a_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (a_{22} - a_{11})\cos\theta\sin\theta,$$

што због тригонометријских формула $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta)$ и $2\cos\theta\sin\theta = \sin(2\theta)$ постаје

$$a_{12}' = a_{12}\cos(2\theta) + (a_{22} - a_{11})\frac{1}{2}\sin(2\theta).$$

Потребно нам је такво θ које ће анулирати коефицијент a_{12}', али из претходне једначине је очигледно да се то дешава за

$$\mathrm{ctg}(2\theta) = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}.$$

Приметимо да овде немамо проблем дељења нулом, јер у случају $a_{12} = 0$ крива је већ исправљена и непотребно је ротирати. Дакле, ако координатне осе заротирамо за угао

$$\theta = \frac{1}{2}\,\mathrm{arcctg}\,\frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$$

око координатног почетка, једначина (1) прелази у једначину (4) за коју је $a_{12}' = 0$. На овај начин уклонили смо један коефицијент једначине криве, те даље можемо посматрати криву чија једначина има општи облик

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0. \tag{5}$$

Како више нема микс члана, променљиве x_1 и x_2 су раздвојене, те за $i = 1, 2$ уколико је $a_{ii} \neq 0$, можемо посматрати израз $a_{ii}x_i^2 + 2a_{i3}x_i$. Тада се стандардно извлачи a_{ii} испред заграде, у којој се креира потпун квадрат на следећи начин

$$a_{ii}x_i^2 + 2a_{i3}x_i = a_{ii}\left(x_i^2 + 2x_i\frac{a_{i3}}{a_{ii}} + \left(\frac{a_{i3}}{a_{ii}}\right)^2\right) - \frac{a_{i3}^2}{a_{ii}} = a_{ii}\left(x_i + \frac{a_{i3}}{a_{ii}}\right)^2 - \frac{a_{i3}^2}{a_{ii}}.$$

Овога пута транслирамо x_i координату са $x_i' = x_i + a_{i3}/a_{ii}$, што суштински уклања коефицијент уз x_i, односно анулира a_{i3}. Наравно, уколико нема квадрата због $a_{ii} = 0$ тада већ имамо један коефицијент мање.

Веома је важно да су трансформације које примењујемо изометријске трансформације, односно да оне чувају дужину дужи, или еквивалентно скаларни производ. Због тога је било битно извући a_{ii} испред заграде у претходном кораку. У сваком случају ротација и транслација јесу изометријске трансформације и то су прва два корака у третману којим криву доводимо до канонског облика.

На претходно описан начин, из опште једначине (5) уклонићемо још два коефицијента, али је неопходно дискутовати случајеве. Уколико су оба квадратна коефицијента различита од нуле, $a_{11}a_{22} \neq 0$, тада транслација $x_1 = x_1' - a_{13}/a_{11}, \ x_2 = x_2' - a_{23}/a_{22}$ елиминише линеарне коефицијенте из једначине (5) која добија облик

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33} = 0. \tag{6}$$

У првој варијанти квадратни коефицијенти су истог знака, $a_{11}a_{22} > 0$, те дискутујемо знак од a_{33}. Ако се знакови разликују, $a_{11}a_{33} < 0$, уводимо $a = \sqrt{-a_{33}/a_{11}}$ и $b = \sqrt{-a_{33}/a_{22}}$, одакле добијамо

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1,}$$

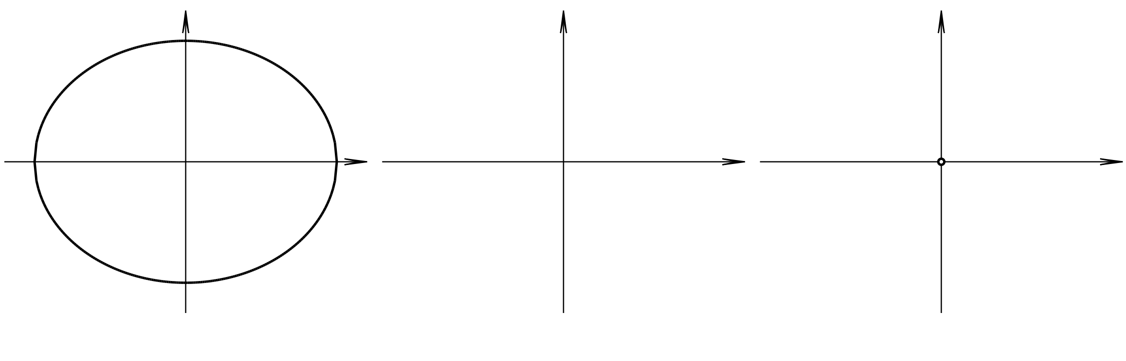
што је канонска једначина **елипсе**. У овом случају додатно можемо захтевати услов $a \geqslant b > 0$ (посебно за $a = b$ имамо круг као специјални случај елипсе), јер у супротном изометријска трансформација $x_1 = x_2', \ x_2 = x_1'$ је осна рефлексија у односу на праву $x_1 = x_2$ која окреће координате x_1 и x_2, те самим тим и бројеви a и b мењају места. Ако су сви коефицијенти истог знака, $a_{11}a_{33} > 0$, тада за $a = \sqrt{a_{33}/a_{11}}$ и $b = \sqrt{a_{33}/a_{22}}$ добијамо једначину

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = -1,}$$

а како збир квадрата никад није негативан, нема тачака које ће је задовољити. Дакле, ова крива је **празан скуп**, али суштински у питању је *имагинарна елипса*, што се види ако проблем посматрамо у комплексној равни. Преостаје случај $a_{33} = 0$ који после смене $a = 1$ и $b = \sqrt{a_{11}/a_{22}}$ даје једначину

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 0,}$$

коју испуњава само координатни почетак, те је у питању **тачка**. Проблем се може посматрати и у комплексној равни где је решење *пар имагинарних правих које се секу* баш у тој реалној тачки.



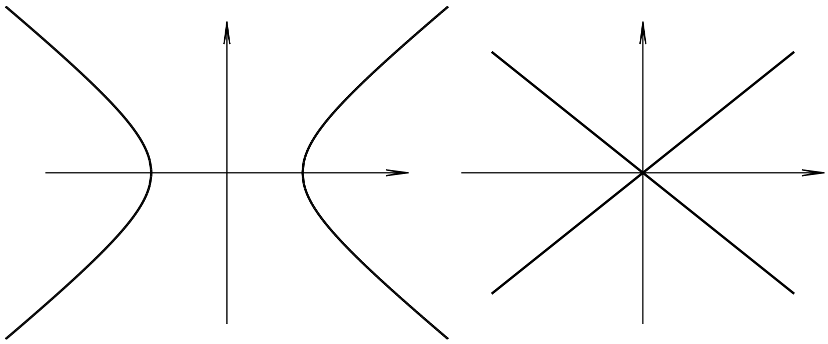
У другој варијанти квадратни коефицијенти су различитог знака, $a_{11}a_{22} < 0$, те дискутујемо знак од a_{33}. Ако је $a_{33} \neq 0$, не умањујући општост можемо претпоставити да важи $a_{11}a_{33} < 0$, јер иначе можемо применити већ виђену осну рефлексију $x_1 = x_2', \ x_2 = x_1'$ која размењује координатне осе, а самим тим и квадратне коефицијенте. За $a = \sqrt{-a_{33}/a_{11}}$ и $b = \sqrt{a_{33}/a_{22}}$ добијамо једначину

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1,}$$

што је канонска једначина **хиперболе**. У случају $a_{33} = 0$ за $a = 1$ и $b = \sqrt{-a_{11}/a_{22}}$ добијамо једначину

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 0,}$$

која представља **две праве које се секу**. Наравно, једначине тих правих су $x_1/a \pm x_2/b = 0$.



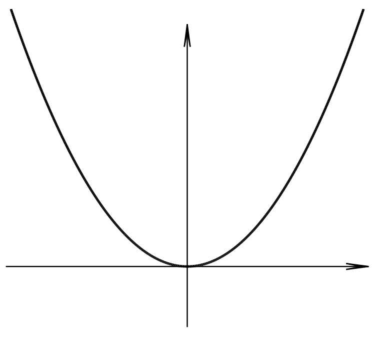
Овим смо исцрпели све могућности из једначине (6) која је проистекла из услова $a_{11}a_{22} \neq 0$. Како испитујемо криву другог реда, она мора имати барем један квадратни члан, те преостаје случај кад је тачно један од квадратних коефицијената различит од нуле. Не умањујући општост, можемо претпоставити да је $a_{11} \neq 0$ и $a_{22} = 0$, иначе, као и раније, користимо осну рефлексију да разменимо x_1 и x_2 осу. Тада транслација $x_1 = x_1' - a_{13}/a_{11},\ x_2 = x_2'$ елиминише коефицијент a_{13} и једначина (5) постаје

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0. \tag{7}$$

У првој варијанти размотримо $a_{23} \neq 0$. Тада додатна транслација $x_1 = x_1',\ x_2 = x_2' - a_{33}/(2a_{23})$ уклања слободан члан a_{33}, те једначина (7) постаје облика $a_{11}x_1^2 + 2a_{23}x_2 = 0$. Једноставна смена $p = -a_{23}/a_{11}$ доноси

$$\boxed{x_1^2 = 2px_2,}$$

што је једначина **параболе**. Уколико је $p < 0$ додатно можемо окренути смер x_2 оси тако што применимо изометријску трансформацију $x_1 = x_1',\ x_2 = -x_2'$, која ће обезбедити канонско ограничење $p > 0$.



У последњој варијанти имамо $a_{23} = 0$. Једначина (7) је тада облика $a_{11}x_1^2 + a_{33} = 0$, односно

$$\boxed{x_1^2 = c,}$$

што дискутујемо по $c = -a_{33}/a_{11}$. Уколико је $c > 0$ у питању су **паралелне праве** $x_1 = \pm\sqrt{c}$, док $c = 0$ даје једну **праву** $x_1 = 0$. У случају $c < 0$ једначина нема решења, односно у питању је **празан скуп**, што у комплексној равни представља *две паралелне имагинарне праве*.