

Дискретне структуре 1

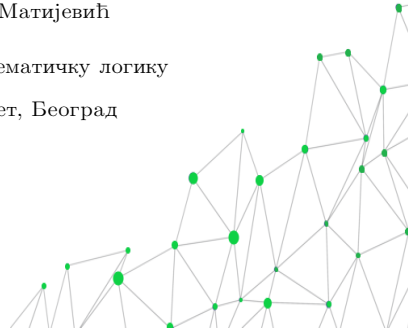
предавање 3 (20.10.2026.)

Тема: РЕЛАЦИЈЕ ЕКВИВАЛЕНЦИЈЕ И
РЕЛАЦИЈЕ ПОРЕТКА

Александра Костић Матијевић

Катедра за алгебру и математичку логику

Математички факултет, Београд



Релације еквиваленције - дефиниција и примери

дефиниција: Нека је ρ бинарна релација на скупу A . Кажемо да је ρ **релација еквиваленције**, ако је рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Релације еквиваленције - дефиниција и примери

дефиниција: Нека је ρ бинарна релација на скупу A . Кажемо да је ρ **релација еквиваленције**, ако је рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Релација ρ је релација еквиваленције на скупу A ако важи

$$\Delta_A \subseteq \rho, \quad \rho = \rho^{-1}, \quad \rho \circ \rho = \rho.$$

Релације еквиваленције - дефиниција и примери

дефиниција: Нека је ρ бинарна релација на скупу A . Кажемо да је ρ **релација еквиваленције**, ако је рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Релација ρ је релација еквиваленције на скупу A ако важи

$$\Delta_A \subseteq \rho, \quad \rho = \rho^{-1}, \quad \rho \circ \rho = \rho.$$

Примери релација еквиваленције:

- Релација једнакости реалних бројева.

Релације еквиваленције - дефиниција и примери

дефиниција: Нека је ρ бинарна релација на скупу A . Кажемо да је ρ **релација еквиваленције**, ако је рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Релација ρ је релација еквиваленције на скупу A ако важи

$$\Delta_A \subseteq \rho, \quad \rho = \rho^{-1}, \quad \rho \circ \rho = \rho.$$

Примери релација еквиваленције:

- Релација једнакости реалних бројева.
- Релација сличности у скупу троуглова еуклидске равни.

Релације еквиваленције - дефиниција и примери

дефиниција: Нека је ρ бинарна релација на скупу A . Кажемо да је ρ **релација еквиваленције**, ако је рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Релација ρ је релација еквиваленције на скупу A ако важи

$$\Delta_A \subseteq \rho, \quad \rho = \rho^{-1}, \quad \rho \circ \rho = \rho.$$

Примери релација еквиваленције:

- Релација једнакости реалних бројева.
- Релација сличности у скупу троуглова еуклидске равни.
- Нека је $m \geq 2$. Релација $\equiv_m$ дефинисана на скупу $\mathbb{Z}$ са:

$$x \equiv_m y \quad \text{ако} \quad m \mid x - y$$

је релација еквиваленције.

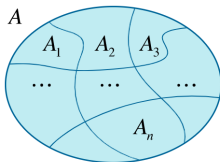
Класе еквиваленције

A – скуп људи који живе у једној држави X

$A_1, A_2, \dots, A_n$ – скуп градова државе X

На скупу A дефинисана је релација $\sim \subseteq A^2$ на следећи начин:

$P_1 \sim P_2$ акко особа P_1 живи у истом граду као и особа P_2 .



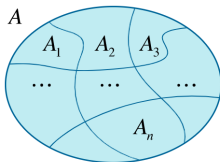
Класе еквиваленције

A – скуп људи који живе у једној држави X

$A_1, A_2, \dots, A_n$ – скуп градова државе X

На скупу A дефинисана је релација $\sim \subseteq A^2$ на следећи начин:

$P_1 \sim P_2$ акко особа P_1 живи у истом граду као и особа P_2 .



дефиниција: Нека је $\sim$ релација еквиваленције на скупу A . **Класа еквиваленције** елемента $a \in A$ је скуп

$$C_a = \{x \in A \mid a \sim x\} \subseteq A.$$

Означавамо је и са $[a]$ и кажамо да је елемент a **представник** класе C_a .

Класе еквиваленције и количнички скуп

Особине класа:

1. Све класе еквиваленције су непразни скупови.
2. Нека је $a, b \in A$. Ако је $C_a \cap C_b \neq \emptyset$, онда је $C_a = C_b$.
3. Унија свих класа еквиваленције је једнака скупу A .

Доказ. На часу.

Класе еквиваленције и количнички скуп

Особине класа:

1. Све класе еквиваленције су непразни скупови.
2. Нека је $a, b \in A$. Ако је $C_a \cap C_b \neq \emptyset$, онда је $C_a = C_b$.
3. Унија свих класа еквиваленције је једнака скупу A .

Доказ. На часу.

Свака релација еквиваленције дели скуп на коме је дефинисана на непразне, дисјунктне скупове чија унија је једнака целом скупу. Таква подела се назива **партиција скупа**.

Класе еквиваленције и количнички скуп

Особине класа:

1. Све класе еквиваленције су непразни скупови.
2. Нека је $a, b \in A$. Ако је $C_a \cap C_b \neq \emptyset$, онда је $C_a = C_b$.
3. Унија свих класа еквиваленције је једнака скупу A .

Доказ. На часу.

Свака релација еквиваленције дели скуп на коме је дефинисана на непразне, дисјунктне скупове чија унија је једнака целом скупу. Таква подела се назива **партиција скупа**.

дефиниција: **Количнички скуп** скупа A за релацију еквиваленције $\sim$ је

$$A/\sim = \{C_x \mid x \in A\}.$$

Приметимо да је $A/\sim \subseteq \mathcal{P}(A)$, јер важи да је $C_a \subseteq A$, за све $a \in A$.

Особине количничког скупа:

1. Ако $X, Y \in A/\sim$ и $X \neq Y$, тада је $X \cap Y = \emptyset$.
2. Важи да је $\bigcup A/\sim = \bigcup_{X \in A/\sim} X = A$.

Релације портека - дефиниција и примери

дефиниција: Нека је ρ бинарна релација на скупу A . Кажемо да је ρ **релација парцијалног уређења** или **поретка**, ако је рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.

Релације портека - дефиниција и примери

дефиниција: Нека је ρ бинарна релација на скупу A . Кажемо да је ρ **релација парцијалног уређења** или **поретка**, ако је рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.

Скуп A на коме је дефинисана релација парцијалног уређења ρ називамо **парцијално уређен скуп** или **посет**.

Релације портека - дефиниција и примери

дефиниција: Нека је ρ бинарна релација на скупу A . Кажемо да је ρ **релација парцијалног уређења** или **поретка**, ако је рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.

Скуп A на коме је дефинисана релација парцијалног уређења ρ називамо **парцијално уређен скуп** или **посет**.

Релација ρ је релација поретка на скупу A ако и само ако важи:

$$\Delta_A \subseteq \rho \quad \rho \cap \rho^{-1} = \Delta_A \quad \rho \circ \rho = \rho.$$

Релације портека - дефиниција и примери

дефиниција: Нека је ρ бинарна релација на скупу A . Кажемо да је ρ **релација парцијалног уређења** или **поретка**, ако је рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.

Скуп A на коме је дефинисана релација парцијалног уређења ρ називамо **парцијално уређен скуп** или **посет**.

Релација ρ је релација поретка на скупу A ако и само ако важи:

$$\Delta_A \subseteq \rho \quad \rho \cap \rho^{-1} = \Delta_A \quad \rho \circ \rho = \rho.$$

Примери релација парцијалног уређења:

1. Релација мање или једнако на скупу реалних бројева: $\leq$.
2. Релација дељивости на скупу природних бројева: $\mid$.
3. Релација инклузије на партитивном скупу неког скупа: $\subseteq$.

Нека је $\rho \subseteq A^2$ поредак. Елементи a и b су **упоредиви** ако важи $a \rho b$ или $b \rho a$.
У супротном, a и b су **неупоредиви**.

$a \rho b$ читамо: a је ρ -мање од b , односно, b је ρ -веће од a .

Нека је $\rho \subseteq A^2$ поредак. Елементи a и b су **упоредиви** ако важи $a\rho b$ или $b\rho a$.
У супротном, a и b су **неупоредиви**.

$a\rho b$ читамо: a је ρ -мање од b , односно, b је ρ -веће од a .

Поредак је **линеаран** (**тоталан**) ако су свака два елемента упоредива.

Уколико нису свака два елемента упоредива, поредак је **парцијалан**.

Линеарно уређен подскуп неког парцијално уређен скуп назива се **ланац**.

Подскупове парцијално уређеног скупа у којима су свака два елемента неупоредива називамо **антиланци**.

Нека је $\rho \subseteq A^2$ поредак. Елементи a и b су **упоредиви** ако важи $a\rho b$ или $b\rho a$.
У супротном, a и b су **неупоредиви**.

$a\rho b$ читамо: a је ρ -мање од b , односно, b је ρ -веће од a .

Поредак је **линеаран** (**тоталан**) ако су свака два елемента упоредива.

Уколико нису свака два елемента упоредива, поредак је **парцијалан**.

Линеарно уређен подскуп неког парцијално уређен скуп назива се **ланац**.

Подскупове парцијално уређеног скупа у којима су свака два елемента неупоредива називамо **антиланци**.

Примери:

1. $\leq$ је линеаран поредак на $\mathbb{R}$,
2. $\mid$ није линеаран поредак на $\mathbb{N}$,
скуп $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ је један ланац на $\mathbb{N}$
3. $\subseteq$ није линеаран поредак на $\mathcal{P}(X)$, за произвољан скуп X ,
скуп свих једночланих подскупова од X је један антиланац у $\mathcal{P}(X)$

Хасеов дијаграм

Парцијално уређени скупови могу се представити графички помоћу **Хасеовог дијаграма**. Ако је A скуп на коме је дато парцијално уређење ρ , Хасеов дијаграм посета A формира се на следећи начин:

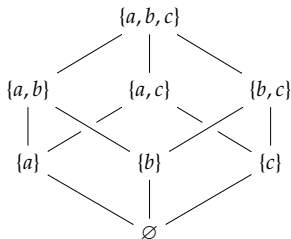
- сваком елементу скупа A одговара једна тачка у равни;
- тачке које одговарају елементима $x, y \in A$ су спојене линијом ако и само ако је $x \rho y$, при чему се x налази ниже на цртежу од y .

Хасеов дијаграм

Парцијално уређени скупови могу се представити графички помоћу **Хасеовог дијаграма**. Ако је A скуп на коме је дато парцијално уређење ρ , Хасеов дијаграм посета A формира се на следећи начин:

- сваком елементу скупа A одговара једна тачка у равни;
- тачке које одговарају елементима $x, y \in A$ су спојене линијом ако и само ако је $x \rho y$, при чему се x налази ниже на цртежу од y .

Пример: Нека је $X = \{a, b, c\}$. Скуп $\mathcal{P}(X)$ уређен је релацијом $\subseteq$ и у односу на ову релацију представља се помоћу Хасеовог дијаграма на следећи начин:



дефиниција: Нека је ρ релација парцијалног поретка на скупу A и нека је $B \subseteq A$. Кажемо да је $a \in A$:

- **минималан елемент** скупа B ако $a \in B$ и важи:
ако је $x \rho a$, онда је $x = a$, за све $x \in B$;

дефиниција: Нека је ρ релација парцијалног поретка на скупу A и нека је $B \subseteq A$. Кажемо да је $a \in A$:

- **минималан елемент** скупа B ако $a \in B$ и важи:
ако је $x \rho a$, онда је $x = a$, за све $x \in B$;
- **максималан елемент** скупа B ако $a \in B$ и важи:
ако је $a \rho x$, онда је $x = a$, за све $x \in B$;

дефиниција: Нека је ρ релација парцијалног поретка на скупу A и нека је $B \subseteq A$. Кажемо да је $a \in A$:

- **минималан елемент** скупа B ако $a \in B$ и важи:
ако је $x \rho a$, онда је $x = a$, за све $x \in B$;
- **максималан елемент** скупа B ако $a \in B$ и важи:
ако је $a \rho x$, онда је $x = a$, за све $x \in B$;
- **најмањи елемент (минимум)** скупа B ако $a \in B$ и за све $x \in B$ важи $a \rho x$;

дефиниција: Нека је ρ релација парцијалног поретка на скупу A и нека је $B \subseteq A$. Кажемо да је $a \in A$:

- **минималан елемент** скупа B ако $a \in B$ и важи:
ако је $x \rho a$, онда је $x = a$, за све $x \in B$;
- **максималан елемент** скупа B ако $a \in B$ и важи:
ако је $a \rho x$, онда је $x = a$, за све $x \in B$;
- **најмањи елемент (минимум)** скупа B ако $a \in B$ и за све $x \in B$ важи $a \rho x$;
- **највећи елемент (максимум)** скупа B ако $a \in B$ и за све $x \in B$ важи $x \rho a$;

дефиниција: Нека је ρ релација парцијалног поретка на скупу A и нека је $B \subseteq A$. Кажемо да је $a \in A$:

- **минималан елемент** скупа B ако $a \in B$ и важи:
ако је $x \rho a$, онда је $x = a$, за све $x \in B$;
- **максималан елемент** скупа B ако $a \in B$ и важи:
ако је $a \rho x$, онда је $x = a$, за све $x \in B$;
- **најмањи елемент (минимум)** скупа B ако $a \in B$ и за све $x \in B$ важи $a \rho x$;
- **највећи елемент (максимум)** скупа B ако $a \in B$ и за све $x \in B$ важи $x \rho a$;

Примери:

	$\mathcal{P}(\{1,2,3\}), \subseteq$	$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) \setminus \{\emptyset\}, \subseteq$	$\mathbb{N}, $	$\mathbb{N} \setminus \{1\}, $
минимум	$\emptyset$	нема	1	нема
максимум	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	0	0
минимални елемент(и)	$\emptyset$	$\{1\}, \{2\}, \{3\}$	1	прости бројеви
максимални елемент(и)	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	0	0

Важи следеће:

1. Ако постоји најмањи елемент скупа B , онда је он јединствен.

Важи следеће:

1. Ако постоји најмањи елемент скупа B , онда је он јединствен.
2. Ако постоји најмањи елемент скупа B , тада и једини минималан елемент.

Важи следеће:

1. Ако постоји најмањи елемент скупа B , онда је он јединствен.
2. Ако постоји најмањи елемент скупа B , тада и једини минималан елемент.
3. Уколико постоји минималан елемент, не мора нужно постојати најмањи елемент.

Важи следеће:

1. Ако постоји најмањи елемент скупа B , онда је он јединствен.
2. Ако постоји најмањи елемент скупа B , тада и једини минималан елемент.
3. Уколико постоји минималан елемент, не мора нужно постојати најмањи елемент.
4. Ако постоји највећи елемент скупа B , онда је он јединствен.

Важи следеће:

1. Ако постоји најмањи елемент скупа B , онда је он јединствен.
2. Ако постоји најмањи елемент скупа B , тада и једини минималан елемент.
3. Уколико постоји минималан елемент, не мора нужно постојати најмањи елемент.
4. Ако постоји највећи елемент скупа B , онда је он јединствен.
5. Ако постоји највећи елемент скупа B , тада и једини максималан елемент.

Важи следеће:

1. Ако постоји најмањи елемент скупа B , онда је он јединствен.
2. Ако постоји најмањи елемент скупа B , тада и једини минималан елемент.
3. Уколико постоји минималан елемент, не мора нужно постојати најмањи елемент.
4. Ако постоји највећи елемент скупа B , онда је он јединствен.
5. Ако постоји највећи елемент скупа B , тада и једини максималан елемент.
6. Уколико постоји максималан елемент, не мора нужно постојати највећи елемент.

Важи следеће:

1. Ако постоји најмањи елемент скупа B , онда је он јединствен.
2. Ако постоји најмањи елемент скупа B , тада и једини минималан елемент.
3. Уколико постоји минималан елемент, не мора нужно постојати најмањи елемент.
4. Ако постоји највећи елемент скупа B , онда је он јединствен.
5. Ако постоји највећи елемент скупа B , тада и једини максималан елемент.
6. Уколико постоји максималан елемент, не мора нужно постојати највећи елемент.

Доказ: на часу

дефиниција: Нека је ρ релација парцијалног уређење на скупу A , $B \subseteq A$ и $a \in A$. Кажемо да је елемент a

- **доње ограничење** скупа B ако $a \rho b$ за све $b \in B$;
- **горње ограничење** скупа B ако $b \rho a$ за све $b \in B$.

Ако постоји највеће доње ограничење, називамо га **инфимум** скупа B . Ако постоји најмање горње ограничење називамо га **супремум** скупа B . Инфимум и супремум скупа B редом означавамо са $\inf(B)$ и $\sup(B)$.

дефиниција: Нека је ρ релација парцијалног уређење на скупу A , $B \subseteq A$ и $a \in A$. Кажемо да је елемент a

- **доње ограничење** скупа B ако $a \rho b$ за све $b \in B$;
- **горње ограничење** скупа B ако $b \rho a$ за све $b \in B$.

Ако постоји највеће доње ограничење, називамо га **инфимум** скупа B . Ако постоји најмање горње ограничење називамо га **супремум** скупа B . Инфимум и супремум скупа B редом означавамо са $\inf(B)$ и $\sup(B)$.

Важи следеће:

1. Ако постоји минимум у скупу B , онда је он једнак инфимуму скупа B .
2. Ако постоји максимум у скупу B , онда је он једнак супремуму скупа B .

Доказ: на часу.