Algoritmi i strukture podataka
vežbe 4

Mirko Stojadinović

27. oktobar 2015

[1]

1 Hip

Hip je binarno stablo koje zadovoljava uslov hipa: ključ svakog čvora veći je ili jednak od ključeva njegovih sinova. Pored ključa, čvor obično sadrži i druge podatke. Hip se još naziva i **lista sa prioritetom**.

Hip se može realizovati implicitno i eksplicitno. Algoritmi koji su ovde predstavljeni rade sa **implicitnom** realizacijom hipa. Dakle, ako hip ima n elemenata, onda se za smeštanje elemenata koriste lokacije u nizu A sa indeksima $A[1..n]$, tako da ako element indeksa i predstavlja čvor stabla, tada
- element indeksa $2 * i$ predstavlja levo dete čvora
- element indeksa $2 * i + 1$ predstavlja desno dete čvora.

Na primer, deca čvora $A[1]$ su elementi $A[2], A[3]$. Gledano obratno, roditelj elementa sa indeksom j je čvor sa indeksom $\lfloor j/2 \rfloor$. Na hipu su definisane sledeće **2 operacije**:

1.1 Uklanjanje najvećeg elementa iz hipa

Neka je dat hip A sa n elemenata. Treba ukloniti ključ $A[1]$, a potom transformisati niz A tako da opet zadovoljava svojstvo hipa. Najzgodnije je zameniti vrednosti elemenata $A[1]$ i $A[n]$ i smanjiti veličinu hipa za 1. Problem je što tada možda nije zadovoljeno pravilo hipa. Dovođenje niza u stanje koje zadovoljava pravilo hipa vrši se ponavljanjem sledeća 2 koraka:

1. Analizirati decu korena hipa koji se trenutno posmatra i odrediti koje dete je veće.

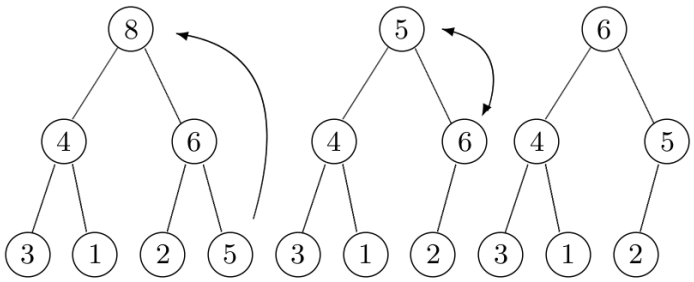
2. Ako je ključ korena veći od ključa većeg deteta postupak je završen; inače zameniti ključeve u korenu i većem detetu i preći na korak 1 ovog puta sa manjim hipom (to je hip u koji se prethodni koren spustio).

Na primer, postupak uklanjanja korena iz hipa koji je implicitno predstavljen nizom 8 4 6 3 1 2 5 je:

```
8 4 6 3 1 2 5
5 4 6 3 1 2 8
5 4 6 3 1 2
6 4 5 3 1 2
```

dok se isti postupak može predstaviti i eksplicitno, tj. stablima:

[1] Materijali velikim delom preuzeti od Jelene Hadži-Purić: `www.math.rs/~jelenagr`



1.2 Upis elementa u hip

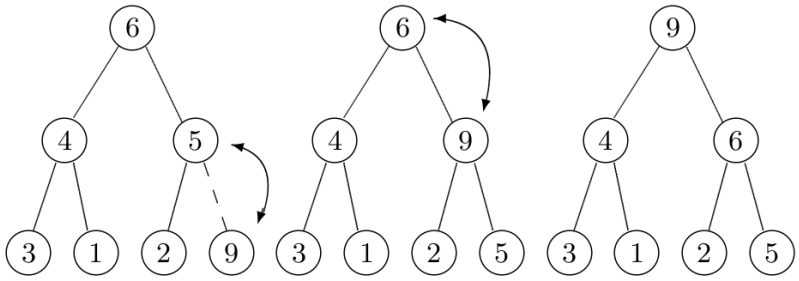
Neka je dat hip A sa n elemenata i element x koji je potrebno dodati u hip. Ako želimo dodati element u prioritetni red možemo ga dodati na kraj niza A. To je ekvivalentno dodavanju krajnjeg desnog lista u stablu. Ta operacija ima za posledicu da se n uveća za 1, ali i da možda stablo ne zadovoljava pravilo hipa. Da bi se zadovoljilo pravilo hipa koriste se naredna 2 koraka:

1. Ako je ključ roditelja čvora koji sadrži element x manji od x, zamenjuje se sadržaj ova dva čvora.
2. Ako je ključ roditelja praznog čvora veći od elementa x, onda je postupak završen. Inače preći na korak 1.

Prikaz ovog postupka sa stablom koje je implicitno zadato nizom 6 4 5 3 1 2, u koje se umeće broj 9 je:

```
6 4 5 3 1 2
6 4 5 3 1 2 9
6 4 9 3 1 2 5
9 4 6 3 1 2 5
```

dok se isti postupak može predstaviti i eksplicitnim stablima:



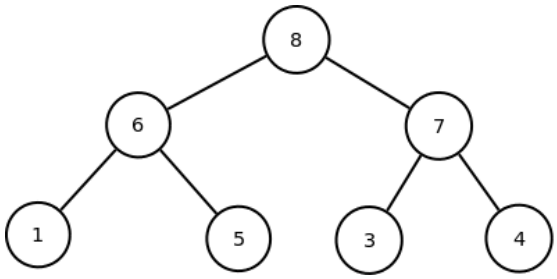
1. Odrediti izgled implicitno predstavljenog hipa koji se dobija umetanjem redom brojeva 5, 1, 3, 9, 6, 4, 7, 8 polazeći od praznog hipa. Prikazati izgradnju hipa tabelom, čiji svaki red odgovara jednoj promeni hipa. Zatim odrediti izgled hipa dobijenog uklanjanjem najvećeg elementa.

```
Korak 1 - dodaj 5
5
Korak 2 - dodaj 1
5 1
Korak 3: - dodaj 3
5 1 3
Korak 4  - dodaj 9 i dva podkoraka preuredjivanja hipa
5 1 3 9
5 9 3 1
```

```
9 5 3 1
Korak 5  dodaj 6 i jedan podkorak preuredjivanja hipa
9 5 3 1 6
9 6 3 1 5
Korak 6  dodaj 4 i jedan podkorak preuredjivanja hipa
9 6 3 1 5 4
9 6 4 1 5 3
Korak 7  dodaj 7 i jedan podkorak preuredjivanja hipa
9 6 4 1 5 3 7
9 6 7 1 5 3 4
Korak 7  dodaj 8 i dva podkoraka preuredjivanja hipa
9 6 7 1 5 3 4 8
9 6 7 8 5 3 4 1
9 8 7 6 5 3 4 1

Uklanjanje max elementa 9
Korak 1 - ukloni 9, tako sto se zadnji element kopira u koren, i n smanji za 1
9 8 7 6 5 3 4 1
1 8 7 6 5 3 4
Korak 3  preuredjivanje hipa, max (8,7) zameni sa 1
1 8 7 6 5 3 4
8 1 7 6 5 3 4
Korak 4  preuredjivanje hipa, max (6,5) zameni sa 1
8 1 7 6 5 3 4
8 6 7 1 5 3 4
```

a izgled ovog stabla je:



2. Konstruisati algoritam za formiranje hipa koji sadrži sve elemente dva hipa veličine n i m. Hipovi su predstavljeni eksplicitno (svaki čvor ima pokazivače na svoja dva sina) i *može biti praznih pozicija i iznad zadnjeg nivoa.* Vremenska složenost treba da bude u najgorem slučaju $O(m+n)$.

REŠENJE: Opis algoritma u 2 koraka:

1. Uklanja se veći od 2 korena i izvedu se popravke tog hipa na sličan način opisan onom u sekciji uklanjanja elementa iz hipa (linearno vreme za pronalazak nekog lista i linearno da se novi koren spusti niz stablo, jer može biti nepopunjenih pozicija, tj. u najgorem slučaju je stablo lista).
2. Izabrani element se umeće kao koren novog hipa, tako da njegovi sinovi budu koreni dva stara hipa (O(1)).

Za sve ovo je potrebno $O(max\{m,n\})$ koraka što nije lošije od tražene složenosti $O(m+n)$.

1.3 Hipsort

Algoritam se sastoji iz dva dela:

1. Elementi iz niza dimenzije n se smeštaju u hip. Ovo se može uraditi na dva načina:
   (a) pristupom odozgo-nadole čija je složenost $O(n \log n)$ (n dodavanja, svako složenosti $O(\log n)$).
   (b) pristupom odozdo-nagore čija je složenost $O(n)$ (objašnjenje u profesorovoj knjizi).
2. Elementi se uklanjaju iz hipa, a svako uklanjanje ima složenost proporcionalnu visini hipa, tj. $O(\log n)$ pa pošto niz ima n elemenata ukupna složenost je $O(n \log n)$.

3. Koristeći pristupe odozgo-nadole i odozdo-nagore algoritmom hipsort sortirati niz brojeva 5 3 8 6 7 2 1 9 4.
REŠENJE:

PRISTUP ODOZGO-NADOLE
1. deo - pravljenje hipa odozgo-nadole (elementi se redom dodaju u hip gore opisanim algoritmom)

```
5
5 3
5 3 8
8 3 5
8 3 5 6
8 6 5 3
8 6 5 3 7
8 7 5 3 6
8 7 5 3 6 2
8 7 5 3 6 2 1
8 7 5 3 6 2 1 9
8 7 5 9 6 2 1 3
8 9 5 7 6 2 1 3
9 8 5 7 6 2 1 3
9 8 5 7 6 2 1 3 4
```

2. deo (uklanjanje najvećeg elementa iz hipa dok se ne uklone svi elementi):

```
9 8 5 7 6 2 1 3 4
4 8 5 7 6 2 1 3|9
8 4 5 7 6 2 1 3|9
8 7 5 4 6 2 1 3|9
3 7 5 4 6 2 1|8 9
7 3 5 4 6 2 1|8 9
7 6 5 4 3 2 1|8 9
1 6 5 4 3 2|7 8 9
6 1 5 4 3 2|7 8 9
6 4 5 1 3 2|7 8 9
2 4 5 1 3|6 7 8 9
5 4 2 1 3|6 7 8 9
3 4 2 1|5 6 7 8 9
4 3 2 1|5 6 7 8 9
1 3 2|4 5 6 7 8 9
3 1 2|4 5 6 7 8 9
2 1|3 4 5 6 7 8 9
1|2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9
```

PRISTUP ODOZDO-NAGORE:
1. deo - pravljenje hipa odozdo-nagore (za detalje pogledati profesorovu knjigu)

```
5 3 8 6 7 2 1 9 4
5 3 8 9 7 2 1 6 4
5 3 8 9 7 2 1 6 4
5 9 8 3 7 2 1 6 4
5 9 8 6 7 2 1 3 4
9 5 8 6 7 2 1 3 4
9 7 8 6 5 2 1 3 4
```

2. deo (uklanjanje najvećeg elementa iz hipa dok se ne uklone svi elementi):

```
9 7 8 6 5 2 1 3 4
4 7 8 6 5 2 1 3|9
8 7 4 6 5 2 1 3|9
3 7 4 6 5 2 1|8 9
7 3 4 6 5 2 1|8 9
7 6 4 3 5 2 1|8 9
```

```
1 6 4 3 5 2|7 8 9
6 1 4 3 5 2|7 8 9
6 5 4 3 1 2|7 8 9
2 5 4 3 1|6 7 8 9
5 2 4 3 1|6 7 8 9
5 3 4 2 1|6 7 8 9
1 3 4 2|5 6 7 8 9
4 3 1 2|5 6 7 8 9
2 3 1|4 5 6 7 8 9
3 2 1|4 5 6 7 8 9
1 2|3 4 5 6 7 8 9
2 1|3 4 5 6 7 8 9
1|2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9
```

4. Koristeći pristupe odozgo-nadole i odozdo-nagore algoritmom hipsort sortirati niz brojeva 1 6 4 2 9 3 5 7 8.

REŠENJE:

PRISTUP ODOZGO-NADOLE
1. deo (pravljenje hipa):

```
1
1 6
6 1
6 1 4
6 1 4 2
6 2 4 1
6 2 4 1 9
6 9 4 1 2
9 6 4 1 2
9 6 4 1 2 3
9 6 4 1 2 3 5
9 6 5 1 2 3 4
9 6 5 1 2 3 4 7
9 6 5 7 2 3 4 1
9 7 5 6 2 3 4 1
9 7 5 6 2 3 4 1 8
9 7 5 8 2 3 4 1 6
9 8 5 7 2 3 4 1 6
```

2. deo (uklanjanje najvećeg elementa iz hipa dok se ne uklone svi elementi):

```
9 8 5 7 2 3 4 1 6
6 8 5 7 2 3 4 1|9
8 6 5 7 2 3 4 1|9
8 7 5 6 2 3 4 1|9
1 7 5 6 2 3 4|8 9
7 1 5 6 2 3 4|8 9
7 6 5 1 2 3 4|8 9
4 6 5 1 2 3|7 8 9
6 4 5 1 2 3|7 8 9
3 4 5 1 2|6 7 8 9
5 4 3 1 2|6 7 8 9
2 4 3 1|5 6 7 8 9
4 2 3 1|5 6 7 8 9
1 2 3|4 5 6 7 8 9
3 2 1|4 5 6 7 8 9
1 2|3 4 5 6 7 8 9
2 1|3 4 5 6 7 8 9
1|2 3 4 5 6 7 8 9
```

```
1 2 3 4 5 6 7 8 9
```

PRISTUP ODOZDO-NAGORE
1. deo (pravljenje hipa):

```
1 6 4 2 9 3 5 7 8
1 6 4 8 9 3 5 7 2
1 6 5 8 9 3 4 7 2
1 9 5 8 6 3 4 7 2
9 1 5 8 6 3 4 7 2
9 8 5 1 6 3 4 7 2
9 8 5 7 6 3 4 1 2
```

2. deo (uklanjanje najvećeg elementa iz hipa dok se ne uklone svi elementi):

```
9 8 5 7 6 3 4 1 2
2 8 5 7 6 3 4 1|9
8 2 5 7 6 3 4 1|9
8 7 5 2 6 3 4 1|9
1 7 5 2 6 3 4|8 9
7 1 5 2 6 3 4|8 9
7 6 5 2 1 3 4|8 9
4 6 5 2 1 3|7 8 9
6 4 5 2 1 3|7 8 9
3 4 5 2 1|6 7 8 9
5 4 3 2 1|6 7 8 9
1 4 3 2|5 6 7 8 9
4 1 3 2|5 6 7 8 9
4 2 3 1|5 6 7 8 9
1 2 3|4 5 6 7 8 9
3 2 1|4 5 6 7 8 9
1 2|3 4 5 6 7 8 9
2 1|3 4 5 6 7 8 9
1|2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9
```

1.4 Određivanje medijane

Medijana prestavlja srednji po veličini element u datom nizu brojeva. Ukoliko je broj elemenata niza paran, medijanom smatramo aritmetičku sredinu dva po veličini središnja elementa. Zadatak je da se korišćenjem 2 hipa postigne da se određivanje medijane niza izvršava u konstantnom vremenu, pri čemu se u niz mogu dodavati novi elementi.

Ovaj zadatak se rešava tako što se održavaju 2 hipa. Ukoliko niz ima paran broj elemenata onda hipovi sadrže po polovinu ovih elemenata a ukoliko je broj elemenata neparan dozvoljeno je da jedan od hipova ima tačno jedan element više od drugog. U prvi hip smeštamo manje a u drugi veće brojeve. Prvi hip je takav da je broj u svakom čvoru veći ili jednak od brojeva u sinovima a u drugom hipu je broj u čvoru uvek manji ili jednak od brojeva u sinovima. To znači da se u slučaju neparnog broja elemenata u hipu koji sadrži jedan element više nalazi medijana. U slučaju parnog broja elemenata, medijana se računa po formuli (koren1+koren2)/2.

Kako dodati novi element u niz a zadržati svojstva hipova? Razlikujemo više slučajeva:

1. ako je element manji od korena prvog hipa, dodati ga u prvi hip.
2. ako je element veći od korena drugog hipa, dodati ga u drugi hip.
3. ako je element veći od korena prvog hipa, a manji od korena drugog hipa: u slučaju različitog broja elemenata hipova, dodati ga u hip sa manje elemenata; u slučaju istog broja elemenata dodati ga u proizvoljan hip.

Ukoliko je posle dodavanja elementa nastala situacija da jedan hip ima 2 elementa više od drugog hipa, onda iz hipa sa više elemenata ukloniti koren i dodati ga u manji hip.

Kolika je složenost dodavanja novog elementa u niz koji je predstavljen na opisani način?

2 Heš tabele

Heš tabele se koriste kada je potrebno efikasno obavljati operacije dodavanja, pretrage i brisanja elemenata. **Ideja:** Koristićemo više prostora nego što nam je potrebno ali sa ciljem da imamo efikasne operacije.

Dobra heš funkcija treba da ravnomerno slika skup od n ključeva u skup slučajnih lokacija iz skupa $\{0, ..., m-1\}$. Pri tome se smatra da broj lokacija nije mnogo veći (npr. duplo je veći) od broja ključeva koje unosimo (m nije mnogo veće od n). Heš tabele se koriste za implementaciju mapa u programskim jezicima (heš mape), pri radu sa bazama podataka, rečnicima, DNK sekvencama... Ovde ćemo koristiti 3 heš metode:

1. L - *lančanje* ili *odvojeno nizanje* (chaining): funkcijom h(x) = h1(x)
2. LP - *linearno popunjavanje* (linear-probing) funkcijom

   h(x,i) = (h1(x)+i) % n, i=0..n-1

3. DH - *dvostruko heširanje* (double hashing) funkcijom h1 kao heš funkcijom i funkcijom g kao sekundarnom

   h(x,i) = (h1(x) + i·g(x)) % n, i=0..n-1

Rođendanski paradoks: godina ima 365 dana. Ako je rođendan svake osobe odabran na slučajan način, onda je potrebno 23 ljudi da bi veroatnoća da među njima postoje dve osobe rođene na isti dan dostigla 50%? To nam govori da ukoliko imamo 365 pozicija u heš tabeli i 23 elementa koje treba da smestimo u tabelu, verovatnoća je veća od 50% da ćemo imati barem jednu koliziju. Među 70 ljudi, verovatnoća da će među njima biti dve osobe rođene na isti dan je 99.99% (ovo bi odgovaralo popunjenosti od manje od 20% u heš tabeli). Dakle, kolizije je u praksi nemoguće izbeći.
Napomena: Obično u tabelu slikamo neke podatke (strukture). Potrebno je prvo prevesti podatke u broj (ključ) koji će se slikati pomoću heš funkcije. Jednostavnosti radi, mi ćemo uvek smeštati brojeve u heš tabelu.

5. Skicirajte heš tabelu nakon smeštanja ključeva iz skupa 22, 1, 13, 11, 24, 33, 18, 42, 31 u zadatom poretku. Pretpostavite da je tabela veličine n=11, da je primarna heš funkcija h1(x) = x % 11, kao i da se za razrešavanje kolizija koristi lančanje, linearno popunjavanje i dvostruko heširanje sekundarnom heš funkcijom g(x) = 1+ x %10.

REŠENJE:

	L	LP	DH
0	22 ← 11 ← 33	22	22
1	1	1	1
2	13 ← 24	13	13
3		11	
4		24	11
5		33	18
6			31
7	18	18	24
8			33
9	42 ← 31	42	42
10		31	

U vrsti sa indeksom 3 u koloni LP je 11 jer je h(11,3)=(11%11+3) %11 = 3 (za manje vrednosti od 3 su pozicije popunjene).
U vrsti sa indekosm 4 u koloni DH je 11 jer je h(11,2)=(11%11+2·g(11))%11=4 (za manje vrednosti od 2 su pozicije popunjene).

Pretraživanje. Izvodi se tako što se pomoću heš funkcije dobije moguća pozicija elementa. Kod lančanja se zatim u listi traži dati element. Kod linearnog popunjavanja se pretražuju redom sledeće pozicije dok element ne bude pronađen ili dok se ne dođe do prazne pozicije. Kod duplog heširanja se pomoću koraka (vrednosti druge heš funkcije) prolazi kroz tabelu dok se element ne nađe ili se ne dođe do prazne pozicije.

Odabir heš funkcija. Najteži zadatak kod heširanja je odabir dobrih heš funkcija. "Vrlo lako" je izabrati pogrešnu heš funkciju koja raspoređuje ključeve neravnomerno po tabeli ili čak sigurno ostavlja veliki broj mesta da se teško ili nikad ne popune. Potrebno da je da heš funkcija ravnomerno raspoređuje podatke po celoj tabeli kao i da bude laka za izračunavanje. Ne postoji neko opšte pravilo kako konstruisati dobru heš funkciju, već sve zavisi od slučaja do slučaja (tj. najviše od očekivanih podataka sa kojima će se raditi). Kaže se da je dobar izbor heš funkcije "više umetnost nego nauka". Najčešće se podaci preslikavaju u neki broj, a zatim se indeks smeštanja određuje nekom funkcijom koja vraća ostatak po modulu nekog prostog broja.

Složenost. Iako je vreme za sve operacije (unos, pretraga, brisanje) u najgorem slučaju $O(n)$, pri dobrom izboru heš funkcije se dobija da je prosečno vreme ovih operacija $O(1)$!!!

Odabir heširanja. Ne postoji ni pravilo koje od 3 navedena heširanja koristiti. Često je teško proceniti koje od njih bi dalo dobre rezultate. Ako je memorijski prostor bitan onda je bolje izbegavati lančanje jer koristi dodatan memorijski prostor. Ako je brisanje česta operacija onda je uglavnom bolje koristiti lančanje jer se brisanje u tom slučaju efikasno implementira.

Ponovno heširanje. Ponovno heširanje (rehashing) je potrebno izvršiti kada tabela dostigne neki (visok) stepen popunjenosti (npr. 70%), jer tada sve operacije postaju mnogo sporije. To označava prepisivanje elemenata u novu tabelu uz ponovno heširanje (možda i drugačijom heš funkcijom).

6. Skicirajte heš tabelu nakon smeštanja ključeva iz skupa 22, 1, 13, 11, 24, 33, 18, 42, 31 u zadatom poretku. Pored broja, čuva se i indikator da li je polje popunjeno, prazno ili prazno nakon brisanja. Pretpostavite da je tabela veličine n=11, da je primarna heš funkcija h1(x) = x % 11, kao i da se za razrešavanje kolizija koristi dvostruko heširanje sekundarnom heš funkcijom g(x) = 1+ x %10. Potom objasniti postupak pri uklanjanju redom brojeva 22 i 33 i dodavanju broja 8 (navesti koje pozicije se proveravaju i kako se menjaju indikatori).

7. Skicirajte heš tabelu nakon smeštanja kljuceva 10, 22, 31, 4, 15, 28, 17, 88, 59 u zadatom poretku. Pretpostavite da je tabela veličine n=11, da je primarna heš funkcija h(x) = x %11, kao i da se za razrešavanje kolizija koristi dvostruko heširanje sekundarnom heš funkcijom g(x) = 1+ x % 10.

8. Pretpostavimo da se u heš tabeli umesto povezanih listi koriste binarna stabla pretraživanja za razrešavanje kolizija odvojenim ulančavanjem. Koliko je vreme izvršavanja operacija umetanja i pretraživanja u najgorem slučaju? Kolika je ukoliko se koriste balansirana stabla?

9. Struktura *korisnik* sadrži tri polja: ime, prezime i broj telefona korisnika. Potrebno je omogućiti brzu pretragu, unos i brisanje po imenu i prezimenu. Napisati C funkciju koja slika ime i prezime korisnika u prirodan broj između 0 i n. Ako niz a dimenzije k sadrži spojeno ime i prezime korisnika malim slovima, onda je potrebno tog korisnika preslikati u poziciju $(\sum_{i=0}^{n}(a[i] -' a'))\%n$ ($'a'$ je ASCII kod karaktera a). Napisati C funkciju koja smešta strukturu u heš tabelu veličine n pomoću heš funkcije $h(x) = x\%n$ a za razrešavanje kolizije koristi linearno popunjavanje.

Mana navedenog heširanja je da se dve osobe sa istim imenom neće razlikovati, izuzev po broju telefona. Da bi se razlikovale, potrebno je da informacije budu potpunije, npr. uz ime i prezime da bude prisutna i adresa osobe.

U nekoj bazi bi korisnici mogli da se slikaju u poziciju u tabeli pomoću JMBG broja. Jedna loša heš funkcija koja smešta informacije o studentima u bazu bi bila ona koja bi koristila brojeve na pozicijima 5,6 i 7 u JMBG-u (jer su to cifre rođenja studenata i sve će biti u uskom segmentu).

2.1 Brisanje

Uključivanje mogućnosti brisanja obično utiče na to da i ostale operacije (pretraga i dodavanje) budu komplikovanije.

Lančanje. Izvodi se tako što se prvo traži element, pa se briše ako je pronađen. Kod lančanja je to jednostavno, samo se obriše čvor.

Druga dva pristupa. Obično se stavlja indikator za svaku poziciju u tabeli: `puna`/`prazna`/`prazna_nakon_brisanja`. Ovo može podrazumevati dodatan niz indikatora. Pri pretrazi se prvo proverava indikator, i razlikuju se tri slučaja:

1. ako je pozicija `puna` proverava se broj u tabeli, ili je pronađen traženi broj i vraća se njegova pozicija ili je potrebno preći na narednu poziciju koju treba ispitati.
2. ako je pozicija `prazna` element nije nađen i pretraga se prekida.
3. ako je pozicija `prazna_nakon_brisanja` preći na narednu poziciju koju treba ispitati.

Pri dodavanju se samo proverava indikator i dok god je `puna`, prelazi se na narednu poziciju. Kada se naiđe na indikator bilo `prazna` bilo `prazna_nakon_brisanja`, tu se smešta element i indikator pozicije se menja da označi da je ona `puna`.

Pri brisanju prvo se vrši pretraga. Ako je element pronađen, onda on uopšte ne mora da bude uklonjen iz tabele - dovoljno je indikator te pozicije promeniti da bude `prazna_nakon_brisanja`.

Kada broj pozicija `prazna_nakon_brisanja` postane veliki, može se izvršiti ponovno heširanje.