Рачунарска интелигенција

Фази системи

Александар Картељ

kartelj@matf.bg.ac.rs

Датум последње измене: 16.10.2019.

Фази системи

Фази логика

Фази скупови

- Класична бинарна логика није често применљива у решавању реалних проблема
- Реални проблеми се описују често непрецизно, некомплетно
- Нпр. реченица „делимично је облачно“ није бинарна
- Како закључивати на основу оваквих изјава?
  - Потребно је развити другачији логички систем
  - За те потребе, креће се од другачије дефиниције скупова и функције припадности скупу

Фази скупови (2)

- Lofti Zadeh (1965)
- Како дефинисати скуп високих људи?
  - У класичној теорији скупова, на основу неке границе, нпр. 175цм
  - Проблем са овим је што је и особа од 178цм и 210цм само „висока“
  - Такође постоји оштра граница на прелазима, тј. у близини границе
- Фази скупови омогућавају да се припадност скупу дефинише са неком нумеричком вредношћу која је између 0 и 1
- Ако је X домен, а $x \in X$ конкретни елемент тог домена. Онда се фази скуп A описује функцијом припадности:
  $$\mu_A : X \to [0, 1]$$
- Фази скупови могу бити дефинисани над дискретним или реалним доменима.

Фази скупови (3)

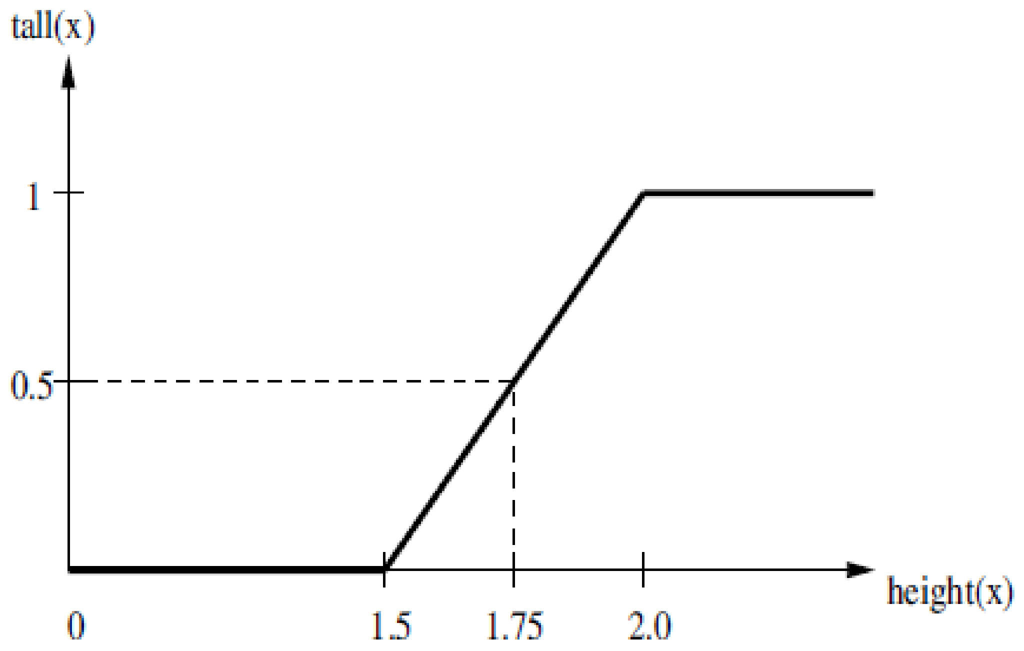
- Постоје две нотације за представљање дискретног фази скупа:
  - Преко скупа уређених парова: $A = \{(\mu_A(x_i), x_i) \,|\, x_i \in X, i = 1, \cdots, n_x\}$
  - Преко „суме“: $A = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \cdots + \mu_A(x_{nx})/x_{nx}$
  - Опрез: ова сума није права, не подразумева стварно сабирање, већ је само вид редефенисане нотације која је у сагласности са нотацијом за реални домен
- Нотација за реални фази скуп је дата преко „интеграла“:

$$A = \int_X \mu(x)/x$$

  - Опет ово није прави „интеграл“ већ само погодна нотација

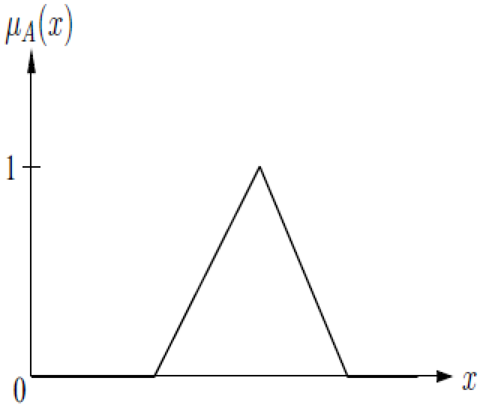
Фази функција припадности скупу

- Ограничена између 0 и 1
- За сваки елемент домена је једнозначна
- На слици је приказан један могући начин дефинисања скупа високих људи

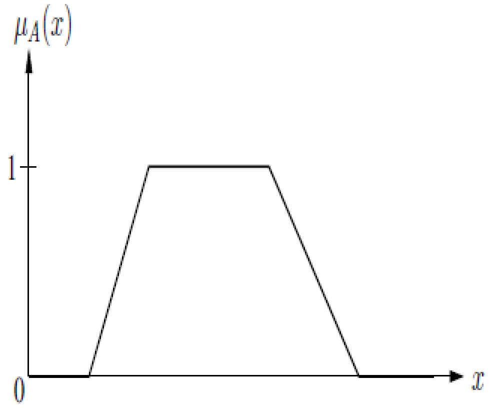


$$tall(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } length(x) < 1.5m \\ (length(x) - 1.5m) \times 2.0m & \text{if } 1.5m \leq length(x) \leq 2.0m \\ 1 & \text{if } length(x) > 2.0m \end{cases}$$

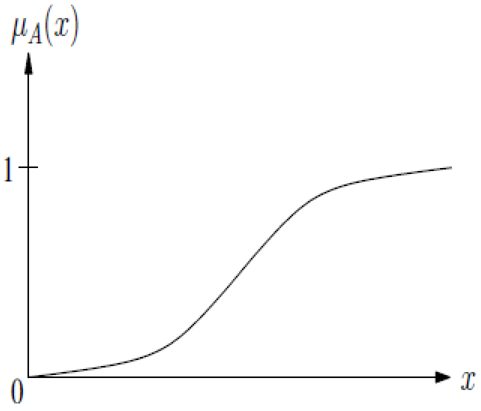
Стандардне фази функције припадности



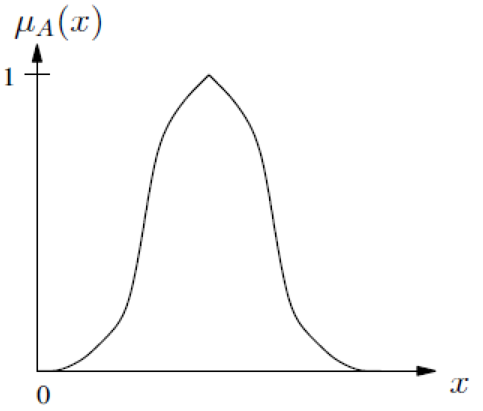
(a) Triangular Function



(b) Trapezoidal Function



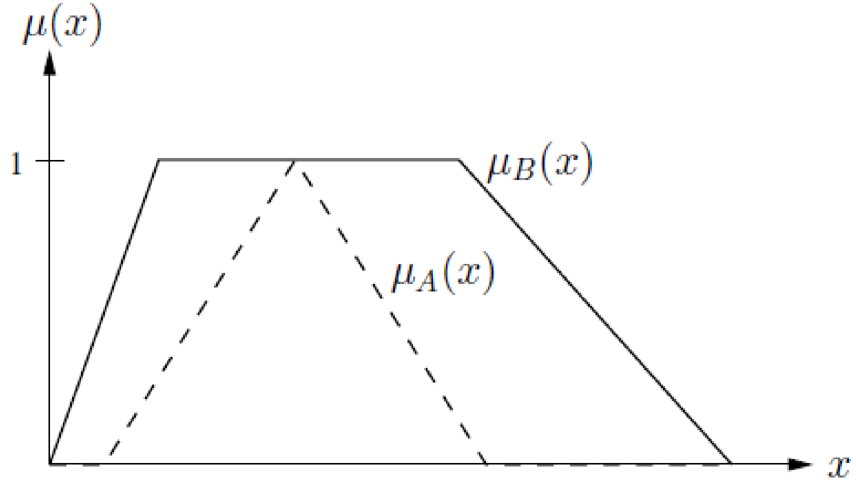
(c) Logistic Function



(d) Gaussian Function

Фази операције над скуповима

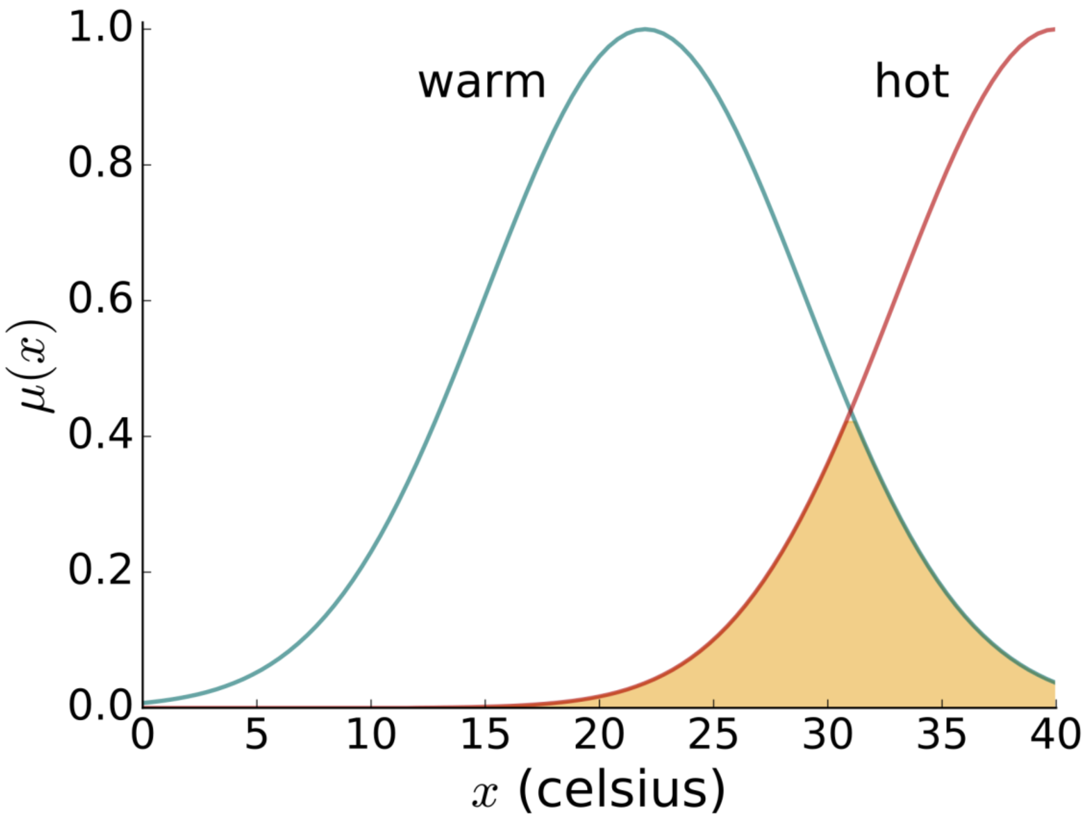
- **Једнакост скупова**
  - Фази скупови су једнаки ако имају исти домен и притом за сваки елемент домена имају исту функцију припадности:
    $A=B$ акко $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ за све $x \in X$
- **Подскупови**
  - Скуп A је подскуп скупа B акко $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ за све $x \in X$
- **Комплемент**
  - Ако је A^C комплемент скупа A, онда за све $x \in X$, $\mu_A(x) = 1 - \mu_{AC}(x)$.
    Не важи идентитети као у класичној теорији скупова да је $A^C \cap A = \emptyset$ и $A^C \cup A = X$.



Фази операције над скуповима (2)

- **Пресек**
  - Постоји много начина, а стандардни су:
    преко минимума: $\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\},\ \forall x \in X$
    преко производа: $\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x),\ \forall x \in X$
  - Са производом треба бити опрезнији:
    већ након неколико узастопних примена функције припадности теже 0.
- **Унија**
  - Постоји много начина, а стандардни су:
    преко максимума: $\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\},\ \forall x \in X$
    преко суме и пресека: $\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\mu_B(x),\ \forall x \in X$
  - Са сумацијом и преском треба бити опрезнији,
    јер функције припадности теже 1 чак иако су полазне функције блиске 0.

Фази операције над скуповима (3)



Карактеристике фази скупова

- **Нормалност:** фази скуп A је нормалан ако има бар један елемент који припада скупу са степеном 1:
  $\exists x \in A \bullet \mu_A(x) = 1$ или $\sup_x \mu_A(x) = 1$
- **Висина:** супремум по функцији припадности: $height(A) = \sup_x \mu_A(x)$
- **Подршка:** скуп свих елемената који имају припадност већу од 0:
  $support(A) = \{x \in X | \mu_A(x) > 0\}$
- **Језгро:** скуп свих елемената који припадају скупу са степеном 1:
  $core(A) = \{x \in X | \mu_A(x) = 1\}$
- **α-рез:** скуп сви елемената који имају припадност најмање α:
  $A_\alpha = \{x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha\}$

Карактеристике фази скупова (2)

- **Унимодалност:** фази скуп је унимодалан ако његова функција припадности унимодална
- **Кардиналност:** у зависности од типа домена, дефинише се као:

$$card(A) = \sum_{x \in X} \mu_A(x) \quad \text{или} \quad card(A) = \int_{x \in X} \mu_A(x)dx$$

- **Нормализација:** фази скуп се нормализује тако што се функција припадности подели висином фази скупа:

  $normalized(A) = \mu_A(x) \text{-} height(x)$

- Остала битна својства су: **комутативност**, **асоцијативност**, **транзитивност** и **идемпотенција**.

Фази и вероватноћа

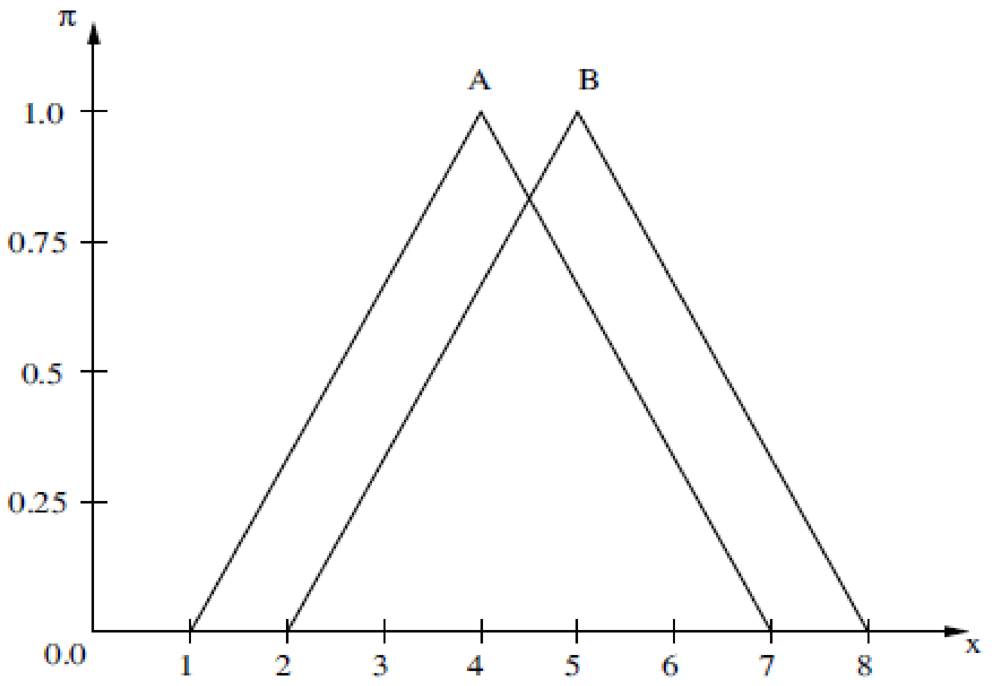
- Постоји честа забуна између фази концепта и вероватноће
- Оба термина реферишу на (не)сигурност догађаја
    - Али ту све сличности престају
- Статистичка вероватноћа се везује за посматрање догађаја који треба тек да се десе и за доношење закључака о томе колика је њихова шанса да ће се десити
    - Ако посматрамо узастопна бацања новчића и на великом броју бацања утврдимо да је у 50% ситуација „пала“ глава, тада можемо говорити о сигурности тога да ће у наредном бацању да „падне“ глава

Фази и вероватноћа (2)

- Код фази скупова, функција припадности не говори о сигурности да се неки догађај из будућности деси
  - Нпр. имамо две особе, једна је висока 220цм и припада скупу високих људи са степеном 1 и имамо другу која је висока 195цм и припада скупу високих људи са степеном 0.95
  - Интерпретација не значи да ће у поновљеним експериментима прва особа бити чешће већа од друге особе
  - То само значи да су обе особе високе али са различитим степеном припадности скупу високих особа
- Дакле, фази се везује за степен истинитости
- Док се вероватноћа везује за могућност предвиђања неког исхода

Задаци

- Показати да је минимум оператор за дефинисање просека фази скупова: комутативна, идемпотентан и транзитиван.
- Приказати графички унију и пресек фази скупа и његовог комплемента.
- Нека су дате функције припадности скуповима A и B на слици десно.
  - Нацртајте функцију припадности скупа $C = A \cap B^C$ помоћу минимума
  - Израчунајте $\mu_C(5)$
  - Да ли је скуп C нормалан?



Фази системи

Фази логика и резоновање

Пример једноставног закључивања

- $\mu_{tall}(Peter) = 0.9$ и $\mu_{good\ athlete}(Peter) = 0.8$
- $\mu_{tall}(Carl) = 0.9$ и $\mu_{good\ athlete}(Carl) = 0.5$
- Ако се зна да је добар кошаркаш висок и атлета, који од ове двојице је бољи?
- Применом правила минимума за пресек (логичко и):
  - $\mu_{good\ basketball\ player}(Peter) = \min\{0.9, 0.8\} = 0.8$
  - $\mu_{good\ basketball\ player}(Carl) = \min\{0.9, 0.5\} = 0.5$
- Па закључујемо да је *Peter* бољи кошаркаш
- У реалним околностима, зависности су много сложеније па говоримо о скупу *if-then* правила

Фази логика (ФЛ) – лингвистичке променљиве

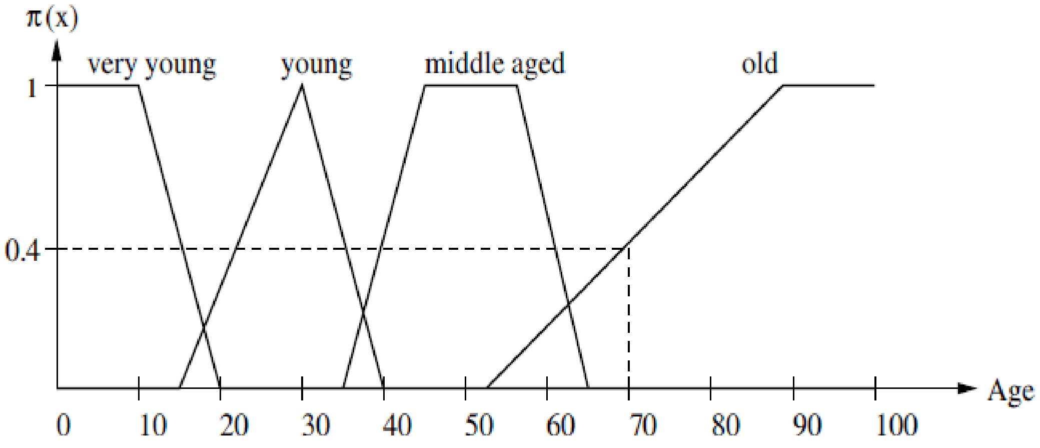
- Кључни елементи:
  - Лингвистичке променљиве
  - Фази *if-then* правило закључивања
- Лингвистичка (фази) променљива – Zadeh (1973)
  - Променљиве чије су вредности речи природног језика
  - Нпр. реч *tall* је лингвистичка променљива
- Типови лингивистичких променљивих:
  - Квантификатори: све, већина, много, ниједан, итд.
  - Променљиве за учесталост: понекад, често, увек, итд.
  - Променљиве за шансу: могуће, вероватно, сигурно, итд.

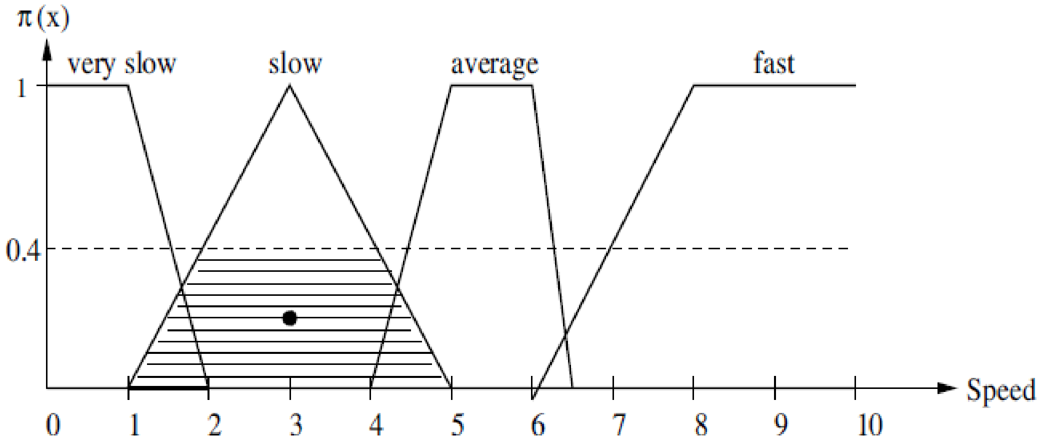
Модификатори лингвистичких променљивих

- Модификатори су додатне речи које појачавају или слабе ефекат лингвистичких променљивим
  - Најчешће су у питању неки придеви, нпр. веома, мало, средње, итд.
- Могу бити доведени у релацију са оригиналном лингвистичком променљивом путем функције
- Пример: $\mu_{very\ tall}(x) = \mu_{tall}(x)^2$.
  - Ако неко припада скупу високих са сигурношћу 0.9
  - Онда ће припадати скупу веома високих са мањом сигурношћу од 0.81
- Модификатори за појачавање обично имају форму:
  - $\mu_{A'}(x) = \mu_A(x)^{1/p}$ за $p > 1$

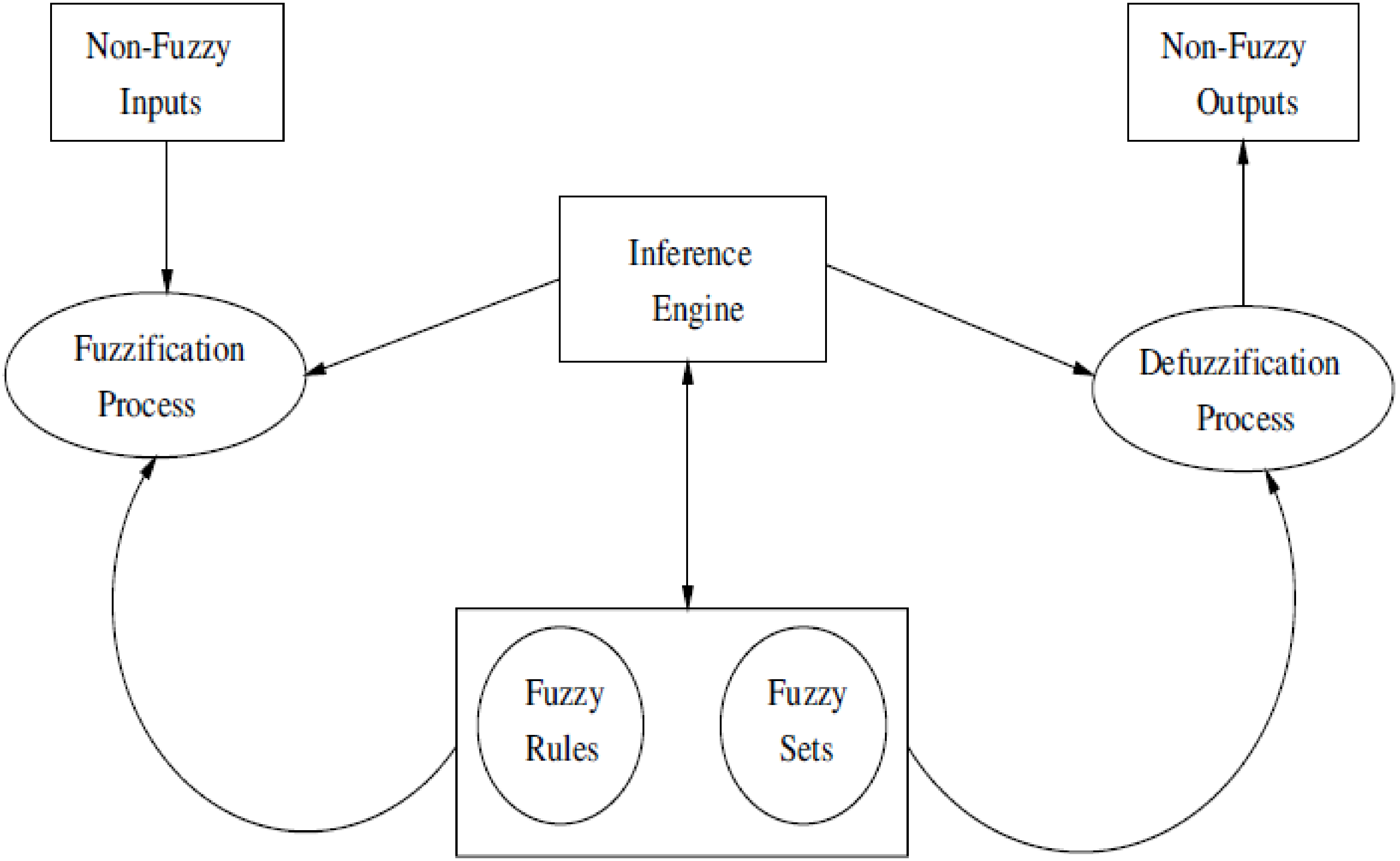
Фази правила закључивања

- Пример: if *Age* is *Old* the *Speed* is *Slow*
- На основу скупа премиса се доносе скуп закључака
- Припадност особе од 70 година старим особама је 0.4
- Центар гравитације у области споре брзине ограниченој са 0.4 је 3





Фази систем – Мамаданијев метод



Фазификација

- Улазни подаци (премисе) се из улазног простора (који није фази) преводе у фази репрезентацију
- Примена функције припадности над улазним податком
- Нпр. ако су *A* и *B* фази скупови над доменом *X*
- Процес фазификације прихвата елементе $a, b \in X$
- На излазу производи фази скуп тако што им додељује степене припадности сваком од фази скупова:

  $\{(\mu_A(a),a), (\mu_B(a),a), (\mu_A(b),b), (\mu_B(b),b)\}$

Примена правила закључивања

- Циљ је применити правила закључивања над фазификованим улазима
- На излазу из правила закључивања је фазификовани излаз за свако од правила
- Нека су A и B дефинисани над доменом X_1, док је фази скуп C дефинисан над доменом X_2. Нека је правило:

  if A is a and B is b then C is c

- На основу фазификације знамо: $\mu_A(a)$ и $\mu_B(b)$
- Прво је потребно израчунати степен припадности скупу премиса:

  $\min\{\mu_A(a), \mu_B(b)\}$

Примена правила закључивања (2)

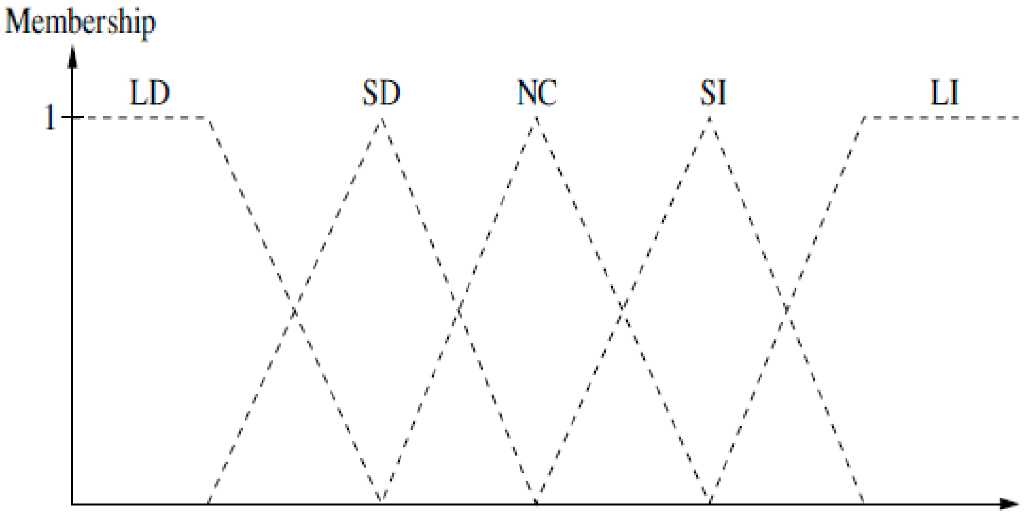
- Ово се ради за свако од правила закључивања
- Нека је α_k степен припадности премиса за *k*-то правило
- Следећи корак је рачунање степена припадности закључку c_i:

$$\beta_i = \max \{\alpha_{ki}\}, \text{ за свако правило } k \text{ у којем фигурише } c_i$$

- То значи да је на излазу из закључивања степен припадности за сваки од фази скупова закључака

Дефазификација

- Последњи корак је превођење фази закључака у не-фази
- Ово подразумева одређивање лингвистичких променљивих за претходно одређење степене припадности закључцима
- Нека слика десно осликава функцију припадности скупу
- Одредити лингвистичку променљиву ако су на основу правила донети закључци: μ_{LI} =0.8, μ_{SI} = 0.6 и μ_{NC} = 0.3



Дефазификација (2)

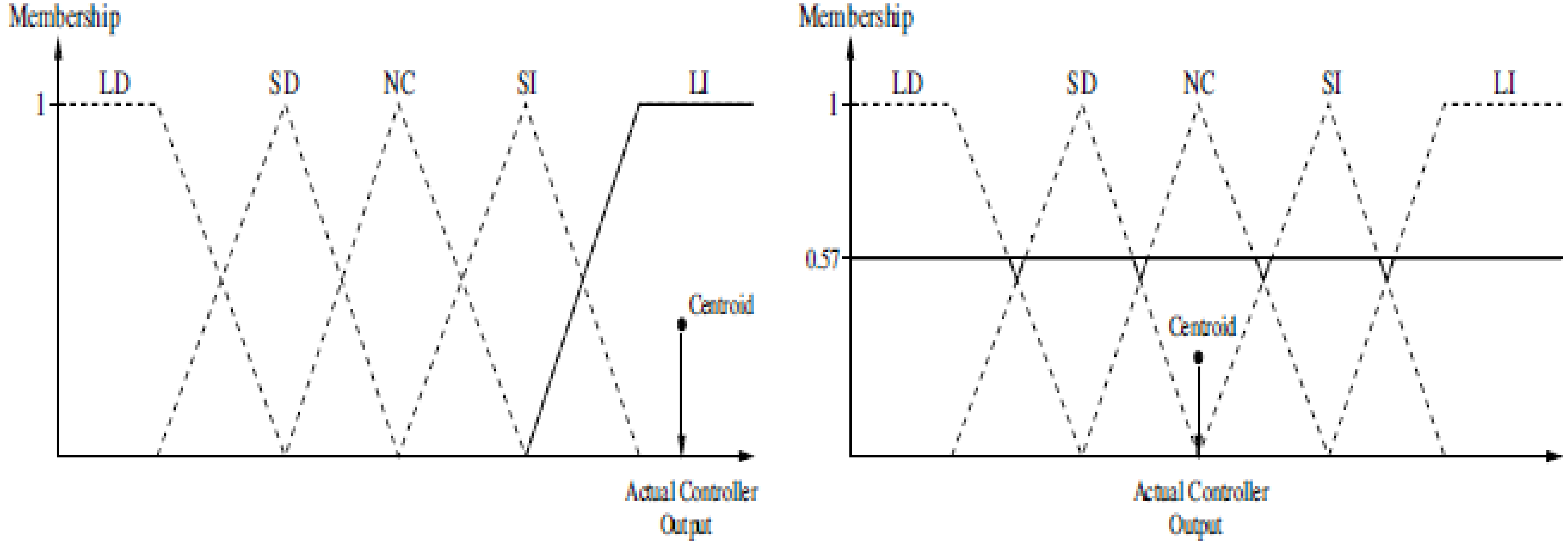
- Приступи заснована на рачунању центроиде:

$$output = \frac{\sum_{i=1}^{n_x} x_i \mu_C(x_i)}{\sum_{i=1}^{n_x} \mu_C(x_i)} \qquad output = \frac{\int_{x \in X} x\mu(x)dx}{\int_{x \in X} \mu(x)dx}$$

- Након рачунања центроиде, прочита се она лингвистичка промењива која јој одговара према неком од следећих правила

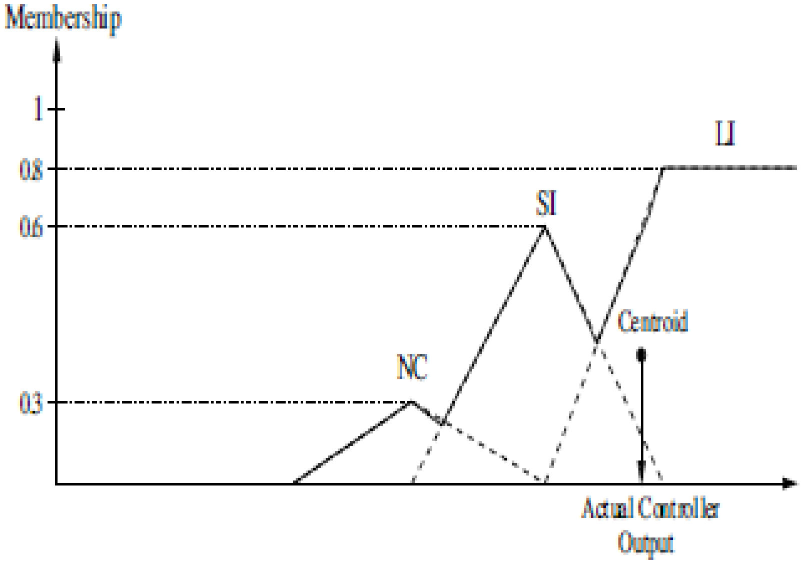
Дефазификација (3)

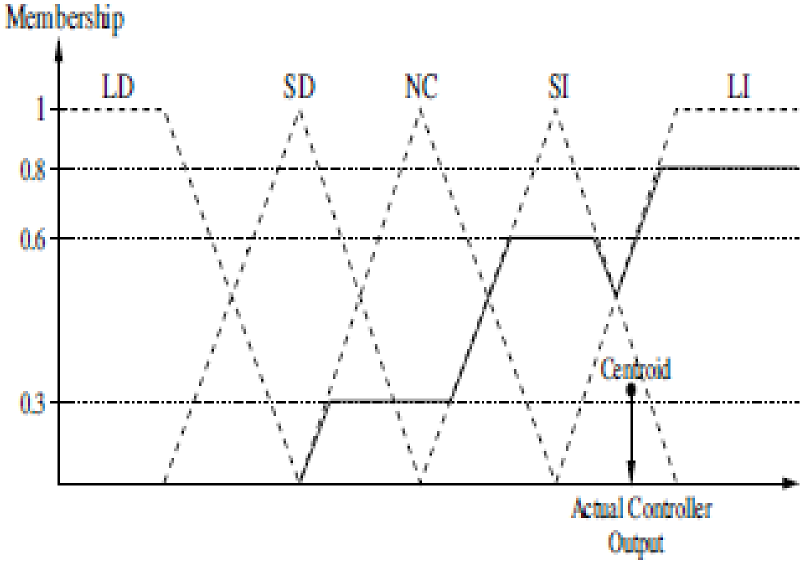
1. max-min – узима се центроида испод лингвистичке променљиве која одговара закључку са највишим степеном, у овом случају је то LI
2. Упросечавање – рачуна се центроида за све лингвистичке променљиве и на основу тога одређује коначна лингвистичка променљива



Дефазификација (4)

3. Скалирање – функције припадности се скалирају према добијеним закључцима и након тога се рачуна центроида
4. Исецање – функције припадности се секу на местима која одговарају закључцима и потом се рачуна центроида





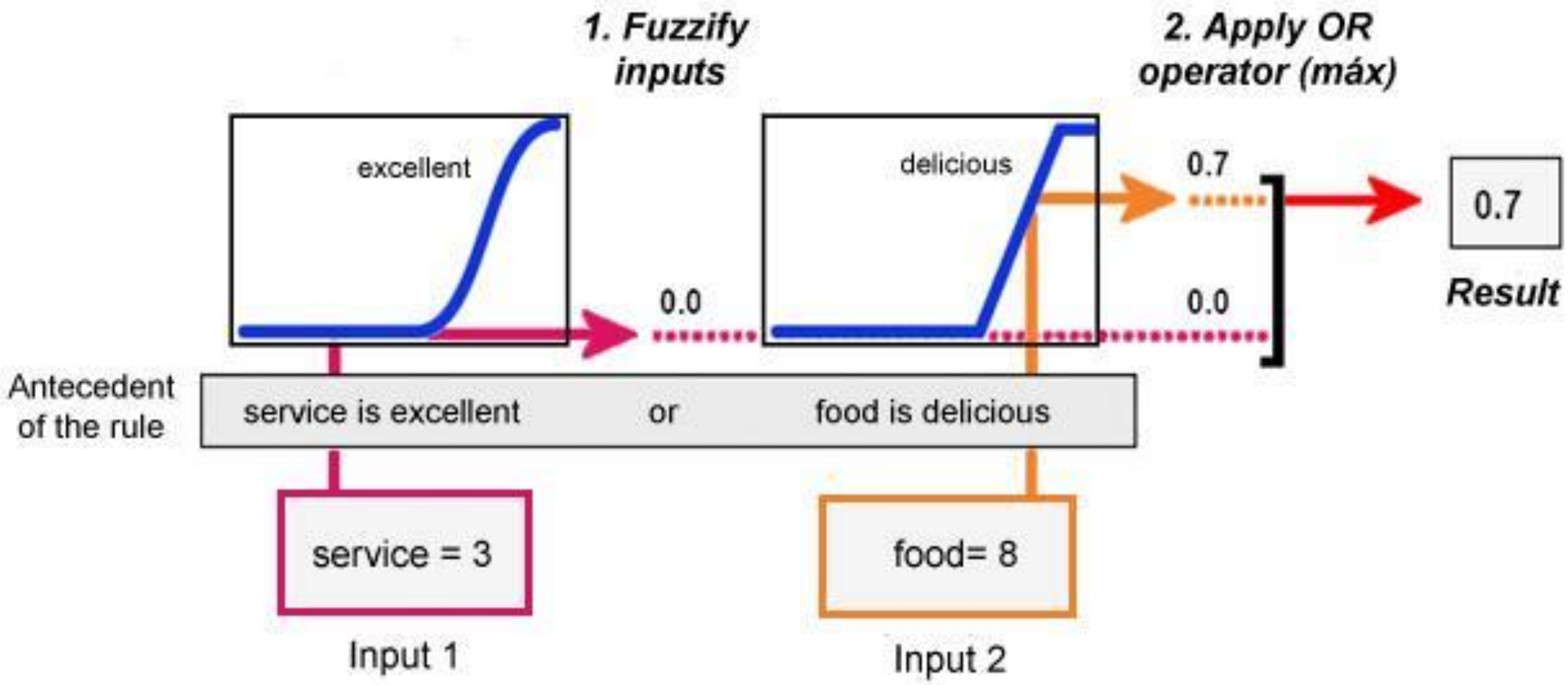
Пример

- Мамданијев фази систем који на основу задовољства корисника услугом **или (OR)** храном одређује величину напојнице
- Притом се водимо следећим правилима:

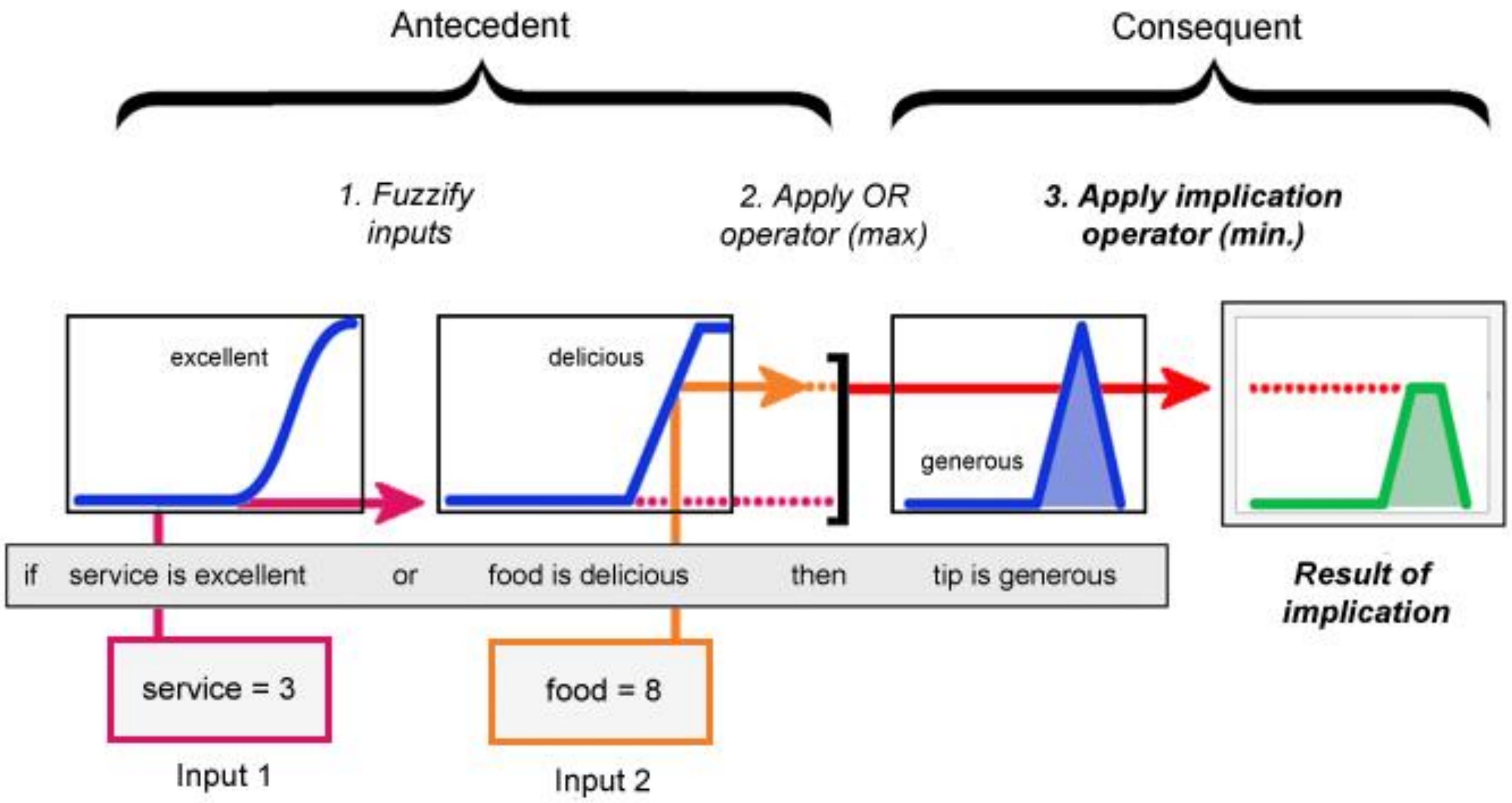
1. Ако је услуга лоша или је храна лоша, онда је напојница мала
2. Ако је услуга добра онда је напојница средња
3. Ако је услуга одлична или је храна јако укусна онда је напојница велика

Пример преузет са:
http://www.dma.fi.upm.es/recursos/aplicaciones/logica_borrosa/web/fuzzy_inferencia/main_en.htm

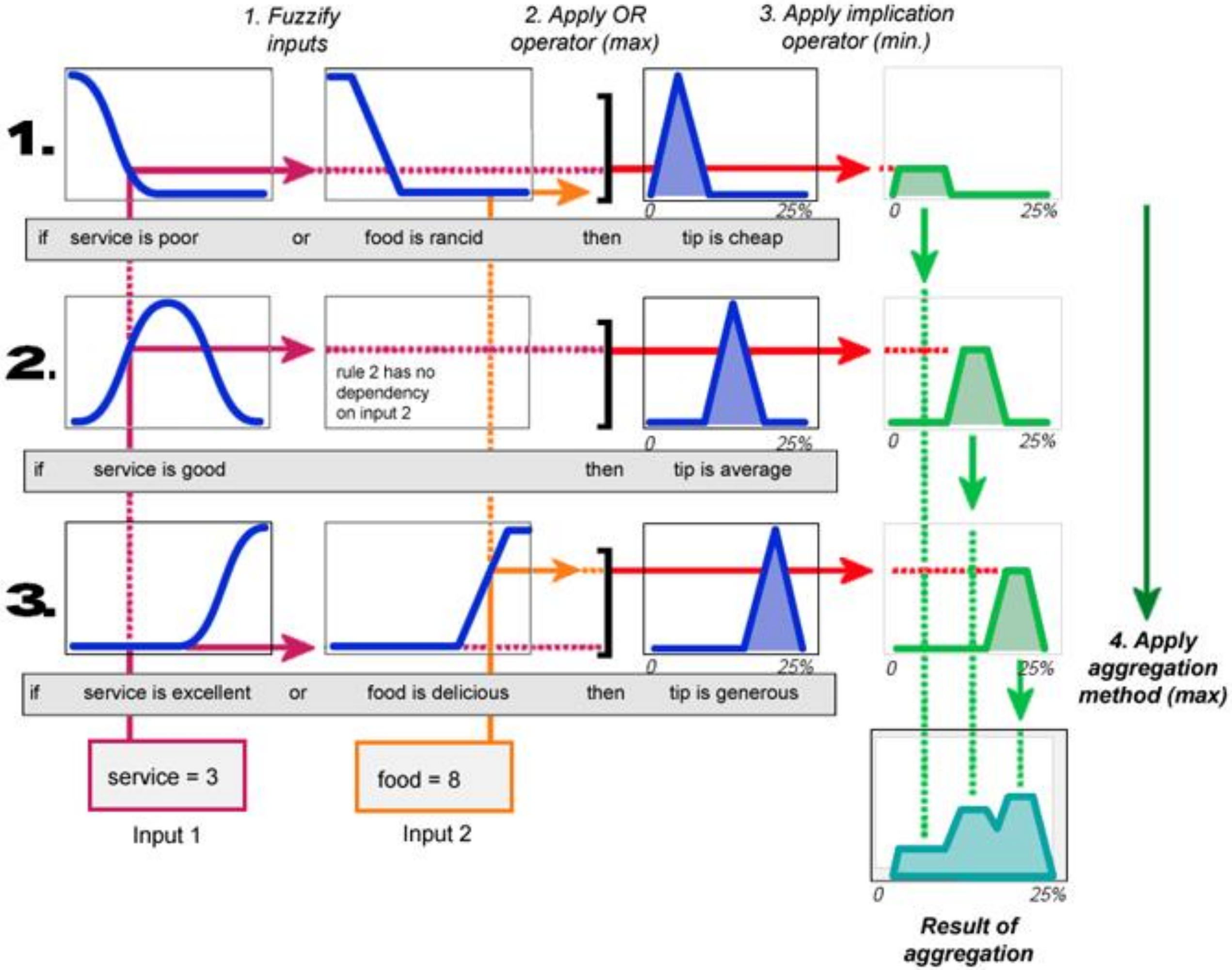
Пример - фазификација



Пример – формирање фази закључака



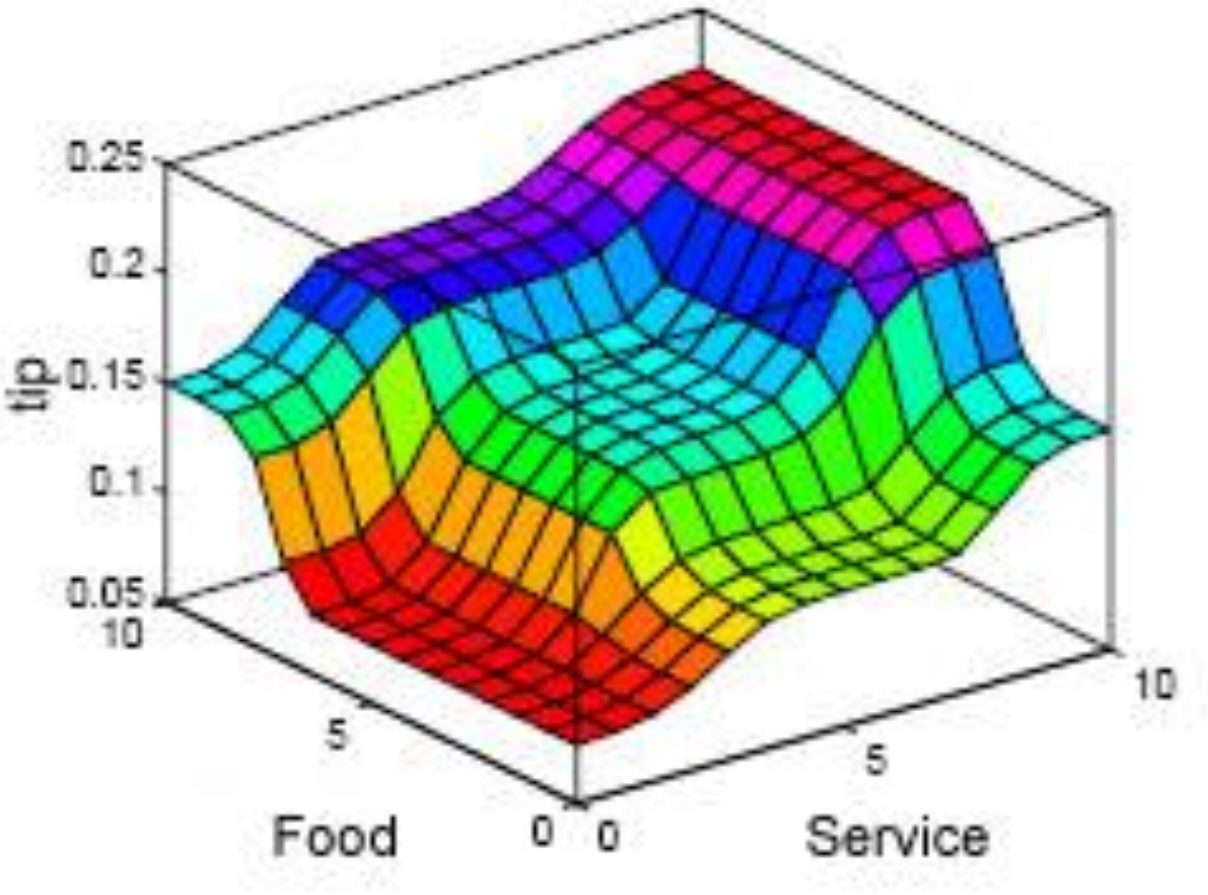
Пример – агрегација закључака



Пример - дефазификација

- На излазу очекујемо конкретну бројевну вредност за напојницу
- Дакле, уместо да добијамо одредницу попут великодушна, мала, итд. кориснијe нам је да добијемо процентуални износ
- Ово се може постићи неком од метода које користе центроиду
- На претходној слици је износ напојнице 16.7% (максимум је 25%)

Изглед функционалне површи



Задатак

- Дизајнирати фази систем за динамички рад семафора
- Циљ је смањивање времена чекања аутомобила и редукција гужви
- Улазне лингвистичке промењљиве:
  - Број аутомобила који наилазе док је светло зелено:
    врло мало, мало, много, јако много – опсег [0, 30] комада
  - Дужина колоне аутомобила у случају црвеног светла:
    веома кратка, кратка, средња, дугачка – опсег [0, 30] метара
- Излазна лингвистичка промењлива:
  - Време трајања зеленог светла са вредностима: кратко, средње, дугачко [5, 50] секунди
- Користити трогуагоне или трапезоидне функције за сваку лингвистичку промењљиву
- Користити Мамданијев метод
- Правила осмислити самостално