Problem Ranca (Unapred, Unazad i 3. rekurentna formula)

Problem ranca definišemo na sledeći način:

Pretpostavimo da je dat neki ranac zapremine $b \geq 0$ i skup predmeta kojima se ranac puni. Svaki predmet ima svoju zapreminu $a_j \geq 0$ i vrednost $c_j \geq 0$. Napuniti ranac sadržajem najveće vrednosti tako da je ukupna vrednost koja se nosi u rancu maksimalna:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in Z \text{ i nenegativni}$$

- Problem se ekvivalentno može posmatrati kao problem određivanja maksimalnog profita kompanije koja treba da finansira n projekata iz svog budžeta veličine b ako su poznazi troškovi i dobit za svaki projekat. Tada bi promenljiva x_j mogla da se interpetira kao promenljiva odlučivanja kojom se određuje procenat učešća kompanije u tom projektu.
- Problem ranca se rešava tako što se podeli na etape.
- Uvodimo pomoćnu funkciju F definisanu na sledeći način:

$$F_k(y) = \max\{c_1x_1 + \cdots + c_kx_k \mid a_1x_1 + \cdots + a_kx_k \leq y, x_1, .., x_k \geq 0, x_1, \dots, x_k \in Z\}$$

<u>Za rešavanje pomoćne funkcije koristimo sledeće rekurentne formule:</u>

1. $F_1(y) = c_1[y/a_1]$
   $F_k\,(y) = \max\{c_kx_k + F_{k-1}(y - a_kx_k) \mid x_k \in \{0,1,\dots,[y/a_k]\}\} \quad k \geq 2$

   Ako punimo ranac jednim predmetom sledi da je

   $$F_1(y) = \max\{c_1x_1 \mid a_1x_1 \leq y, x_1 \geq 0\} = c_1[y/a_1]$$

   čime smo potvrdili početni uslov.

2. $F_k\,(y) = \max\{F_{k-1}(y), F_{k-1}(y - a_k) + c_k\}$ gde je $F_n(y) = -\infty$ za $y < 0$.

   U ovom slučaju za k-tu koordinatu optimalnog rešenja važi ili $x_k = 0$ $(F_k\,(y) = F_{k-1}\,(y)$ ili $x_k \geq 1$ $(F_k(y) = F_{k-1}\,(y - a_k\,) + c_k)$. Optimalna vrednost je svakako uvek jednaka boljoj od navedenih vrednosti.

   Navedena formula se naziva još <u>*formulom unapred*</u> i ona je najpogodnija za kompjutersko izračunavanje.

   $F_n\,(y) = 0$ za $0 \leq y \leq \min\{a_1, \dots, a_n\}$ a za $y \geq \min\{a_1, \dots, a_n\}$ je
   $F_n(y) = \max\{c_k + F_n(y - a_k) \mid k = 1,2, .., n\}$ ukoliko se definiše $F_n(y) = -\infty$ za $y < 0$.

   Ako nula nije optimalno rešenje, bar jedna njegova koordinata, npr. x_k je veća ili jednaka od 1 ($F_n(y) = c_k + F_n(y - a_k)$).

- Navedene rekurzivne forumle se mogu koristiti za određivanje optimalne vrednosti $F_n\,(b)$ problema kao i odgovarajućeg optimalnog rešenja.
- Ako koristimo formulu 1 potrebno je da se pamte svi koraci dok je kod formule 2 dovoljno da se pamte samo poslednja dva rešenja.

- Kod druge formule uvodimo još jednu pomoćnu veličinu $i_k(y)$ koja pamti najveći indeks *j* takav da je *j*-ta promenljiva optimalnog rešenja u $F_k(y)$ pozitivna. Ukoliko je nula optimalno rešenje, definišimo ovaj indeks sa nulom. Važi rekurzija:

$$i_k(y) = \begin{cases} i_{k-1}(y) & c_k + F_k(y) < F_{k-1} \\ k & c_k + F_k(y) \geq F_{k-1} \end{cases}, \quad i_1(y) = \begin{cases} 0 & F_1(y) = 0 \\ 1 & F_1(y) \neq 0 \end{cases}$$

Na osnovu vrednosti dobijene za $i_n(y)$ možemo rekonstruišemo optimalno rešenje iz smisla indeksa i vrednosti $i_n(b)$ i $i_n(b - a_{i_n(b)})$.

Kako upisujemo rešenja?

$$i_n(y) = \begin{cases} k & x_n = 1, n = k \\ \neq k & x_n = 0, n \neq k \end{cases}$$

$$i_n\left(y - a_{i_n(b)}\right) = \begin{cases} k & x_k \geq a_{i_n(b)}, ispitujemo\ za\ y - a_{i_n(b)} \\ e & x_e = 1, x_{e+1} = 0, x_k = 1 \end{cases}$$

|Zadatak 1

Rešiti problem ranca koristeći rekurentnu formulu unapred.

$$\max\ 10x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4$$
$$3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 4$$
$$x_i \in [0,1], i = 1,2,3,4.$$

Rešenje:

Prvo odredimo kapacitete: $c_1 = 10, c_2 = 2, c_3 = -1, c_4 = 3,\ a_1 = 3, a_2 = 1, a_3 = 3.$

Možemo da stavimo da je $x_4 = 1$ (x_4 uzima svoju maksimalnu vrednost obzirom da tada neće narušiti početna ograničenja). Budući da vrednost promenljive x_4 ne utiče na ograničenja možemo uzeti da je $x_4 = 1$ i tražiti $\max F(x) = 10x_1 + 2x - 2 - x_3 + 3$. Izborom $x_4 = 0$ se dobija lošije rešenje.

Formiramo tablice $F_k(y)$ i $i_k\ (y)$ korišćenjem rekurentnih formula:

$$F_1(y) = c_1[y/a_1] = 10[y/3]$$
$$F_2(y) = \max\{F_1(y), c_2 + F_1(y - a_2)\} = \max\{F_1(y), 2 + F_1(y - 1)\}$$
$$F_3(y) = \max\{F_2(y), c_3 + F_2(y - a_3)\} = \max\{F_2(y), -1 + F_2(y - 3)\}$$

$$i_2(y) = \begin{cases} i_1(y) & F_1(y) > 2 + F_1(y - 1) \\ 2 & F_1 \leq 2 + F_1(y - 1) \end{cases}$$

$$i_3(y) = \begin{cases} i_2(y) & F_2(y) > 2 + F_2(y - 3) \\ 3 & F_2 \leq -1 + F_2(y - 3) \end{cases}$$

k\y	0	1	2	3	4
1	0	0	0	10	10
2	0	2	2	10	12
3	0	2	2	10	12

i\y	0	1	2	3	4
1	0	0	0	1	1
2	0	2	2	1	2
3	0	2	2	1	2

U tablici sa leve strane vidimo da se maksimum dostiže za $F_3(4) = 12$. Rekonstruisaćemo raspored pakovanja:

Kako je $i_3(4) = 2 \to x_2 = 1$.

Dalje gledamo za $F_3(4 - a_2) = 3,\ i_3(3) = 1 \to x_1 = 1,$ a zatim $F_3(3 - a_1) = 0, i_3(0) = 0 \to x_3 = 0.$

Konačno: $x_1 = 1, x_4 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0.$

Dakle,

$$f_{max} = 12 + 3 = 15$$

Zadatak 2

Rešiti problem ranca koristeći rekurentnu formulu unapred.

$$\max\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 5x_5$$
$$4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 \leq 8$$
$$x_i \in [0,1], \qquad i = 1,2,3,4,5.$$

Rešenje:

Prvo odredimo kapacitete: $c_1 = 3, c_2 = 1, c_3 = 7, c_4 = 2, c_5 = 5,\ a_1 = 4, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 6.$

Formiramo tablice $F_k(y)$ i $i_k\ (y)$

Korišćenjem rekurentnih formula:

$$F_1(y) = c_1[y/a_1] = 3[y/4]$$
$$F_2(y) = \max\{F_1(y), c_2 + F_1(y - a_2)\} = \max\{F_1(y), 1 + F_1(y - 1)\}$$
$$F_3(y) = \max\{F_2(y), c_3 + F_2(y - a_3)\} = \max\{F_2(y), 7 + F_2(y - 2)\}$$
$$F_4(y) = \max\{F_3(y), c_4 + F_3(y - a_4)\} = \max\{F_3(y), 2 + F_3(y - 3)\}$$
$$F_5(y) = \max\{F_4(y), c_5 + F_4(y - a_5)\} = \max\{F_4(y), 5 + F_4(y - 6)\}$$

$$i_2(y) = \begin{cases} i_1(y) & F_1(y) > 1 + F_2(y-1) \\ 2 & F_1 \leq 1 + F_2(y-1) \end{cases}$$
$$i_3(y) = \begin{cases} i_2(y) & F_2(y) > 7 + F_3(y-2) \\ 3 & F_2 \leq 7 + F_3(y-2) \end{cases}$$

k\y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	3	3	3	3	6
2	0	1	1	1	3	4	4	4	6
3	0	1	7	8	8	8	10	11	11
4	0	1	7	8	8	9	10	11	11
5	0	1	7	8	8	9	10	11	12

i\y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	1	1	1	1	1
2	0	2	2	2	1	2	2	2	1
3	0	2	3	3	3	3	3	3	3
4	0	2	3	3	3	4	3	3	3
5	0	2	3	3	3	4	3	3	5

Konačno, imamo da se maksimum dostiže za $F_5(8) = 12 \rightarrow i_5(8) = 5 \rightarrow x_5 = 1$. Dalje imamo da je $i_5(8 - a_5) = i_5(2) = 3 \rightarrow x_3 = 1$. Zatim $i_5(2 - a_3) = i_5(0) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0$.

$$f_{max} = 12 \text{ za } x = (0,0,1,0,1)$$

NAPOMENA

U slučaju da je skup rešenja Z i da smo tokom rekonstrukcije rešenja imali $i_k(y_j) = s,\ j = 1,2,\dots,m$ promenljiva x_s dobija vrednost m. Videti zadatak 62.

Zadatak 3

Rešiti problem ranca koristeći rekurentnu formulu unazad.

$$\max 3x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 5x_5$$
$$4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 \leq 8$$
$$x_i \in [0,1], i = 1,2,3,4,5.$$

Rešenje:

$$F_5(8) = \max_{0 \leq x_5 \leq 1}\{5x_5 + F_4(8 - 6x_5)\} = \max\{F_4(8), 5 + F_4(2)\} =..= 12$$
$$F_4(8) = \max_{0 \leq x_4 \leq 1}\{2x_4 + F_3(8 - 3x_4)\} = \max\{F_3(8), 2 + F_3(5)\} =..= 11$$
$$F_4(2) = \max_{0 \leq x_4 \leq 1}\{2x_4 + F_3(2 - 3x_4)\} = \max\{F_3(2)\} =..= 7$$
$$F_3(8) = \max_{0 \leq x_3 \leq 1}\{7x_3 + F_2(8 - 2x_3)\} = \max\{F_2(8), 7 + F_2(6)\} =..= 11$$
$$F_3(5) = \max_{0 \leq x_3 \leq 1}\{7x_3 + F_2(5 - 2x_3)\} = \max\{F_2(5), 7 + F_2(3)\} =..= 8$$
$$F_3(2) = \max_{0 \leq x_3 \leq 1}\{7x_3 + F_2(2 - 2x_3)\} = \max\{F_2(2), 7 + F_2(0)\} =..= \max\{1, 7\} = 7$$

$F_2(8) = \max\limits_{0\le x_2\le 1}\{x_2 + F_1(8-x_2)\} = \max\{F_2(8), 7 + F_2(6)\} =.. = \max\{4, 11\} = 11$

$F_2(6) = \max\limits_{0\le x_2\le 1}\{x_2 + F_1(6-x_2)\} = \max\{F_1(6), 1 + F_1(5)\} = \cdots. = 4$

$F_2(5) = \max\limits_{0\le x_2\le 1}\{x_2 + F_1(5-x_2)\} = \max\{F_1(5), 1 + F_1(4)\} = \cdots. = 4$

$F_2(3) = \max\limits_{0\le x_2\le 1}\{x_2 + F_1(3-x_2)\} = \max\{F_1(3), 1 + F_1(2)\} = \cdots. = 1$

$F_2(2) = \max\limits_{0\le x_2\le 1}\{x_2 + F_1(2-x_2)\} = \max\{F_1(2), 1 + F_1(2)\} = \cdots. = 1$

$F_2(0) = \max\limits_{0\le x_2\le 1}\{x_2 + F_1(0-x_2)\} = F_2(0) = 0$

$F_1(0) = 3\cdot\left[\frac{0}{4}\right] = 0$ $\quad F_1(3) = 3\cdot\left[\frac{3}{4}\right] = 0$ $\quad F_1(6) = 3\cdot\left[\frac{6}{4}\right] = 1$

$F_1(1) = 3\cdot\left[\frac{1}{4}\right] = 0$ $\quad F_1(4) = 3\cdot\left[\frac{4}{4}\right] = 1$ $\quad F_1(7) = 3\cdot\left[\frac{7}{4}\right] = 1$

$F_1(2) = 3\cdot\left[\frac{2}{4}\right] = 0$ $\quad F_1(5) = 3\cdot\left[\frac{5}{4}\right] = 1$ $\quad F_1(8) = 3\cdot\left[\frac{8}{4}\right] = 1$

Obratiti pažnju da x_1 može imati samo vrednosti 0 i 1, te stoga pišemo da je $F_1(8) = 3\cdot 1 = 1$!!!
Vraćamo vrednost nazad:

$F_5(8) \to \quad x_5 = 1$ $\qquad F_3(2) \to \quad x_3 = 1$ $\qquad F_1(0) \to x_1 = 0$

$F_4(2) \to \quad x_4 = 0$ $\qquad F_2(0) \to x_2 = 0$

Zadatak 3

Rešiti problem ranca koristeći rekurentnu formulu unazad.

$$\max 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \le 9$$
$$x_i \in Z, i = 1,2,3,4.$$

Rešenje:

$F_4(9) = \max\limits_{0\le x_4\le 1}\{2x_4 + F_3(9-5x_4)\} = \max\{F_3(9), 2 + F_3(4)\} = 13$

// tražimo maksimum za svaku potencijalnu vrednost promenljive x_4

$F_3(9) = \max\limits_{0\le x_3\le 2}\{5x_3 + F_2(9-4x_3)\} = \max\{F_2(9), 5 + F_2(5), 10 + F_2(1)\} = \max\{13,12,10\} = 13$

$F_3(4) = \max\limits_{(0\le x_3\le 1)}\{5x_3 + F_2(4-4x_3)\} = \max\{F_2(4), 5 + F_2(0)\} = \max\{6,5\} = 6$

$F_2(9) = \max\limits_{0\le x_2\le 3}\{4x_2 + F_1(9-3x_2)\} = \max\{F_1(9), 4 + F_1(6), 8 + F_1(3), 12 + F_1(0)\} = \max\{12,13,11,12\} = 11$

$F_2(5) = \max\limits_{0\le x_2\le 1}\{4x_2 + F_1(5-3x_2)\} = \max\{F_1(5), 4 + F_1(2)\} = \max\{6,7\} = 7$

$F_2(4) = \max\limits_{0\le x_2\le 1}\{4x_2 + F_1(4-3x_2) = \max\{F_1(4), 4 + F_1(1)\} = \max\{6,4\} = 6$

$F_2(1) = \max\limits_{0\le x_2\le 0}\{4x_2 + F_1(1-3x_2)\} = \max\{F_1(1)\} = 0$

$F_2(0) = \max\limits_{0\le x_2\le 0}\{ 4x_2 + F_1(0-3x_2)\} = \max\{F_1(0)\} = 0$

$F_1(0) = 3 * \left[\frac{0}{2}\right] = 0$ $\quad F_1(2) = 3 * \left[\frac{2}{2}\right] = 3$ $\quad F_1(4) = 3 * \left[\frac{4}{2}\right] = 6$ $\quad F_1(6) = 3 * \left[\frac{6}{2}\right] = 9$

$F_1(1) = 3 * \left[\frac{1}{2}\right] = 0$ $\quad F_1(3) = 3 * \left[\frac{3}{2}\right] = 3$ $\quad F_1(5) = 3 * \left[\frac{5}{2}\right] = 6$ $\quad F_1(9) = 3 * \left[\frac{9}{2}\right]$ =12

Rekonstruišemo raspored:

Maximalna vrednost ranca je 13 i postignuta je za $x_4 = 0$ a dostiže se za $F_3(9)$ koje svoju maksimalnu vrednost dobija kada je $x_3 = 0$. Poslednja vrednost dostiže se za $F_2(9)$ koji svoj maksimum dostiže za $x_2 = 1$, odnosno za maksimalno $F_1(6)$ koje, opet, svojm maksimum dostiže za $x_1 = 3$.

Konačno, traženo rešenje je oblika : (3,1,0,0)

Slično rešenje dobićemo i formulom unapred. U nastavku slede tablice i rekonstrukcija rešenja.

k\y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	3	3	6	6	9	9	12	12
2	0	0	3	4	6	7	9	10	12	13
3	0	0	3	4	6	7	9	10	12	13
4	0	0	3	4	6	7	9	10	12	13

i\y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	0	1	2	1	2	1	2	1	2
3	0	0	1	2	1	2	1	2	1	2
4	0	0	1	2	1	2	1	2	1	2

$$F_{max} = F_3(9) = 13$$

$$i_3(9) = 2 \to x_2 = 1,$$

$$i_3(9-3) = i_3(6) = 1 \to x_1 = 1$$

$$i_3(6-2) = i_3(4) = 1 \to x_1 += 1 \to \ \ x_1 = 2$$

$$i_3(4-2) = i_3(2) = 1 \to \ \ x_1 += 1 \ \to \ \ x_1 = 1$$

$$i_3(2-2) = i_3(0) = 0 \to x_3 = 0,\ x_4 = 0$$

Slično rešenje bi dobili kada bi rekonstrukciju rešenja počeli od $F_2(9)$, odnosno $F_4(9)$.

Проблем ранца

$$(\max)\ c_1x_1+\cdots+c_nx_n$$
$$\text{п.о. } a_1x_1+\cdots+a_nx_n \le b$$
$$x_1,\ldots,x_n \geq 0,$$
$$x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{Z},$$
$$a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{N},$$
$$b \in \mathbb{Z}.$$

Проблем $P_k(y)$:

$$(\max)\ c_1x_1+\cdots+c_kx_k$$
$$\text{п.о. } a_1x_1+\cdots+a_kx_k \le y$$
$$x_1,\ldots,x_k \geq 0$$
$$x_1,\ldots,x_k \in \mathbb{Z}$$

за $k=1,\ldots,n$ и $y \in \mathbb{N}_0$.

Његова оптимална вредност се означава са $F_k(y)$.

Ранац уназад (формула):

$$F_1(y) = c_1\left\lfloor \frac{y}{a_1} \right\rfloor$$

$$F_k(y) = \max\left\{c_kx_k + F_{k-1}(y-a_kx_k) \;\middle|\; x_k \in \left\{0,1,\ldots,\left\lfloor \frac{y}{a_k}\right\rfloor\right\}\right\}$$

за $k \geq 2$.

РАНАЦ УНАПРЕД:

$F_k(y) = -\infty$, за $y<0$

$F_1(y) = c_1 \left\lfloor \frac{y}{a_1} \right\rfloor$, за $y \geq 0$

$F_k(y) = \max\{F_{k-1}(y), F_k(y-a_k)+c_k\}$, за $k \geq 2$

3. ФОРМУЛА:

$$F_n(y) = \begin{cases} 0, & \text{за } 0 \leq y < \min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = a \\ \max\{c_k + F_n(y-a_k) \mid k = 1, \ldots, n\}, & \text{за } y \geq a \\ -\infty, & \text{за } y < 0 \end{cases}$$

ТЕОРЕМА: Ако је $\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \cdots \geq \frac{c_n}{a_n}$ и $b > a_0 \cdot (a_1 - 1)$, где је $a_0 = \max\{a_2, \ldots, a_n\}$

$\Longrightarrow F_n(b) = F_n(b - a_1) + c_1.$

Primer *

$$(\max)\ 3x_1+4x_2+5x_3+2x_4=f$$

$$\text{п.о.}\quad 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4\le 9$$

$$x_i\ge 0,\ i=\overline{1,4},$$

$$x_i\in\mathbb{Z},\ i=\overline{1,4}.$$

Решење: (Радом уназад:)

$$F_4(9)=\max\{2x_4+F_3(9-5x_4)\ |\ x_4\in\{0,1\}\}$$

$$=\max\{F_3(9),\ 2+F_3(4)\}$$

$$F_3(9)=\max\{F_2(9),\ 5+F_2(5),\ 10+F_2(1)\}$$

$$F_3(4)=\max\{F_2(4),\ 5+F_2(0)\}$$

$$F_2(9)=\max\{F_1(9),\ 4+F_1(6),\ 8+F_1(3),\ 12+F_1(0)\}$$

$$F_2(5)=\max\{F_1(5),\ 4+F_1(2)\}$$

$$F_2(4)=\max\{F_1(4),\ 4+F_1(1)\}$$

$$F_2(1)=F_1(1),\quad F_2(0)=F_1(0)$$

$$F_1(y)=3\left\lfloor\frac{y}{2}\right\rfloor$$

↑ уназад решавано →

$F_2(0) = F_1(0) = 0$

$F_2(1) = F_1(1) = 0$

$F_2(4) = F_1(4) = 6$

$F_2(5) = 4 + F_1(2) = 7$

$F_2(9) = 4 + F_1(6) = 13$

$F_3(4) = F_2(4) = 6$, $F_3(9) = F_2(9) = 13$

$F_4(9) = F_3(9) = 13$

$\underline{F_4(9) = F_3(9)} \Longrightarrow \hat{x}_4 = 0$

$\underline{F_3(9) = F_2(9)} \Rightarrow \hat{x}_3 = 0$

$\underline{F_2(9) = 4 + F_1(6)} \Rightarrow \hat{x}_2 = 1$

$\underline{F_1(6) = 9} \Rightarrow \hat{x}_1 = 3$

$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4) = (3, 1, 0, 0)$

$f_{max} = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 13$

ДРУГИ НАЧИН (РЕШЕЊЕ РАНЦОМ УНАПРЕД)

→ ПРАВИМО РЕДОМ ВРСТЕ

$$\begin{array}{ccccc}
F_1(1) & F_1(2) & F_1(3) & \ldots & F_1(b) \\
F_2(1) & F_2(2) & F_2(3) & \ldots & F_2(b) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
F_n(1) & F_n(2) & F_n(3) & \ldots & F_n(b)
\end{array}$$

(ПАМТИМО САМО ДВЕ ПОСЛЕДЊЕ

Pri tom se pamte samo dve uzastopne

Primetimo da je skup optimalnih rešenja S neprazan ako i samo ako je $F_n(b)$ konačno. Radi rekonstrukcije jednog optimalnog rešenja paralelno sa izračunavanjem $F_k(y)$ izračunavamo i prateći indeks $i_k(y)$, $k = 1, \cdots, n$, $y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ na sledeći način: $i_k(y) = 0$ ako je $(0, 0, \cdots, 0)$ jedino optimalno rešenje $P_k(y)$, a $i_k(y) = j$, $j \in \{1, \cdots, k\}$ i ako postoji optimalno rešenje $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ problema $P_k(y)$ sa $x_j \geq 1$ i u svakom optimalnom rešenju tog problema su $x_{j+1} = x_{j+2} = \cdots = x_k = 0$ ukoliko je $j < k$.

Za ove indekse važi rekurzija

$$i_1(y) = \begin{cases} 1 & \text{ako } a_1 \leq y \\ 0 & \text{ako } a_1 > y \end{cases},$$

$$i_k(y) = \begin{cases} i_{k-1}(y) & \text{ako } c_k + F_k(y - a_k) < F_{k-1}(y) \\ k & \text{ako } c_k + F_k(y - a_k) \geq F_{k-1}(y) \end{cases}, \quad k \geq 2.$$

Za $k = 1$ ovo se direktno proverava. Za $k \geq 2$, ako važi $c_k + F_k(y - a_k) < F_{k-1}(y)$ u svakom rešenju $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ problema $P_k(y)$ je $x_k = 0$ i $(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1})$ je optimalno rešenje problema $P_{k-1}(y)$, pa je zato $i_k(y) = i_{k-1}(y)$. U slučaju da važi $c_k + F_k(y - a_k) \geq F_{k-1}(y)$ postoji optimalno rešenje od $P_k(y)$ sa k-tom koordinatom većom ili jednakom 1 koje se može napraviti od optimalnog rešenja $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ problema $P_k(y - a_k)$ uvećavajući k-tu koordinatu za 1. Da je $i_k(y) = 0$ ako i samo ako je $(0, 0, \cdots, 0)$ jedino rešenje problema $P_k(y)$ može se dokazati indukcijom.

Za rekonstrukciju jednog rešenja formiramo niz $j_1 = i_n(b), j_2 = i_n(b-a_{j_1}), j_3 = i_n(b-a_{j_1}-a_{j_2}), \cdots, j_{l+1} = i_n(b-a_{j_1}-\cdots-a_{j_l}), \cdots$. Može se dokazati da je ovaj niz konačan i $j_1 \geq j_2 \geq \cdots \geq 0$.

Iz $i_n(b) = j_1$ zaključujemo da postoji optimalno rešenje problema $P_n(b)$ sa koordinatama $x_{j_1+1} = x_{j_1+2} = \cdots = x_n = 0$ i $x_{j_1} \geq 1$. Tada i optimalno rešenje problema $P_n(b-a_{j_1})$ je oblika $(\cdots, x_{j_1}-1, 0, \cdots, 0)$. Ako je $j_2 < j_1$ onda su njegove koordinate sa indeksom većim od j_2 jednake 0, pa je $x_{j_1} = 1$ i $x_{j_2} \geq 1$. Ako je $j_2 = j_1$ tada je $x_{j_1} - 1 \geq 1$, pa je $x_{j_1} \geq 2$. Tada je optimalno rešenje problema $P_n(b-a_{j_1}-a_{j_2})$ oblika $(\cdots, x_{j_1}-2, 0, \cdots, 0)$. Ako je $j_3 = j_2$ na isti način zaključujemo da je $x_{j_1} = 2$, a ako je $j_3 < j_2$ da mora biti $x_{j_1} \geq 3$. Na ovaj način se unazad rekonstruišu sve koordinate jednog optimalnog rešenja.

*Rešiti zadatak iz primera * drugom rekurzijom.*

Rešenje. Popunjavamo redom po vrstama matrice $F_k(y)$ i $i_k(y)$ za $k = 1, 2, 3, 4$; $y = 1, 2, \ldots, 9$.

k/y	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$-\infty$	3	3	6	6	9	9	12	12
2	0	3	4	6	7	9	10	12	13
3	0	3	4	6	7	9	10	12	13
4	0	3	4	6	7	9	10	12	13

k/y	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	2	1	2	1	2	1	2 .
3	0	1	1	1	2	1	2	1	2
4	0	1	1	1	2	1	2	1	2

Primer popunjavanja: $F_2(9) = \max\{F_1(9), F_2(6)+4\} = \max\{12, 13\} = 13$. $i_2(9) = 2$. Rekonstrukcija optimalnog rešenja: Iz $i_4(9) = 2$ sledi da je u optimalnom rešenju $x_3 = x_4 = 0$ i $x_2 \geq 1$. Iz $i_4(9-a_2) = i_4(6) = 1$ sledi da je u optimalnom rešenju $x_1 \geq 1$ i $x_2 = 1$. Iz $i_4(6-a_1) = i_4(4) = 1$ sledi da je $x_1 \geq 2$ a iz $i_4(4-a_1) = i_4(2) = 1$, sledi da je $x_1 \geq 3$. Zbog $i_4(2-a_1) = i_4(0) = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = 0$.

Treća rekurzija zahteva najmanje izračunavanja. Kako u optimalnom rešenju može biti više pozitivnih koordinata, na desnoj strani formule mogu da postoje suvišni članovi. Za dovoljno veliko b oni se mogu ispustiti.

Трећи начин (решење коришћењем 3. формуле)

Важи теорема јер $\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \frac{c_3}{a_3} \geq \frac{c_4}{a_4}$

и $a = 5$, $a_1 = 2$.

Из теореме за $y > 5$

$\Rightarrow F(y) = F(y - a_1) + c_1$ и зато

$F(y) = F_1(y)$.

$\Rightarrow F(9) = F(7) + 3$, $F(7) = F(5) + 3$

$F(5) = \max\{F(3)+3, F(2)+4, F(1)+5, F(0)+2\}$

$F(3) = \max\{F(1) + 3, F(0) + 4, -\infty, -\infty\}$

$F(1) = 0 = F(0)$.

Враћамо се уназад $\leftarrow$

$\Rightarrow F(3) = F(0) + 4 = 4$, $F(5) = F(3) + 3 = 7$

$F(7) = 10$, $F(9) = 13$

Реконструкција оптималног решења:

$F(9) = F(7) + 3 \Rightarrow \hat{x}_1 \geq 1 \Rightarrow \hat{x}_1 \geq 2$.

$F(5) = F(3) + 3 \Rightarrow$ за $F(3)$, $\hat{x}_1 \geq 1$.

Све укупно $\boxed{\hat{x}_1 \geq 3}$.

$F(3) = F(0)+4 > F(1)+3 \Rightarrow$

ЗА ДОСТИЗАЊЕ $F(3)$, $\hat{x}_1=0$, $\hat{x}_2=1$.

$\Rightarrow (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4) = (3,1,0,0)$.

$f_{max} = 13$.

ТЕСТ 1

1. РАНАЦ УНАПРЕД } → ОВАЈ ОБАВЕЗНО?
2. РАНАЦ УНАЗАД } БИРАТИ ИЗМЕЂУ
3. ФОРМУЛА } ОВА ДВА

impput $c = (3,4,5,2)$

$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (2,3,4,5)$

$b = 9$

output : $(3,1,0,0) = \hat{x}$

$f_{max} = 13$

NAPOMENA:
Implementirati Ranac unapred (obavezno) i (izabrati) Ranac unazad ILI 3. rekurentnu formulu!!! (Birati izmedju Ranca unazad il 3. rekurentne formule)