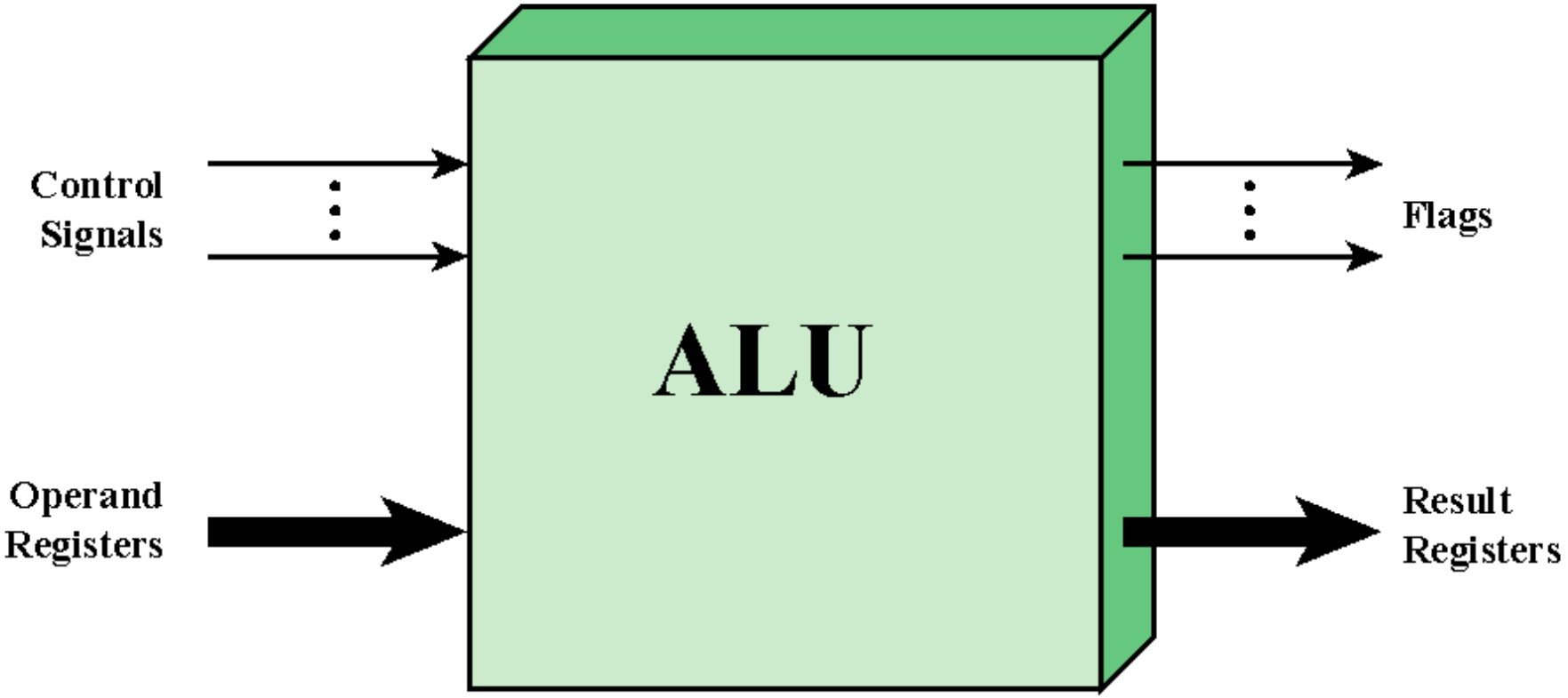
# Увод у рачунарство 1

Александар Картељ

kartelj@matf.bg.ac.rs

# Аритметичко логичка јединица



# Рачунарска аритметика

Цели бројеви

# Подсећање на различите типове записа

- Знак и апсолутна вредност
  - Први бит означава знак
  - Позитивна и негативна нула
- Непотпуни комплемент
  - Први бит такође означава знак
  - Негација број се добија комплементирањем свих цифара
  - Позитивна и негативна нула
- Потпуни комплемент
  - Први бит означава знак
  - Негација се добија додавањем јединце на непотпуни комплемент
  - Само једна нула

$$A_{ZA} = (-1)^{a_{n-1}} \sum_{i=0}^{n-2} 2^i a_i$$

$$A_{NK} = (-2^{n-1} + 1) a_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} 2^i a_i$$

$$A_{PK} = -2^{n-1} a_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} 2^i a_i$$

# Примери записа

| Dekadna vrednost | Znak i apsolutna vrednost | Nepotpuni komplment | Potpuni komplement |
|---|---|---|---|
| +127 | 01111111 | 01111111 | 01111111 |
| +64 | 01000000 | 01000000 | 01000000 |
| +3 | 00000011 | 00000011 | 00000011 |
| +2 | 00000010 | 00000010 | 00000010 |
| +1 | 00000001 | 00000001 | 00000001 |
| +0 | 00000000 | 00000000 | 00000000 |
| -0 | 10000000 | 11111111 | --- |
| -1 | 10000001 | 11111110 | 11111111 |
| -2 | 10000010 | 11111101 | 11111110 |
| -3 | 10000011 | 11111100 | 11111101 |
| -64 | 11000000 | 10111111 | 11000000 |
| -127 | 11111111 | 10000000 | 10000001 |

# Операције над целим бројевима

- Мењање дужине записа
- Промена знака
- Прекорачење
- Сабирање и одузимање
- Множење
- Дељење

# Мењање дужине записа

- Нека тренутна дужина записа износи n
- Ако је циљна дужина записа m, онда имамо три случаја:
  1. m<n – није дозвољена операција, јер се могу изгубити информације
  2. m=n – нема промене дужине у овом случају
  3. m>n – валидна промена дужине

# Мењање дужине записа знак и апсолутна вредност

- Бит за знак се помери на позицију највеће тежине, а остала места попуне нулама

| Dekadna vrednost | 8-bitna reč | 16-bitna reč | Zapis |
|---|---|---|---|
| +127 | 01111111 | 0000000001111111 | znak i aps. vred. |
| +5 | 00000101 | 0000000000000101 | znak i aps. vred. |
| +0 | 00000000 | 0000000000000000 | znak i aps. vred. |
| -0 | 10000000 | 1000000000000000 | znak i aps. vred. |
| -5 | 10000101 | 1000000000000101 | znak i aps. vred. |
| -127 | 11111111 | 1000000001111111 | znak i aps. vred. |

# Мењање дужине записа непотпуни и потпуни комплемент

- Број са највише позиције у краћем запису се дописује на све новододате позиције

| Dekadna vrednost | 8-bitna reč | 16-bitna reč | Zapis |
|---|---|---|---|
| +5 | 00000101 | 0000000000000101 | nepotpuni komp. |
| -5 | 11111010 | 1111111111111010 | nepotpuni komp. |
| +9 | 00001001 | 0000000000001001 | potpuni kompl. |
| -9 | 11110111 | 1111111111110111 | potpuni kompl. |

# Промена знака – знак и апсолутна вредност

- Комплементира се бит за знак броја

| Dekadna vrednost | Binarni zapis |
|---|---|
| +9 | 00001001 |
| +5 | 00000101 |
| −5 | 10000101 |
| −9 | 10001001 |

# Промена знака – непотпуни комплемент

- Комплементирање сваке цифре у запису

| Dekadna vrednost | Binarni zapis |
|---|---|
| +9 | 00001001 |
| +5 | 00000101 |
| −5 | 11111010 |
| −9 | 11110110 |

# Промена знака – потпуни комплемент

- Два корака:
  1. Комплементирање сваке цифре укључујући и место за знак
  2. Добијени број се сабере са 1 и игнорише евентуално прекорачење

| | | | |
|---|---|---|---|
| +9 | = | 00001001 | potpuni komplement |
| | | 11110110 | 1. korak |
| | | +00000001 | 2. korak |
| -9 | | 11110111 | rezultat |
| | | | |
| -5 | = | 11111011 | potpuni komplement |
| | | 00000100 | 1. korak |
| | | +00000001 | 2. korak |
| +5 | = | 00000101 | rezultat |

# Промена знака – потпуни комплемент (2)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | = | 00000000 | potpuni komplement |
| | | 11111111 | 1. korak |
| | | +00000001 | 2. korak |
| 0 | = | 100000000 | rezultat, pri čemu se prekoračenje ignoriše |

| | | | |
|---|---|---|---|
| -128 | = | 10000000 | potpuni komplement |
| | | 01111111 | 1. korak |
| | | +00000001 | 2. korak |
| -128 | = | 10000000 | rezultat koji predstavlja isti broj |

# Прекорачење

- При сабирању бројева A и B који су записани са n цифара, може се добити број C за чији тачан запис је потребна n+1 цифра
- Ова ситуација се назива прекорачење
- На бројеве A и B се додаје једна цифра вишка на највишу позицију
  - Код сабирања се прекорачење препознаје тако што збир има различит знак у односу на операнде – односно различиту цифру вишка
- Генерише се специјални (overflow) сигнал у ALU
- Може се десити и код множења, ако није одвојено довољно простора за производ

# Прекорачење код потпуног комплемента

- Код потпуног комплемента је могуће одредити прекорачење и без додавања цифре вишка
- Логичка формула за детекцију прекорачења је:

$$P = (a_{n-1} \wedge b_{n-1} \wedge \neg c_{n-1}) \vee (\neg a_{n-1} \wedge \neg b_{n-1} \wedge c_{n-1})$$

- Проверити је на четворобитним бројевима (3 и 5) или (-4 и -7).
- Проверити да ли ради у запису знак и апсолутна вредност.

# Сабирање и одузимање неозначених бројева

- Записи се поравнају у складу са тежинама цифара
- Само се врши бинарно сабирање сваке две поравнате цифре
- Могућ је пренос у износу од 1 на вишу позицију
- Пренос на позицију најмање тежине је подразумевано 0

a) 14 + 10

| | | |
|---|---|---|
| 14 | = | 00001110 |
| 10 | = | 00001010 |
| 24 | = | 00011000 |

b) 252 + 5

| | | |
|---|---|---|
| 252 | = | 0 11111100 |
| 5 | = | 0 00000101 |
| *** | = | 1 00000001 |

# Сабирање и одузимање знак и апсолутна вредност

- Ако су бројеви истог знака, онда је и резултат сабирања тог истог знака
- Ако су бројеви различитог знака, знак ће бити једнак сабирку који има већу апсолутну вредност
- Апсолутна вредност је разлика веће и мање апс. вр. бројева
- Одузимање се своди на сабирање  уз промену знака операнду

a) +14 + 10

| | | |
|---|---|---|
| +14 | = | 0\|0001110 |
| +10 | = | 0\|0001010 |
| 24 | = | 0\|0011000 |

b) +127 + 3

| | | | |
|---|---|---|---|
| +127 | = | 0 | 0\|1111111 |
| +3 | = | 0 | 0\|0000011 |
| *** | = | 1 | 0\|0000010 |

# Сабирање и одузимање непотпуни комплемент

- Најпре се рачуна међурезултат сабирањем као да су неозначени

$$\begin{array}{rccccccc} A = & & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ B = & & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_1 & b_0 \\ \hline C' = & c'_n & c'_{n-1} & c'_{n-2} & \ldots & c'_1 & c'_0 \end{array}$$

- У другом кораку се пренос са бита највеће тежине дода на међурезултат.

$$\begin{array}{rcl} C'' & = & c'_{n-1}c'_{n-2}\ldots c'_1c'_0 \\ & & \qquad\qquad\quad c'_n \\ \hline C & = & c_{n-1}c_{n-2}\ldots c_1c_0 \end{array}$$

# Сабирање и одузимање непотпуни комплемент (2)

- Одузимање се своди на сабирање са негираним операндом.

a) +14 + 10

I korak:

| | | |
|---|---|---|
| A=+14 | = | 00001110 |
| B=+10 | = | 00001010 |
| C’ | = | 0\|00011000 |

II korak:

| | | |
|---|---|---|
| C’’ | = | 00011000 |
| | | 0 |
| C=+24 | = | 00011000 |

b) +127-(+10) = +127+(-10)

I korak:

| | | |
|---|---|---|
| A=+127 | = | 01111111 |
| B=-10 | = | 11110101 |
| C’ | = | 1\|01110100 |

II korak:

| | | |
|---|---|---|
| C’’ | = | 01110100 |
| | | 1 |
| C=+117 | = | 01110101 |

c) +100 + 65

I korak:

| | | |
|---|---|---|
| A=+100 | = | 01100100 |
| B=+65 | = | 01000001 |
| C’ | = | 0\|10100101 |

II korak:

| | | |
|---|---|---|
| C’’ | = | 10100101 |
| | | 0 |
| C=*** | = | 10100101 |

# Сабирање и одузимање потпуни комплемент

- Најпре се рачуна међурезултат као и збир неозначених бројева

$$\begin{array}{rccccccc} A = & & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ B = & & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_1 & b_0 \\ \hline C' = & c'_n & c'_{n-1} & c'_{n-2} & \ldots & c'_1 & c'_0 \end{array}$$

- Коначан резултат се добија простим уклањањем преноса са највише позиције и провером прекорачења
- Одузимање се, као и раније, своди на сабирање са промењеним знаком операнда

# Сабирање и одузимање потпуни комплемент (2)

a) +14 + 10

| | | |
|---|---|---|
| A=+14 | = | 00001110 |
| B=+10 | = | 00001010 |
| C' | = | 0\|00011000 |
| C=+24 | = | 00011000 |

b) +100 + 65

| | | |
|---|---|---|
| A=+100 | = | 01100100 |
| B=+65 | = | 01000001 |
| C'= | = | 0\|10100101 |
| C=*** | = | 10100101 |

c) +127 -10

| | | |
|---|---|---|
| A=+127 | = | 01111111 |
| B=-10 | = | 11110110 |
| C'= | = | 1\|01110101 |
| C=+117 | = | 01110101 |

d) -100-(+65)=-100+(-65)

| | | |
|---|---|---|
| A=-100 | = | 10011100 |
| B=-65 | = | 10111111 |
| C'= | = | 1\|01011011 |
| C=*** | = | 01011011 |

# Множење неозначених бројева

- Стандардно множење са потписивањем делимичних збирова

```
        00001110 x 00001001  |   14 x 9 (činioci)
        00001110             |
       00000000              |
      00000000               |  Delimični
     00001110                |
    00000000                 |  proizvodi
   00000000                  |
  00000000                   |
 00000000                    |
 ---------------             |
0000000001111110             |  = 126 (rezultat)
```

# Множење неозначених бројева (2)

- Множење неким степеном двојке одговара померању регистра

```
0000000000001110 × 00001001
0000000000001110
0000000000000000
0000000000000000
0000000001110000
0000000000000000
0000000000000000
0000000000000000
0000000000000000
0000000001111110
```

$$0000000000001110 \times 1 \times 2^{0}$$
$$0000000000001110 \times 0 \times 2^{1}$$
$$0000000000001110 \times 0 \times 2^{2}$$
$$0000000000001110 \times 1 \times 2^{3}$$
$$0000000000001110 \times 0 \times 2^{4}$$
$$0000000000001110 \times 0 \times 2^{5}$$
$$0000000000001110 \times 0 \times 2^{6}$$
$$0000000000001110 \times 0 \times 2^{7}$$

# Множење неозначених бројева (3)

- Побољшања:

1. Проблем је памћење делимичних резултата
   - Боље је имати само један међурезултат (активни резултат)
2. Потребно је рачунати међузбирове само за позиције које одговарају бинарним јединицама

- Хардверску имплементацију у домену дигиталне логике
  - Овде дајемо само идеју

# Идеја хардверског множења неозн. бр.

- Потребна су три регистра A, M и P и један једнобитни регистар C

1. Множеник се уписује у M, а множилац у P, A и C су на нули
2. Бит множиоца са помера ка већој позицији (иницијално на најнижој)
   - Уколико је вредност бита 1, врши се сабирање M и A, иначе ништа
3. Померање садржаја регистара C, A и P удесно
   (сва три се посматрају спојено)
4. Ако нису обрађени сви битови множиоца, враћамо се на корак 2.
5. Завршено, вредност производа је уписана у регистрима A и P
   (посматрају се као један регистар)

# Идеја хардверског множења неозн. бр. (2)

| $M$ | $C$ | $A$ | $P$ | Komentar | |
|---|---|---|---|---|---|
| 00001110 | 0 | 00000000 | 00001001 | Početno stanje | M=14, P=9, C=0, A=0 |
| 00001110 | 0 | 00001110 | 00001001 | $A = A + M$ | Prvi ciklus |
| 00001110 | 0 | 00000111 | 00000100 | Pomeranje udesno | |
| 00001110 | 0 | 00000111 | 00000100 | Bez akcije | Drugi ciklus |
| 00001110 | 0 | 00000011 | 10000010 | Pomeranje udesno | |
| 00001110 | 0 | 00000011 | 10000010 | Bez akcije | Treći ciklus |
| 00001110 | 0 | 00000001 | 11000001 | Pomeranje udesno | |
| 00001110 | 0 | 00001111 | 11000001 | $A = A + M$ | Četvrti ciklus |
| 00001110 | 0 | 00000111 | 11100000 | Pomeranje udesno | |
| 00001110 | 0 | 00000111 | 11100000 | Bez akcije | Peti ciklus |
| 00001110 | 0 | 00000011 | 11110000 | Pomeranje udesno | |
| 00001110 | 0 | 00000011 | 11110000 | Bez akcije | Šesti ciklus |
| 00001110 | 0 | 00000001 | 11111000 | Pomeranje udesno | |
| 00001110 | 0 | 00000001 | 11111000 | Bez akcije | Sedmi ciklus |
| 00001110 | 0 | 00000000 | 11111100 | Pomeranje udesno | |
| 00001110 | 0 | 00000000 | 11111100 | Bez akcije | Osmi ciklus |
| 00001110 | 0 | 00000000 | 01111110 | Pomeranje udesno | |
| | | 00000000 | 01111110 | Rezultat | $14 \times 9 = 126$ |

# Множење означених бројева у потпуном комплементу – Бутов алгоритам

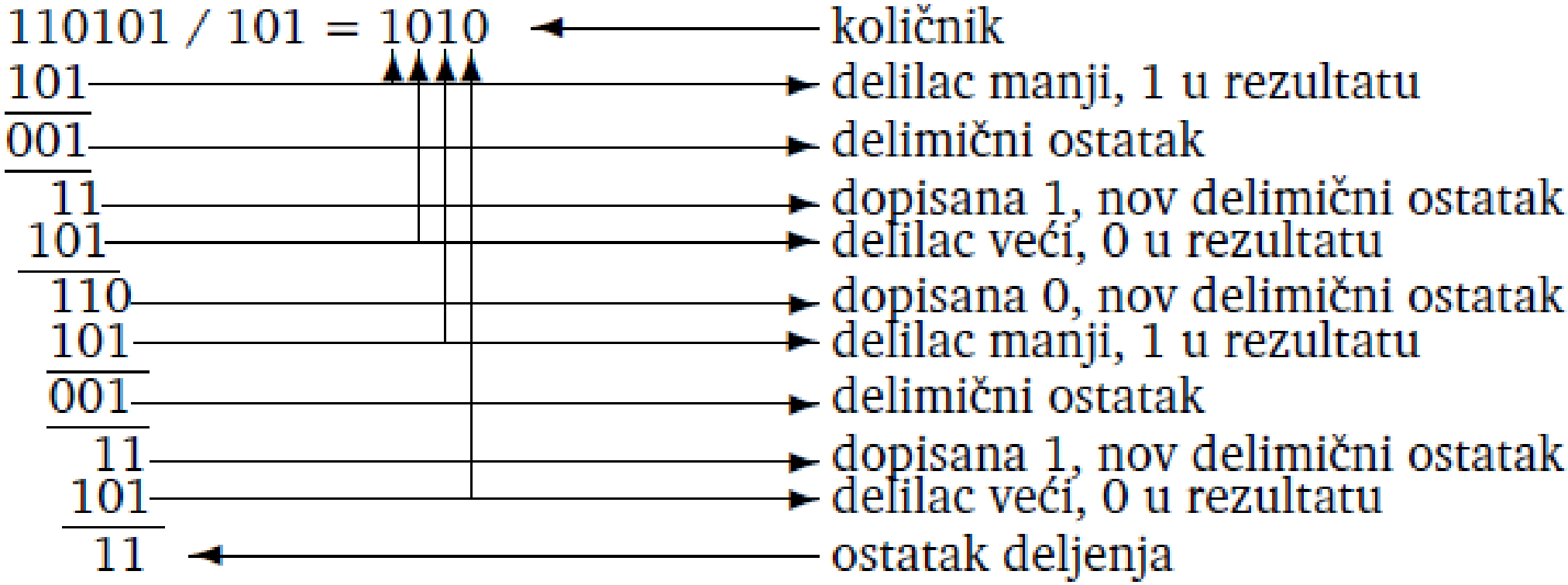
- Потребна су четири регистра, A, M, P и једнобитни $P_{-1}$

1. Иницијализација као код претходног алгоритма
2. Пореде се бит најмање тежине у P и вредност $P_{-1}$
   - Ако су различити 01, онда се множеник и A саберу
   - Ако су различити 10, тада се множеник одузме од A
   - Ако су једнаки (00 или 11), онда нема акције
3. Померају се спојени регистри A, P и $P_{-1}$ удесно
4. Ако нису обрађени сви битови множиоца, враћамо се на 2.
5. Резултат је уписан у спојене регистре A и P

# Множење означених бројева у потпуном комплементу – Бутов алгоритам (2)

| $M$ | $A$ | $P$ | $P_{-1}$ | Komentar | |
|---|---|---|---|---|---|
| 11110010 | 00000000 | 11110111 | 0 | Početno stanje | M=-14, P=-9 |
| 11110010 | 00001110 | 11110111 | 0 | $A = A - M$ | Prvi ciklus |
| 11110010 | 00000111 | 01111011 | 1 | Pomeranje udesno | |
| 11110010 | 00000111 | 01111011 | 1 | Bez akcije | Drugi ciklus |
| 11110010 | 00000011 | 10111101 | 1 | Pomeranje udesno | |
| 11110010 | 00000011 | 10111101 | 1 | Bez akcije | Treći ciklus |
| 11110010 | 00000001 | 11011110 | 1 | Pomeranje udesno | |
| 11110010 | 11110011 | 11011110 | 1 | $A = A + M$ | Četvrti ciklus |
| 11110010 | 11111001 | 11101111 | 0 | Pomeranje udesno | |
| 11110010 | 00000111 | 11101111 | 0 | $A = A - M$ | Peti ciklus |
| 11110010 | 00000011 | 11110111 | 1 | Pomeranje udesno | |
| 11110010 | 00000011 | 11110111 | 1 | Bez akcije | Šesti ciklus |
| 11110010 | 00000001 | 11111011 | 1 | Pomeranje udesno | |
| 11110010 | 00000001 | 11111011 | 1 | Bez akcije | Sedmi ciklus |
| 11110010 | 00000000 | 11111101 | 1 | Pomeranje udesno | |
| 11110010 | 00000000 | 11111101 | 1 | Bez akcije | Osmi ciklus |
| 11110010 | 00000000 | 01111110 | 1 | Pomeranje udesno | |
| | | 01111110 | 1 | Rezultat | -14×-9 = 126 |

# Дељење неозначених бројева



# Дељење неозначених бројева (2)

- Три регистра P, A и M, и бројач иницијално постављен на број битова у регистрима
- У P се уписује дељеник, у M делилац, а у A нула

1. A и P се померају улево за један бит
2. Од A се одузима M
3. Ако је A веће или једнако од 0, у бит најмање тежине P се уписује 1, а иначе 0. Садржај M се сабира са A ради враћања претходног стања.
4. Вредност бројача се смањује за 1 и ако је бројач већи од 0, врамо се на корак 1
5. Завршено, количник је уписан у регистру P, а остатак у A

# Дељење неозначених бројева (3)

- Три регистра P, A и M, и бројач иницијално постављен на број битова у регистрима
- У P се уписује дељеник, у M делилац, а у A нула

1. A и P се померају улево за један бит
2. Од A се одузима M
3. Ако је A веће или једнако од 0, у бит најмање тежине P се уписује 1, а иначе 0. Садржај M се сабира са A ради враћања претходног стања.
4. Вредност бројача се смањује за 1 и ако је бројач већи од 0, врамо се на корак 1
5. Завршено, количник је уписан у регистру P, а остатак у A

# Дељење неозначених бројева (4)

| $M$ | $A$ | $P$ | Komentar |
|---|---|---|---|
| Primer 1: 24/9 | | | |
| 00001001 | 00000000 | 00011000 | Početno stanje, 24/9 |
| 00001001 | 00000000 | 00110000 | Pomeranje ulevo |
| | 00001001 | | Oduzimanje $A \leftarrow\!\!- A - M$ |
| 00001001 | 00000000 | 00110000 | $P_0 \leftarrow\!\!- 0$, restauracija sadržaja $A$ |
| 00001001 | 00000000 | 01100000 | Pomeranje ulevo |
| | 00001001 | | Oduzimanje $A \leftarrow\!\!- A - M$ |
| 00001001 | 00000000 | 01100000 | $P_0 \leftarrow\!\!- 0$, restauracija sadržaja $A$ |
| 00001001 | 00000000 | 11000000 | Pomeranje ulevo |
| | 00001001 | | Oduzimanje $A \leftarrow\!\!- A - M$ |
| 00001001 | 00000000 | 11000000 | $P_0 \leftarrow\!\!- 0$, restauracija sadržaja $A$ |
| 00001001 | 00000001 | 10000000 | Pomeranje ulevo |
| | 00001001 | | Oduzimanje $A \leftarrow\!\!- A - M$ |
| 00001001 | 00000001 | 10000000 | $P_0 \leftarrow\!\!- 0$, restauracija sadržaja $A$ |
| 00001001 | 00000011 | 00000000 | Pomeranje ulevo |
| | 00001001 | | Oduzimanje $A \leftarrow\!\!- A - M$ |
| 00001001 | 00000011 | 00000000 | $P_0 \leftarrow\!\!- 0$, restauracija sadržaja $A$ |
| 00001001 | 00000110 | 00000000 | Pomeranje ulevo |
| | 00001001 | | Oduzimanje $A \leftarrow\!\!- A - M$ |
| 00001001 | 00000110 | 00000000 | $P_0 \leftarrow\!\!- 0$, restauracija sadržaja $A$ |
| 00001001 | 00001100 | 00000000 | Pomeranje ulevo |
| | 00001001 | | Oduzimanje $A \leftarrow\!\!- A - M$ |
| 00001001 | 00000011 | 00000001 | $P_0 \leftarrow\!\!- 1$ |
| 00001001 | 00000110 | 00000000 | Pomeranje ulevo |
| | 00001001 | | Oduzimanje $A \leftarrow\!\!- A - M$ |
| 00001001 | 00000110 | 00000010 | $P_0 \leftarrow\!\!- 0$, restauracija sadržaja $A$ |
| | 00000110 | 00000010 | Količnik = 2, ostatak = 6 |

# Рачунарска аритметика

Бинарно кодирани декадни бројеви

# Бинарно кодирани декадни бројеви (BCD)

- Мотивација: омогућавање тачног записа мешовитих бројева
  - Видели смо раније примере када неки разломљени број не можемо тачно запамтити
- Сваку цифру чувамо засебно са најмање 4 бинарне цифре
- Кодирање декадних цифара мора бити једнозначно
- Пожељне особине за извођење аритметичких операција:
  - Највећој цифри (9) придружити највећу бинарну вредност
  - (Не)парним декадним одговарају (не)парни бинарни
  - Комплементарност кода – ако су a+b=9, онда и бинарне кодне репрезентације треба да буду комплементарне

# Примери кодирања

| Dekadna cifra | Binarni kod | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 8421 | 2421 | 5421 | 753-6 | 84-2-1 | višak 3 | ciklički |
| 0 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0011 | 0001 |
| 1 | 0001 | 0001 | 0001 | 1001 | 0111 | 0100 | 0101 |
| 2 | 0010 | 0010 | 0010 | 0111 | 0110 | 0101 | 0111 |
| 3 | 0011 | 0011 | 0011 | 0010 | 0101 | 0110 | 1111 |
| 4 | 0100 | 0100 | 0100 | 1011 | 0100 | 0111 | 1110 |
| 5 | 0101 | 1011 | 1000 | 0100 | 1011 | 1000 | 1100 |
| 6 | 0110 | 1100 | 1001 | 1101 | 1010 | 1001 | 1000 |
| 7 | 0111 | 1101 | 1010 | 1000 | 1001 | 1010 | 1001 |
| 8 | 1000 | 1110 | 1011 | 0110 | 1000 | 1011 | 1011 |
| 9 | 1001 | 1111 | 1100 | 1111 | 1111 | 1100 | 0011 |

# Грејов код

- Грејов код поставља услов да бинарне репрезентације узастопних декадних бројева имају разлику на само једном биту (практично?)
- Постоји више начина да се конструише Грејов код
  - Функција кодирања није јединствена
- Често употребљавана Грејова функција кодирања је:

$$G(n,i) =_n i \oplus_n [i/2]$$

- Где је n – дужина записа, а i је број који представљамо, док је $_n$i одговарајућа бинарна репрезентација броја i
- Заокружени знак плус је ексклузивна дисјункција

# Грејов код (2)

| Heksadekadna cifra | Binarna vrednost | Grejov kod | Heksadekadna cifra | Binarna vrednost | Grejov kod |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0000 | 0000 | 8 | 1000 | 1100 |
| 1 | 0001 | 0001 | 9 | 1001 | 1101 |
| 2 | 0010 | 0011 | A | 1010 | 1111 |
| 3 | 0011 | 0010 | B | 1011 | 1110 |
| 4 | 0100 | 0110 | C | 1100 | 1010 |
| 5 | 0101 | 0111 | D | 1101 | 1011 |
| 6 | 0110 | 0101 | E | 1110 | 1001 |
| 7 | 0111 | 0100 | F | 1111 | 1000 |

# Означени бинарно кодирани декадни бр.

1. Знак и апсолутна вредност
   - За запис знака се оставља додатна декадна цифра
   - Које ће вредности представљати знакове зависи од имплементације
2. 10-ти комплемент
   - Негација броја се добија комплементирањем према основи 10
   - То значи да ће нула означавати позитивне, а деветка негативне бројеве

- Најчешће се користи запис знак и апсолутна вредност

# Чен-Хо кодирање

- Кодира три декадне цифре у 10 бита (оптимизовано)
- 20% ефикасније од BCD записа
- Дели цифре на мале (0-7) и велике (8,9)
  - За мале довољна три бита, а за велике један за међусобну разлику
- Примери комбинација:
  - Све три цифре мале: 3 + 3  + 3 за цифре + 1 бит да означи комбинацију
  - Две цифре мале: 3 + 3 + 1 за цифре + 3 бита за комбинацију
  - Једна цифра мала: 3 + 1 + 1 за цифре + 5 битова за комбинацију
  - Све цифре велике: 1 + 1 + 1 за цифре + 5 за комбинацију (2 су вишак)

# Чен-Хо кодирање (2)

| Бинарно кодирање | | | | | | | | | | | Децимални запис | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1024 стања | b9 | b8 | b7 | b6 | b5 | b4 | b3 | b2 | b1 | b0 | d2 | d1 | d0 | Вредности |
| 50.0% (512) | 0 | a | b | c | d | e | f | g | h | i | 0abc | 0def | 0ghi | (0–7) (0–7) (0–7) |
| 37.5% (384) | 1 | 0 | 0 | c | d | e | f | g | h | i | 100c | 0def | 0ghi | (8–9) (0–7) (0–7) |
| | 1 | 0 | 1 | c | a | b | f | g | h | i | 0abc | 100f | 0ghi | (0–7) (8–9) (0–7) |
| | 1 | 1 | 0 | c | d | e | f | a | b | i | 0abc | 0def | 100i | (0–7) (0–7) (8–9) |
| 9.375% (96) | 1 | 1 | 1 | c | 0 | 0 | f | a | b | i | 0abc | 100f | 100i | (0–7) (8–9) (8–9) |
| | 1 | 1 | 1 | c | 0 | 1 | f | d | e | i | 100c | 0def | 100i | (8–9) (0–7) (8–9) |
| | 1 | 1 | 1 | c | 1 | 0 | f | g | h | i | 100c | 100f | 0ghi | (8–9) (8–9) (0–7) |
| 3.125% (8 од 32) | 1 | 1 | 1 | c | 1 | 1 | f | 0 | 0 | i | 100c | 100f | 100i | (8–9) (8–9) (8–9) |

# Упоредна табела BCD и Чен-Хо кодирања

| Број | BCD | Чен-Хо |
|---|---|---|
| 5 | 0000 0000 0101 | 000 000 0101 |
| 9 | 0000 0000 1001 | 110 000 0001 |
| 55 | 0000 0101 0101 | 000 010 1101 |
| 79 | 0000 0111 1001 | 110 011 1001 |
| 80 | 0000 1000 0000 | 101 000 0000 |
| 99 | 0000 1001 1001 | 111 000 1001 |
| 555 | 0101 0101 0101 | 010 110 1101 |
| 999 | 1001 1001 1001 | 111 111 1001 |

# Рачунарска аритметика

Реални бројеви

# Реални бројеви у покретном зарезу

- Бавићемо се само аритметиком у покретном зарезу
- Број се представља помоћу основе *B* која је увек парна и прецизности p (број значајних цифара)
- Нпр. Нека је *B*=10 и *p*=4:
  - $0.4 = 4.000 \times 10^{-1}$
  - $5640000000000000000000000000 = 5.640 \times 10^{26}$
- Ако је B=2, p=10:
  - $0.4 = 1.100110011 \times 2^{-2}$
- Обично се користе основе 2, 10 и 16

# Стандард IEEE754-2008

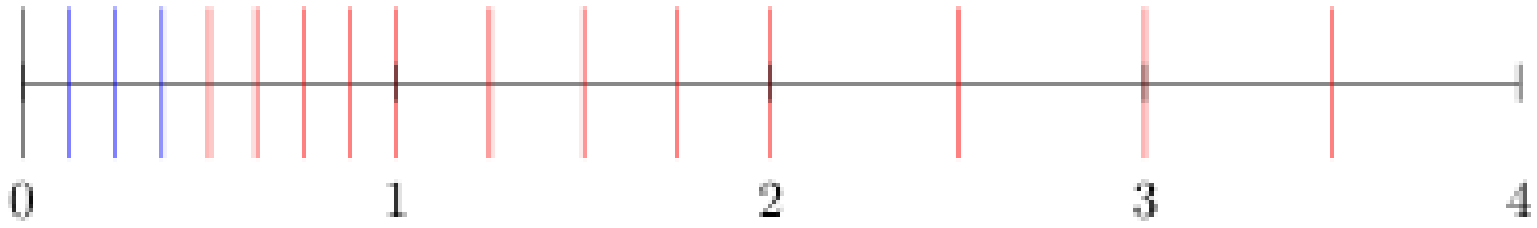
- Прописује репрезентације реалних бројева у покретном зарезу
- Основе $B=2$ и $B=10$
- Прописује операције:
  - Сабирања и дузимања
  - Множења и дељења
  - Спојеног вишеструког сабирања
  - Кореновања
  - Рачунања остатка при дељењу
  - Поређења два броја
  - Конверзије из (и у) целобројну вредност
  - Конверзије између различитих формата у покретном зарезу, ...

# IEEE754-2008 - репрезентација

- Број се представља на један од три начина:
  - Уређена тројка (знак, експонент, значајни део броја)
    $(-1)^{\text{знак}} \times B^{\text{експонент}} \times [\text{значајни део}]$
  - $+\infty$, $-\infty$
  - qNaN (тихи NaN) и sNaN (сигнални NaN)
- Основе су 2 или 10
- Величина значајног дела је одређена параметром *p*

# IEEE754-2008 – опсег вредности

- Максимална вредност експонента је *emax*, а минимална *emin=1-emax*
- Бројеви у интервалу [$B^{emin}$, $B^{emax}$ x (B-$B^{1-p}$)] се називају нормални
- Бројеви мањи по апсолутној вредности од $B^{emin}$ називају се субнормални
  - Значајне цифре имају водеће нуле, нпр. број $2^{-10}$ ако је *emin=-9, B=2*



# IEEE754-2008 – класе података

- Класе података прописане стандардом:
  - Нормални бројеви
  - Субнормални бројеви
  - NaN
  - Бесконачно
  - Означена нула

# Реални бројеви у декадној основи

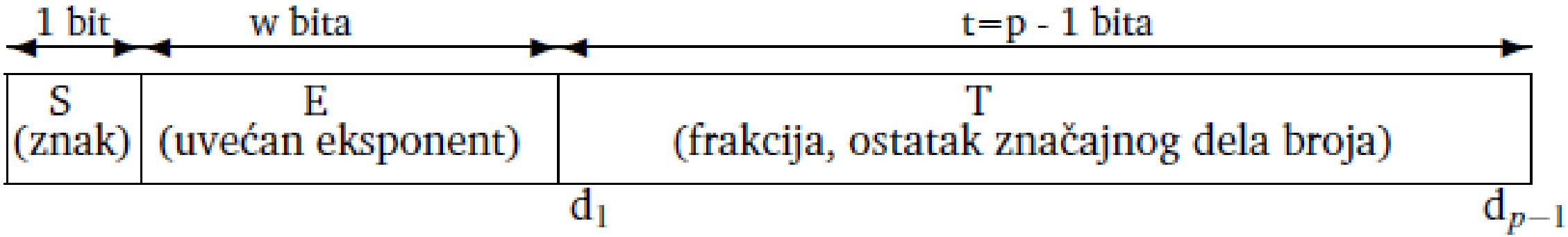
1. Софтверски
   - Запис и операције се реализују софтверски
   - Неефикасно
2. Хардверски
   - Помоћу BCD записа
     - Фиксни зарез
     - Сложено извођење операција (прескочили смо овај део)
     - Знатно спорије од рада у бинарној основи
   - Помоћу записа у покретном зарезу (IEEE754-2008)
     - Мали број процесора подржава овакав запис

# IEEE754-2008 – преглед формата записа

| Parametri | Formati | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Sa binarnom osnovom (β=2) | | | Sa dekadnom osnovom (β=10) | |
| | binary32 | binary64 | binary128 | decimal64 | decimal128 |
| p | 24 | 53 | 113 | 16 | 34 |
| emax | +127 | +1023 | +16383 | +384 | +6144 |

# IEEE754-2008 binary32

- Експонент може бити записан или као означен или као неозначен
- Ако је неозначен, онда се права вредност добија одузимањем $2^w$-1=127
- $d_0$ се не записује, јер је имплицитно 1



# IEEE754-2008 binary32

| | | Znak | Eksponent | Frakcija |
|---|---|---|---|---|
| $+15$ | = | 0 | 10000010 | 11100000000000000000000 |
| $-15$ | = | 1 | 10000010 | 11100000000000000000000 |
| $+1/64$ | = | 0 | 01111001 | 00000000000000000000000 |
| $+0$ | = | 0 | 00000000 | 00000000000000000000000 |
| $-0$ | = | 1 | 00000000 | 00000000000000000000000 |
| $(1-2^{-24})\times 2^{+128}$ | = | 0 | 11111110 | 11111111111111111111111 |
| $+1\times 2^{-126}$ | = | 0 | 00000001 | 00000000000000000000000 |
| $+1\times 2^{-149}$ | = | 0 | 00000000 | 00000000000000000000001 |

Provera vrednosti zapisa broja +15:

- Znak = +
- Eksponent = 3 (=130-127)
- 1,frakcija = $(1,111)_2 = 1\times 2^0+1\times 2^{-1}+1\times 2^{-2}+1\times 2^{-3}$
- Vrednost = Znak 1,frakcija * $2^{eksponent} = +(+1\times 2^0+1\times 2^{-1}+1\times 2^{-2}+1\times 2^{-3}) * 2^3$
  $= +1\times 2^3+1\times 2^2+1\times 2^1+1\times 2^0 = 8 + 4+ 2 +1 = +15$

# IEEE754-2008 decimal64

| Знак | Комбинација | Део експонента | Значајне цифре |
|---|---|---|---|
| 1 бит | 5 битова | 8 битова | 50 битова |
| s | mmmmm | xxxxxxxx | ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc |

- Из битова комбинације се позајмљује у одређеним случајевима 2 бита за експонент {00,01,10} (експонент се записује као неозначен)
- Највећи експонент је дакле $(1011111111)_2=(767)_{10}$
- Вредност броја се рачуна по формули:

$$(-1)^{\text{знак}} \times 10^{\text{експонент}-383} \times [\text{значајни део}]$$

# IEEE754-2008 decimal64 (2)

| Комбинација | Додатни битови експонента | Додатни значајни битови | Значење |
|---|---|---|---|
| 00mmm | 00 | 0xxx | Регуларно |
| 01mmm | 01 | 0xxx | Регуларно |
| 10mmm | 10 | 0xxx | Регуларно |
| 1100m | 00 | 100x | Регуларно |
| 1101m | 01 | 100x | Регуларно |
| 1110m | 10 | 100x | Регуларно |
| 11110 | — | — | ±∞ |
| 11111 | — | — | NaN |

# IEEE754-2008 сабирање и одузимање

- Ако су: $x = x_s \times \beta^{x_e}, y = y_s \times \beta^{y_e}$
- Онда се операције сабирања и одузимања у општем случају раде:

$$x \pm y = \begin{cases} (x_s \times \beta^{x_e - y_e} \pm y_s) \times \beta^{y_e} & \text{ako } x_e \leq y_e \\ (x_s \pm y_s \times \beta^{y_e - x_e}) \times \beta^{x_e} & \text{ako } y_e < x_e \end{cases}$$

- Треба водити рачуна о специјалним вредностима (бесконачности)
- Сабирање значајних делова се врши према правилима за сабирање целих бројева у запису знак и апсолутна вредност
- Покушава се нормализација броја (тражи експонент тако да $d_0$ буде имплицитно 1)

# IEEE754-2008 множење и дељење

- Формула:

$$x * y = (x_s * y_s) \times \beta^{x_e + y_e}$$

$$x / y = (x_s / y_s) \times \beta^{x_e - y_e}$$

- И овде се води рачуна о специјалним вредностима
- Множење значајних деловасе врши према правилима множења целих бројева у запису знак и апсолутна вредност
- Покушава се нормализација броја