Nedelja 4 - Uvodni primer za dinamičko programiranje

February 25, 2014

1. Problem najjeftnijieg puta kroz matricu. Neka je data matrica A dimenzija m x n (ne mora se unositi sa ulaza, može biti fiksirana u kodu). Potrebno je pronaći put kroz polja matrice (od gornjeg levog ugla - pozicije (0,0) do donjeg desnog - pozicije (m-1,n-1) takav da je zbir troškova prelazaka preko polja najmanji moguć. Primetiti da ima smisla ići samo dole ili desno. Ovo je primer jedne matrice troškova:

```
 3  5 19  1 11
 4 15  6 14 17
13 13  6  1  9
 5  4  4 17 17
```

   ZA DOMAĆI URADITI pod (a) i (b).

   (a) Dati rekurzivno rešenje problema.

   (b) Dati rešenje zasnovano na dinamičkom programiranju. Logika u slučaju dinamičkog programiranja je sledeća. Najpre pokazujemo da sme da se primeni dinamičko programiranje. Da bi moglo da se primeni, mora da važi da je optimalno rešenje sačinjeno iz optimalnih rešenja manjih problema (potproblema).

   Teorema 1. *Neka je P optimalni put izmedju pozicija (0,0) i (m-1,n-1). Posmatrajmo neku poziciju (i,j) koja se nalazi na optimalnom putu. Neka je P1 put od (0,0) do (i,j), a P2 put od (i,j) do (m-1,n-1). Tvrdimo da su i putevi P1 i P2 optimalni putevi.*

   Dokaz. Pretpostavimo suprotno tvrdjenju, naime, pretpostavimo da postoji neki put Q koji je kraći od P1. Onda bi važilo da je Q+P2 put od (0,0) do (m-1,n-1) koji je kraći od P, što je nemoguće jer je P najkraći (optimalni) put. Kontradikcija. □

   Sada se može primeniti gradjenje rešenja ododzdo naviše, što je osnovna ideja kod dinamičkog programiranja. Krenemo da rešavamo probleme redom od manjih ka većim dimenzijama. Ovde je veza izmedju rešenja manjeg i većeg problema data na sledeći način (d(i,j) je optimalni trošak dolaska do pozicije (i,j)) :

$$d(i,j) = \begin{cases} c(0,0) & i=0, j=0 \\ d(i-1,0)+c(i,0) & i>0, j=0 \\ d(0,j-1)+c(0,j) & i=0, j>0 \\ min\{d(i-1,j), d(i,j-1)+c(i,j)\} & i>0, j>0 \end{cases} \quad (1)$$

Kada se primeni na prethodno datu matricu, dobija se sledeća matrica ukupnih troškova:

```
 3  8 27 28 39
 7 22 28 42 56
20 33 34 35 44
25 29 33 50 61
```

Najjeftiniji put se rekonstruiše prolazom unazad (od pozicije (m-1,n-1)) praćenjem linije najmanjih troškova. Najjeftiniji put:

```
 3
 7 22 28
      34 35
            61
```