Nedelja 5 - Problem ranca i problem najkraćeg puta izmedju dva grada

February 21, 2014

1. Problem ranca je definisan na sledeći način. Dato je N vrsta predmeta čije su zapremine prirodni brojevi dati nizom v, a vrednosti predmeta nizom x. Kreirati metod koijm se popunjava ranac kapaciteta $c > 0$. Ne sme se preći kapacitet, a potrebno je da vrednost predmeta u rancu bude masimalna. Pritom razmotriti samo slučaj da predmeta svake vrste ima neograničeno (postoji i varijanta problema gde je broj predmeta svake vrste ograničen). Test primer:

p:	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7
v:	1	2	8	14	6	13	7
x:	1	3	15	15	7	15	8

   (a) Dati rekurzivno rešenje problema.

   (b) Dati rešenje zasnovano na dinamičkom programiranju. Logika u slučaju dinamičkog programiranja je sledeća. Najpre pokazujemo da sme da se primeni dinamičko programiranje. Da bi moglo da se primeni, mora da važi da je optimalno rešenje sačinjeno iz optimalnih rešenja manjih problema (potproblema).

   Teorema 1. *Neka je P skup predmeta koji predstavljaju optimalno rešenje za zadati kapacitet c. Ukoliko iz tog skupa izvadimo predmet p čija je zapremina data sa v, a cena sa x, onda će $P \backslash p$ biti optimalno rešenje za problem ranca kapaciteta c-x.*

   Dokaz. Pretpostavimo suprotno tvrdjenju, naime, da za kapacitet c-x postoji rešenje Q koje ima veću vrednost od rešenja P\p. Tada je skup Q ∪ p po kapacitetu manji ili jednak od c, a njegova vrednost je veća od vrednosti skupa predmeta P, što je nemoguće jer je P optimalno rešenje za kapacitet c. Kontradikcija. □

   Veza izmedju rešenja problema manjih i većih dimenzija je sledeća (sa a[c] je obeleženo optimalno rešenje za kapacitet c):

$$a[c] = \begin{cases} 0 & c = 0 \\ max\{a[c - v[i]] + x[i]\}, i = 1, ..., N, v[i] \leq c & c > 0 \end{cases} \quad (1)$$

Rešimo problem za dimenziju ranca 10 i prethodno dat spisak predmeta. Postupak je da se rešava za sve kapacitete počev od kapaciteta 0. Za svaki kapacitet pamtimo samo predmet koji smo dodali poslednji dodali tako da maksimizuje gornji izraz. Ovo će biti dovoljno da se kasnije rekonstruiše rešenje problema:

c:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p:	-	p1	p2	p1	p2	p1	p2	p1	p3	p1	p2
v:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x:	0	1	3	4	6	7	9	10	15	16	18

Zaključujemo da optimalno rešenje ima ukupnu cenu 18, a rešenje rekonstruišemo tako što čitamo predmete unazad. Poslednji predmet je p2, što znači da kada izbacimo taj predmet, problem svodimo na kapacitet c=8. Onda čitamo optimalno rešenje za c=8, u pitanju je predmet p3. Njega izbacujemo, pa se problem svodi na c=0. Kako je rešenje za c=0 prazan skup, završili smo, pa konstatujemo da je rešenje skup predmeta {p2,p3}. Test primer:

	g1	g2	g3	g4	g5	g6
g1	0	7	9	∞	∞	14
g2		0	10	15	∞	∞
g3			0	11	∞	2
g4				0	6	∞
g5					0	9
g6						0

2. Problem najkraćeg puta izmedju dva grada je definisan na sledeći način. Dato je N gradova označenih sa g1,...,gN. Udaljenosti izmedju svaka dva grada su data matricom rastojanja D (rastojanje izmedju grada gi i gj je dato sa D(i,j)=D(j,i)). Za odabrana dva grada gx i gy potrebno je naći najkraću putanju izmedju njih. Rešenje problema podrazumeva spisak gradova kroz koje se prolazi na tom putu.

   (a) Dati rekurzivno rešenje problema.

   (b) Dati rešenje zasnovano na dinamičkom programiranju (u ovom rešenju će se besplatno dobiti i putevi izmedju polaznog grada i svih ostalih).

   Teorema 2. *Neka je P optimalni put predstavljen nizom gradova koji se prolaze izmedju grada gx i gy. Posmatrajmo neki grad gz koji se nalazi na optimalnoj putanji. Obeležimo sa P1 deo optimalne* *putanje izmedju gx i gz, a sa P2 deo optimalne putanje izmedju gz i gy. Tvrdimo da je P1 najkraci (optimalni put) za gradove gx i gz.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno tvrdjenju, naime, da za gradove gx i gz postoji put Q koji je kraćci. Jasno je da bi onda put Q+P2<P, što je nemoguće jer je P optimalni put. Kontradikcija. □

Prethodno tvrdjenje možemo i namerno malo "oslabiti", i za grad gz uvek uzimati samo direktne susede grada gy. Na osnovu toga dolazimo do sledeće relacije (a(x,y) označava dužinu optimalnog puta izmedju gx i gy):

$$a(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ min\{a(x,z) + D(z,y)\}, z = 1, ..., N, D(z,y) \neq \infty & x \neq y \end{cases} \tag{2}$$

Sada korišćenjem ove relacije možemo preći na tablično rešavanje problema (objašnjena ideja na času). Ovo je rešenje za prethodno datu matricu udaljenosti i za polazni grad g1.

g1	g2	g3	g4	g5	g6
0	7/g1	9	∞	∞	14
		9/g1	20	23	11
			20	20	11/g3
			20/g3	20	
				20/g6	

Napomena: U cilju pripreme za kontrolni uraditi pod (a) i (b), a takodje uraditi i ručnu proceduru nalaženja najkraćeg puta za sledeću matricu troškova i polazni čvor g3.

	g1	g2	g3	g4	g5	g6	g7	g8
g1	0	5	8	3	∞	∞	12	12
g2		0	∞	5	∞	2	∞	∞
g3			0	7	∞	∞	13	∞
g4				0	9	6	∞	∞
g5					0	∞	7	23
g6						0	4	∞
g7							0	6
g8								0