

Boeing 727: maksimalna završna visina pri zaokretu u zadatom vremenu

Matematička formulacija

...

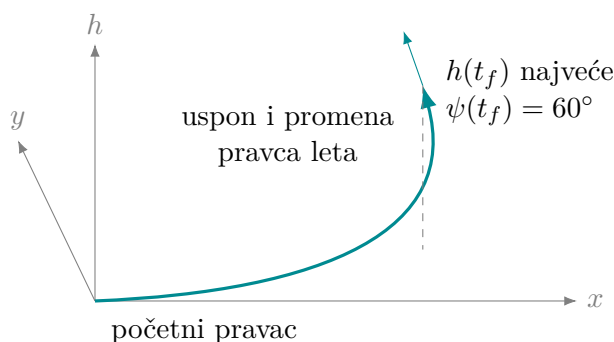
Postavka

Odrediti vremenske funkcije napadnog ugla $\alpha(t)$ i ugla bočnog nagiba $\sigma(t)$ tako da završna visina aviona bude najveća, uz zadato trajanje manevra i propisanu promenu pravca leta. Podaci iz prikaza su

$$t_f = 2.4, \quad V(t_f) = 0.60, \quad \psi(t_f) = \pi/3. \quad (1)$$

Početak je $V(0) = 1$, $\gamma(0) = \psi(0) = h(0) = x(0) = y(0) = 0$, a dodatno ograničenje $h(t) \geq 0$. Sve ove veličine pripadaju normalizovanom modelu [1].

Veza sa optimalnim upravljanjem je neposredna: ne biraju se samo dve konstantne vrednosti uglova, već dve funkcije na celom intervalu. Njihov izbor određuje rešenje sistema diferencijalnih jednačina, a time i ostvarenu završnu visinu.



Slika 1: Konceptualna skica; nije izračunata optimalna putanja niti crtež u razmeri.

Preciznost cilja. Maksimizuje se $h(t_f)$, a ne $\max_{0 \leq t \leq t_f} h(t)$, ne vreme provedeno na velikoj visini i ne maksimalna operativna visina tipa aviona. Ugao 60° označava promenu horizontalnog pravca leta; nije bočni nagib aviona od 60° .

1 Promenljive i konkretan dinamički model

Oznaka	Značenje
V	Normalizovana brzina leta
γ	Ugao putanje prema horizontalnoj ravni
ψ	Ugao horizontalnog pravca leta
h	Normalizovana visina u odnosu na početni nivo
x, y	Normalizovane horizontalne koordinate
α	Napadni ugao, prva kontrola
σ	Ugao bočnog nagiba, druga kontrola
ε	Konstantni ugaoni pomeraaj ose potiska u odnosu na referentnu osu aviona

Pišemo $z = (V, \gamma, \psi, h, x, y)^\top$, $u = (\alpha, \sigma)^\top$. Tačka označava izvod po *normalizovanom vremenu*. Sistem prikazan u [1] je

$$\dot{V} = \mathcal{T}(V) \cos(\alpha + \varepsilon) - C_D(\alpha)V^2 - \sin \gamma, \quad (2)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{[\mathcal{T}(V) \sin(\alpha + \varepsilon) + C_L(\alpha)V^2] \cos \sigma - \cos \gamma}{V}, \quad (3)$$

$$\dot{\psi} = \frac{[\mathcal{T}(V) \sin(\alpha + \varepsilon) + C_L(\alpha)V^2] \sin \sigma}{V \cos \gamma}, \quad (4)$$

$$\dot{h} = V \sin \gamma, \quad (5)$$

$$\dot{x} = V \cos \gamma \cos \psi, \quad \dot{y} = V \cos \gamma \sin \psi. \quad (6)$$

Oznaka $\mathcal{T}$ označava normalizovani potisak, a ne trajanje manevra. Funkcije modela su

$$\mathcal{T}(V) = 0.2476 - 0.04312V + 0.008392V^2, \quad (7)$$

$$C_D(\alpha) = 0.07351 - 0.08617\alpha + 1.996\alpha^2, \quad (8)$$

$$C_L(\alpha) = \begin{cases} 0.1667 + 6.231\alpha, & \alpha \leq \alpha_c, \\ 0.1667 + 6.231\alpha + 21.65(\alpha - \alpha_c)^2, & \alpha > \alpha_c, \end{cases} \quad (9)$$

$$\alpha_c = 12\pi/180. \quad (10)$$

Uglovi u formulama izražavaju se u radijanima. Znak plus u drugoj grani (9) prenet je iz dostupnog prikaza; napomena o njemu nalazi se u odeljku 4.

Kako se jednačine čitaju? Prva jednačina predstavlja bilans tangencijalnog ubrzanja. U (3) normalna sila menja ugao uspona, a u (4) njena bočna komponenta menja pravac. Kada je $\sigma = 0$, važi $\dot{\psi} = 0$: nema zaokreta. Potisak je zadat funkcijom brzine, pa ručica gasa nije nezavisna kontrola.

2 Formulacija problema optimalnog upravljanja

Za $t_f = 2.4$ osnovna formulacija tipa Mayer glasi

$$\begin{aligned} \min_{\alpha(\cdot), \sigma(\cdot)} \quad & J = -h(t_f), \\ \text{uz} \quad & \dot{z} = f(z, \alpha, \sigma), \\ & z(0) = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^\top, \\ & V(t_f) = 0.60, \quad \psi(t_f) = \pi/3, \\ & h(t) \geq 0 \quad (0 \leq t \leq t_f). \end{aligned} \tag{11}$$

Završne vrednosti γ, x, y nisu propisane. Visina $h(t_f)$ je slobodna promenljiva koja se optimizuje. Dodavanje, na primer, uslova $\gamma(t_f) = 0$ ili određenog završnog položaja (x_f, y_f) promenilo bi problem.

Dopustivi domen: šta mora biti navedeno pre računanja

Jednačine imaju singularnosti pri $V = 0$ i $\cos \gamma = 0$. Za matematički i numerički dobro definisanu primenu treba izabrati domen

$$V \geq V_{\min} > 0, \quad |\gamma| \leq \gamma_{\max} < \pi/2, \tag{12}$$

i dopustiv skup kontrola, na primer

$$U = [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}] \times [-\sigma_{\max}, \sigma_{\max}]. \tag{13}$$

Ove granice i brojna vrednost ε nisu eksplicitno zadati u pronađenom opisu primera. Zato ih ostavljamo kao parametre, a (13) označavamo kao *dopunu za precizno određenu varijantu*, ne kao potvrđene Brysonove podatke. Dopustive kontrole mogu se uzeti iz $L^\infty(0, t_f; U)$, uz apsolutno neprekidno stanje koje zadovoljava jednačine skoro svuda.

Zašto je potreban kompromis?

Veći napadni ugao menja uzgon, ali i otpor. Veći bočni nagib pojačava zaokret preko $\sin \sigma$, dok komponentu normalne sile za uspon umanjuje preko $\cos \sigma$. Kontrola koja trenutno daje najveći uspon može previše usporiti avion ili ostaviti premalo vremena za promenu pravca. Zato se odlučuje na celom intervalu.

Ekvivalentna integralna formulacija

Iz (5) i $h(0) = 0$ sledi

$$h(t_f) = \int_0^{t_f} V(t) \sin \gamma(t) dt. \tag{14}$$

Uz iste uslove, (11) je ekvivalentan Lagrangeovom problemu minimizacije $-\int_0^{t_f} V \sin \gamma dt$. Visina se ipak mora zadržati kao stanje ili izraziti integralom ako se želi sprovesti ograničenje $h(t) \geq 0$ u svakom trenutku.

3 Provera izvora: normalizacija i znak koeficijenta

1. Vreme i rastojanje nisu u SI jedinicama

Ne treba tumačiti $t_f = 2.4$ kao 2.4 sekunde. U dostupnom tekstu faktori 10.0542 i 992.0288 navedeni su uz metre i sekunde, tim redom [1]. Sledeća *dimenziona provera* pokazuje problem sa tim redosledom.

Neka su fizičke veličine

$$t_{\text{SI}} = t_* t, \quad h_{\text{SI}} = \ell_* h, \quad v_{\text{SI}} = v_* V, \quad v_* = \ell_*/t_*. \quad (15)$$

Da bi gravitacioni član u (2) bio $-\sin \gamma$, mora važiti

$$\frac{gt_*}{v_*} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\ell_*}{t_*^2} = g. \quad (16)$$

Ako se uzme $t_* = 10.0542 \text{ s}$ i $\ell_* = 992.0288 \text{ m}$, dobija se

$$\frac{992.0288}{10.0542^2} \approx 9.81362 \text{ m/s}^2, \quad (17)$$

što je saglasno gravitacionom ubrzanju. Obrnuti raspored faktora nije saglasan sa njim. Zato je **najverovatnije reč o zameni redosleda u tekstu**. Ovo je izvedena provera, ne nezavisno potvrđena ispravka autora.

Uz taj konzistentan izbor sledilo bi

$$t_{f,\text{SI}} \approx 24.1301 \text{ s}, \quad v_* \approx 98.6681 \text{ m/s}, \quad v_{f,\text{SI}} \approx 59.2009 \text{ m/s}. \quad (18)$$

Za izlaganje izvornog zadatka dovoljno je ostati u normalizovanim jedinicama.

2. Različit znak u modelu uzgona

U radu Yamaguchi–Umemura [3], tabela 1 i jednačina (12), za model klase B727 pojavljuju se isti koeficijenti 0.1667, 6.231 i prag 12° , ali kvadratni koeficijent iznosi -21.65 . Tamo druga grana ima oblik

$$\tilde{C}_L(\alpha) = 0.1667 + 6.231\alpha - 21.65(\alpha - \alpha_c)^2. \quad (19)$$

To potvrđuje neslaganje između dva dostupna zapisa. Rad [3] razmatra drugi manevar, pa nije dovoljan da se bez rezerve proglasi koja je verzija korišćena za Becerrein grafikon. Ne treba tiho zameniti znak. Za reprodukciju treba proveriti originalni primer ili njegov kod i jasno navesti izabranu verziju.

Posledica za tumačenje. Uslov $V(t_f) = 0.60$ sam po sebi ne dokazuje odsustvo sloma uzgona tokom manevra. Za fizičku proveru potrebni su dopustivi napadni ugao, opterećenje, konfiguracija i model atmosfere. Normalizovani primer služi za proučavanje optimalnog upravljanja, a nije operativno uputstvo za avion.

4 Pontrjaginov princip: eksplicitna veza sa teorijom

Za pregledan zapis uvedimo

$$A(V, \alpha) = \mathcal{T}(V) \cos(\alpha + \varepsilon) - C_D(\alpha) V^2, \quad (20)$$

$$B(V, \alpha) = \mathcal{T}(V) \sin(\alpha + \varepsilon) + C_L(\alpha) V^2. \quad (21)$$

Koordinate x, y ne utiču na ostala stanja i nemaju završne uslove, pa se za optimizaciju mogu izostaviti, a kasnije rekonstruisati integracijom. Za redukovano stanje $s = (V, \gamma, \psi, h)$ Hamiltonijan u konvenciji *minimума* je

$$H = p_V(A - \sin \gamma) + \frac{p_\gamma}{V}(B \cos \sigma - \cos \gamma) + \frac{p_\psi B \sin \sigma}{V \cos \gamma} + p_h V \sin \gamma. \quad (22)$$

U normalnom slučaju, na delovima putanje na kojima je $h > 0$ i ostala ograničenja stanja nisu aktivna, važi $\dot{p} = -H_s$ i

$$(\alpha^*, \sigma^*) \in \arg \min_{(\alpha, \sigma) \in U} H(s^*, p, \alpha, \sigma). \quad (23)$$

Za unutrašnju kontrolu potrebni stacionarni uslovi glase

$$H_\alpha = p_V A_\alpha + \left(\frac{p_\gamma \cos \sigma}{V} + \frac{p_\psi \sin \sigma}{V \cos \gamma} \right) B_\alpha = 0, \quad (24)$$

$$H_\sigma = -\frac{p_\gamma B \sin \sigma}{V} + \frac{p_\psi B \cos \sigma}{V \cos \gamma} = 0, \quad (25)$$

gde su

$$A_\alpha = -\mathcal{T}(V) \sin(\alpha + \varepsilon) - C'_D(\alpha) V^2, \quad (26)$$

$$B_\alpha = \mathcal{T}(V) \cos(\alpha + \varepsilon) + C'_L(\alpha) V^2. \quad (27)$$

Na granicama skupa U ne postavlja se automatski $H_u = 0$, već se proverava uslov minimuma nad dopustivim skupom.

Završni uslovi adjungovanih promenljivih

Za neaktivno završno ograničenje visine i ostale dodatne granice, završna funkcija je

$$\Phi = -h + \nu_V(V - 0.60) + \nu_\psi(\psi - \pi/3). \quad (28)$$

Otuda sledi

$$\boxed{p_V(t_f) = \nu_V, \quad p_\gamma(t_f) = 0, \quad p_\psi(t_f) = \nu_\psi, \quad p_h(t_f) = -1.} \quad (29)$$

Pošto je t_f fiksirano, *ne dodaje se* uslov $H(t_f) = 0$. Na unutrašnjim lukovima su $\dot{p}_\psi = 0$ i $\dot{p}_h = 0$. Ako je $h(t) > 0$ za $0 < t \leq t_f$, onda je $p_h \equiv -1$ na tom intervalu.

Granica izvedbe. Za aktivno $h = 0$ potrebni su multiplikatori ograničenja stanja i uslovi spajanja lukova; prethodne glatke jednačine nisu kompletni uslovi za granični luk. PMP daje potrebne uslove, a ne dokaz globalne optimalnosti u ovom nekonveksnom problemu.

5 Dodatna analiza i postupak numeričkog rešavanja

Energetski identitet izveden iz modela

Definišimo normalizovanu specifičnu energiju $E = h + V^2/2$. Koristeći (2) i (5), dobijamo

$$\dot{E} = \dot{h} + V\dot{V} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} &= V \sin \gamma + V[\mathcal{T}(V) \cos(\alpha + \varepsilon) - C_D(\alpha)V^2 - \sin \gamma] \\ &= V\mathcal{T}(V) \cos(\alpha + \varepsilon) - C_D(\alpha)V^3. \end{aligned} \quad (31)$$

Početna i završna brzina zato daju tačan identitet

$$h(t_f) = 0.32 + \int_0^{t_f} [V\mathcal{T}(V) \cos(\alpha + \varepsilon) - C_D(\alpha)V^3] dt. \quad (32)$$

Član $0.32 = (1^2 - 0.60^2)/2$ predstavlja doprinos smanjenja kinetičke energije. Zaokret ne stoji eksplicitno u (31), ali preko dinamike utiče na V i na potreban α , a time i na otpor. Ne može se izostaviti iz optimizacije.

Direktna metoda

Izabere se mreža $t_k = kt_f/N$ i, na primer, kontrole konstantne na svakom podintervalu: $u(t) = u_k = (\alpha_k, \sigma_k)$. Numerički integrator određuje preslikavanje

$$z_{k+1} = F_{\Delta t}(z_k, u_k), \quad \Delta t = t_f/N. \quad (33)$$

Metodom direktnog višestrukog gađanja rešava se konačnodimenzioni problem

$$\begin{aligned} &\min_{\{z_k, u_k\}} -h_N, \\ &\text{uz } z_0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^\top, \quad z_{k+1} = F_{\Delta t}(z_k, u_k), \\ &\quad V_N = 0.60, \quad \psi_N = \pi/3, \quad h_k \geq 0, \quad u_k \in U, \end{aligned} \quad (34)$$

uz izabrane granice domena. Mogu se koristiti SQP ili metoda unutrašnjih tačaka, a alternativno direktna kolokacija. Opisani postupak je predlog izvedbe; ovaj dokument ne prijavljuje novo numeričko rešenje.

Šta proveriti pri računanju

1. Fiksirati ε , grane C_L i granice U ; navesti poreklo svakog podatka.
2. Proveriti završne rezidualne $|V_N - 0.60|$ i $|\psi_N - \pi/3|$.
3. Ponovo integrisati gušćom mrežom i proveriti $h(t) \geq 0$ između čvorova.
4. Proveriti energetski identitet i stabilnost $h(t_f)$ pri usitnjavanju mreže.
5. Uporediti više početnih aproksimacija. Najbolje pronađeno lokalno rešenje nije automatski dokaz globalne optimalnosti.

6 Literatura i predlog nastavne obrade

Literatura

- [1] V. M. Becerra, *Optimal control*, Scholarpedia, 3(1):5354, 2008. DOI: 10.4249/scholarpedia.5354. Odeljak o B-727 usponu sa zaokretom.
https://www.scholarpedia.org/article/Optimal_control
- [2] A. E. Bryson, Jr., *Dynamic Optimization*, Addison-Wesley Longman, 1999, ISBN 0-201-59790-X. Knjiga na koju Becerra upućuje za ovaj primer. Autorov prateći softver:
<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/2429-dynamic-optimization>
- [3] M. Yamaguchi, A. Umemura, *Aircraft Control Strategies by Game Theoretic Approach against Wind Shear*, Journal of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, 53(622), 524–531, 2005. Tabela 1 i jednačina (12), str. 525.
https://www.jstage.jst.go.jp/article/jjsass/53/622/53_622_524/_pdf
- [4] V. M. Becerra, *Solving optimal control problems with state constraints using nonlinear programming and simulation tools*, IEEE Transactions on Education, 47(3), 377–384, 2004. Dodatna metodološka literatura; ne navodi se kao potvrđeni izvor konkretnog B-727 zadatka.
<https://centaur.reading.ac.uk/15131/>