Površinski integrali *I* i *II* vrste

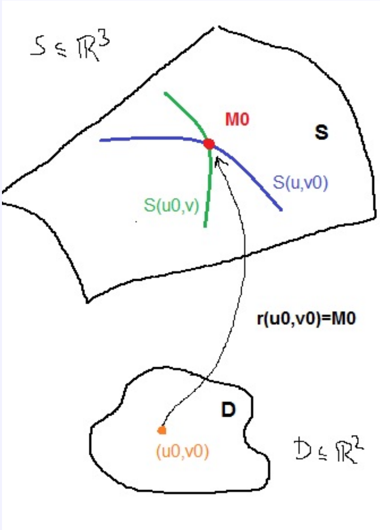
Površi

Definicija

Površ u $\mathbb{R}^3$ je neprekidno preslikavanje $S : D \in \mathbb{R}$ gde je D ograničena oblast u $\mathbb{R}^2$.

Parametrizacija površi u $\mathbb{R}^3$:
$\vec{r} = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.
$\vec{r}(u, v) = x(u, v) \cdot \vec{i} + y(u, v) \cdot \vec{j} + z(u, v) \cdot \vec{k}$.

u i v su **parametri** površi, $(u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$.



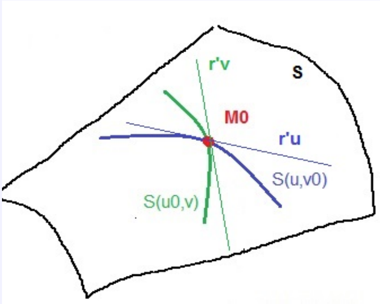
Neka je D ograničena oblast u $\mathbb{R}^2$ i $S : D \to \mathbb{R}^3$ i $(u_0, v_0) \in D$ proizvoljna tačka.

D se slika u S.
$(u_0, v_0) \in D$ se slika u $M_0 \in S$.

Ako fiksiramo jednu koordinatu $v = v_0$ tada funkcija $S(u, v_0)$ predstavlja krivu na površi S.

Ako fiksiramo drugu koordinatu $u = u_0$ tada funkcija $S(u_0, v)$ predstavlja krivu na površi S.

Obe ove krive "prolaze" kroz tačku M_0 i zovu se **koordinatne linije površi**.



Tangentni vektori ovih krivih u tački $M_0 = \vec{r}(u_0, v_0)$ su $\vec{r_u}'(u_0, v_0)$ i $\vec{r_v}'(u_0, v_0)$.

Definicija

*Ravan T kroz tačku $M_0 \in S$ je **tangentna ravan površi** S ako tangentni vektor svake krive te površi koja prolazi kroz M_0 pripada T.*

Definicija

Prava L koja prolazi kroz $M_0 \in S$ i pri om je normalna na tangentnu ravan površi u M_0 je ***normala površi*** *S u tački M_0.*

Normala na ravan T je vektorski proizvod tangentnih vektora koordinatnih linija $\vec{r_u}' \times \vec{r_v}'$.

Neka je za $\vec{r}(u,v) = x(u,v) \cdot \vec{i} + y(u,v) \cdot \vec{j} + z(u,v) \cdot \vec{k}$

$$J = \vec{r_u}' \times \vec{r_v}' = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Označimo sa A, B, C kofaktore od J:

$$A(u,v) = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$
$$B(u,v) = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}$$
$$C(u,v) = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}$$

Jednačina tangentne ravni u tački $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ data je sa:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Jednačina normale na površ u tači $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ data je sa:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}.$$

Površinski integral prve vrste

Neka je na $S : D \to \mathbb{R}^3$ zadata neprekidna funkcija $F : S \to \mathbb{R}$.

Neka je $P = \{\Delta_i | i = 1, ..., p\}$ proizvoljna podela oblasti D.
P indukuje podelu $P' = \{S_i | i = 1, ..., p\}$ na površi S.
U svakom delu S_i podele P' izaberemo proizvoljnu tačku $M_i(x_i, y_i, z_i)$.
Integralna suma $\sum_{i=1}^{p} F(x_i, y_i, z_i) \cdot \mu S_i$, gde je sa μS_i označena mera površi S_i.

Definicija

Ako za funkciju f postoji konačan $\lim_{\delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{p} F(x_i, y_i, z_i) \cdot \mu S_i$ *(sa* δS_i *je označen dijametar skupa* S_i*) onda se on naziva* ***površinskim integralom prve vrste*** *funkcije f po površi S i označava sa* $\int\int_S f(x, y, z) dS$*.*

Izračunavanje **površinskog integrala prve vrste** svodi se na izračunavanje **dvostrukog integrala**:

Teorema

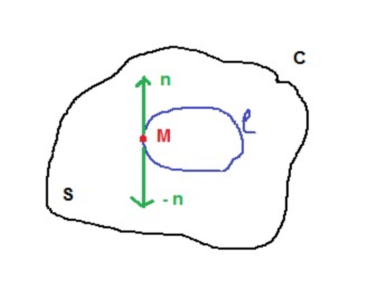
Izračunavanje površinskog integrala prve vrste
Ako je površ S neprekidna i zadata deo-po-deo glatkom parametrizacijom i ako je na njoj definisana neprekidna funkcija $F(x,y,z)$*, onda važi jednakost*
$$\int\int_S F(x,y,z)dS =$$
$$\int\int_D F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{A^2(u,v)+B^2(u,v)+C^2(u,v)}dudv.$$

Specijalno ako je $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=z(x,y),\ (x,y)\in D\subseteq\mathbb{R}^2\}$ *onda je*

$$\iint_S F(x,y,z)dS = \iint_D F(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy.$$

Ako je $F(x,y,z)=1$ *onda je* $P(S)=\iint_S dS$ *površina te površi.*

Orijentacija površi



Neka je S zatvorena površ ili ograničena deo-po-deo glatkom krivom C.

Neka je $M \in S$ proizvoljna tačka površi i $\ell \in S$ proizvoljna zatvorena kriva površi koja ne seče C i sadrži tačku M.

U svakoj tački površi definisana su dva jedinična vektora normale $\vec{n}$ i $-\vec{n}$.

Ako pustimo vektor $\vec{n}$ da se "kreće" po krivoj ℓ počevši od M imamo 2 slučaja:

- $\vec{n}(M)$ kada "obrne krug" vraća se u početni $\vec{n}(M)$.
- $\vec{n}(M)$ kada "obrne krug" vraća se u suprotan $-\vec{n}(M)$.

Definicija

Ako se za svaku tačku $M \in S$ i za svaku zatvorenu krivu na površi koja sadrži tačku M promenljivi vektor normale vraća u početni položaj onda je S ***dvostrana površ****. Svaki od vektora $\vec{n}$ i $-\vec{n}$ određuje jednu stranu površi.*

Pomoću ovih vektora možemo orijentisati površ:
strana koju određuje $\vec{n}$ je **pozitivna**, a strana koju određuje $-\vec{n}$ je **negativna** strana površi.

Definicija

Ako postoji bar jedna zatvorena kriva na S takva da se vektor normale $\vec{n}$ vraća u suprotan položaj $-\vec{n}$ onda je S ***jednostrana površ****.*

Jednostrane površi su neorijentisane.

Površinski integral druge vrste

$S : D \to \mathbb{R}^3,\ \vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),\ (u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ - glatka orijentisana površ.

Izaberemo jednu stranu površi i sa $\vec{n}(x,y,z)$ označimo vektorsko polje jediničnih normala na S.

$f : S \to \mathbb{R}$ - neprekidna realna funkcija.

Neka je $P = \{\Delta_i | i = 1, ..., p\}$ proizvoljna podela oblasti D.
P indukuje podelu $P' = \{S_i | i = 1, ..., p\}$ na površi S.
U svakom delu S_i podele P' izaberemo proizvoljnu tačku $M_i(x_i, y_i, z_i)$.

Označimo sa $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ uglove koje normala $\vec{n}(M_i)$ zaklapa sa osama Ox, Oy i Oz:
$\alpha_i = \sphericalangle(\vec{n}(M_i), Ox)$
$\beta_i = \sphericalangle(\vec{n}(M_i), Oy)$
$\gamma_i = \sphericalangle(\vec{n}(M_i), Oz)$.

Posmatrajmo sume:

$$\sum_{i=1}^{p} f(x_i, y_i, z_i) \cos(\alpha_i) \cdot \mu S_i$$

$$\sum_{i=1}^{p} f(x_i, y_i, z_i) \cos(\beta_i) \cdot \mu S_i$$

$$\sum_{i=1}^{p} f(x_i, y_i, z_i) \cos(\gamma_i) \cdot \mu S_i$$

gde je sa μS_i označena mera površi S_i.

Definicija

Ako za funkciju f postoji konačan $\lim\limits_{\delta S_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{p} f(x_i, y_i, z_i) \cos(\alpha_i) \cdot \mu S_i$ (sa δS_i je označen dijametar skupa S_i) onda se on naziva ***površinskim integralom druge vrste*** *funkcije f po površi S i označava sa $\int\int\limits_{S} f(x, y, z) \cos(\alpha) dS$.*

Analogno za $\int\int\limits_{S} f(x, y, z) \cos(\beta) dS$ i $\int\int\limits_{S} f(x, y, z) \cos(\gamma) dS$.

Teorema

Izračunavanje površinskog integrala druge vrste

Za glatku, orijentisanu površS i neprekidnu funkciju $f(x, y, z)$ definisanu na toj površi, važe jednakosti:

$$\int\int_S f(x,y,z)\cos(\alpha)dS =$$
$$\int\int_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{A^2(u,v)+B^2(u,v)+C^2(u,v)}\cdot$$
$$\cos(\alpha)dudv$$
$$\int\int_S f(x,y,z)\cos(\beta)dS =$$
$$\int\int_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{A^2(u,v)+B^2(u,v)+C^2(u,v)}\cdot$$
$$\cos(\beta)dudv$$
$$\int\int_S f(x,y,z)\cos(\gamma)dS =$$
$$\int\int_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{A^2(u,v)+B^2(u,v)+C^2(u,v)}\cdot$$
$$\cos(\gamma)dudv$$

Promenom pravca normale (tj. strane površi) po kojoj se vrši integracija, menja se i znak integrala jer:
$\cos(\sphericalangle(-\vec{n}(M_i), Ox)) = -\cos(\sphericalangle(\vec{n}(M_i), Ox))$.
Analogno za Oy i Oz
Odatle, $\int\int_{S+} f\cos(\alpha)dS = -\int\int_{S-} f\cos(\alpha)dS$.

Površinski integral II vrste :

$$\iint\limits_S (P\cos(\alpha) + Q\cos(\beta) + R\cos(\gamma))dS = \iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

gde su P, Q, R funkcije definisane i neprekidne na S. Fluks vektorskog polja $\vec{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ kroz orijentisanu površ S.

- $= \pm \iint\limits_{Dxy} \vec{F}\cdot\vec{N}\,dxdy,\;\; \vec{N} = (-z'_x, -z'_y, 1),\, z = z(x,y)$
- $= \pm \iint\limits_{Dxz} \vec{F}\cdot\vec{N}\,dxdz,\;\; \vec{N} = (-y'_x, 1, -y'_z),\, y = y(x,z)$
- $= \pm \iint\limits_{Dyz} \vec{F}\cdot\vec{N}\,dydz,\;\; \vec{N} = (1, -x'_y, -x'_z),\, x = x(y,z)$

Stoksova formula

Veza između **krivolinijskog integrala II vrste i površinskog integrala**

Neka je S ograničena, glatka, dvostrana površ sa deo-po-deo glatkom granicom $\mathcal{C}$. Neka su $P, Q, R : S \to \mathbb{R}$ neprekidne i imaju neprekidne parcijalne izvode. Tada važi:

$$\oint\limits_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy + Rdz$$

$$= \iint\limits_{S} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Formula Gausa-Ostrogradskog

(Veza između **površinskog integrala *II* vrste i trostukog integrala**)

Neka je V kompaktan i povezan skup u $\mathbb{R}^3$ čiji je rub deo-po-deo glatka površ S. Neka su $P, Q, R : V \to \mathbb{R}$ neprekidno-diferencijabilne funkcije (dovoljno je da budu neprekidni parcijalni izvodi koji su dati u formuli.) Tada važi formula Gauss-Ostrogradskog:

$$\iint\limits_{S^+} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_{V} (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dxdydz.$$