Krivolinijski integrali *I* i *II* vrste

Osnovne definicije i oznake

Definicija

Kriva *u prostoru* $\mathbb{R}^n$ *je neprekidno preslikavanje*
$\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n,\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b$

Kriva u ravni ($\mathbb{R}^2$): $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$
Kriva u prostoru ($\mathbb{R}^3$): $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$
Kriva u $\mathbb{R}^n$: $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$

Neka se tačka M kreće u prostoru $\mathbb{R}^n$. Neka je u momentu t položaj tačke M određen koordinatama $x_1(t), ..., x_n(t)$. Vektor $(x_1(t), ..., x_n(t))$ se naziva **vektorom položaja** tačke M.

Jednačine $x_1 = x_1(t), ..., x_n = x_n(t)$ su **parametarske jednačine krive**.
t je **parametar** krive (može da se interpretira kao vreme, ugao,...).
Interval $[a, b]$ je **domen parametra** t.

Parametrizacija krive :
U ravni: $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j},\ \vec{i} = [1, 0]^T, \vec{j} = [0, 1]^T$
U prostoru:
$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k},\ \vec{i} = [1, 0, 0]^T, \vec{j} = [0, 1, 0]^T, \vec{k} = [0, 0, 1]^T$

Parametrizacija krive nije jedinstvena. (primer na času).

Kriva C je uvek **orijentisana**: $\forall t_1, t_2 \in [a, b], t_1 < t_2$ kriva C je orijentisana od tačke $\vec{r}(t_1)$ ka tački $\vec{r}(t_2)$.

Specijalno, $\vec{r}(a)$ je **početak**, a $\vec{r}(b)$ je **kraj** krive C.

Ako je $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ (početak i kraj se poklapaju) onda je C **zatvorena kriva**.

U slučaju zatvorene krive koristimo pojmove pozitivno i negativno orijentisana kriva.

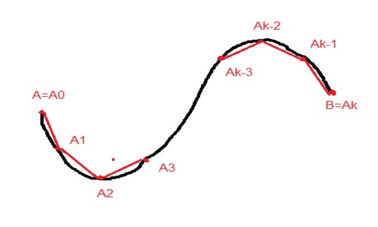
Pozitivno orijentisana zatvorena kriva - kada se krecemo po krivoj a unutrašnja oblast ostaje sa leve strane (smer suprotan od kazaljke na satu).

Negativno orijentisana zatvorena kriva - kada se krecemo po krivoj a unutrašnja oblast ostaje sa desne strane (smer kazaljke na satu).

Ako postoje tačke takve da za $t_1 \neq t_2$ važi $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2) = T$ onda je T s**amopresečna tačka** krive (osim u slučaju $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$).

Ako kriva nema samopreseka onda je ona **prosta** kriva.

Dužina krive



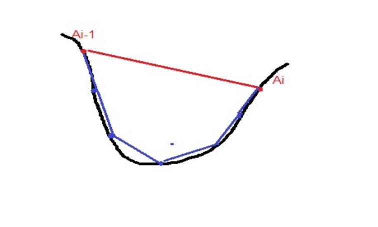
Neka je
$P: a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$
podela segmenta $[a, b]$.

$A_0 = \vec{r}(t_0), ..., A_k = \vec{r}(t_k)$

r_P je **poligonalna linija** čija su temena $A_0 = \vec{r}(t_0), ..., A_k = \vec{r}(t_k)$.
Kaže se da je poligonalna linija upisana u krivu.

Dužina duži određene tačkama A_{i-1} i A_i: $||\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})||$.

Dužina poligonalne linije r_P: $\ell(r_P) = \sum_{i=1}^{k} ||\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})||$.



Ako svaki deo krive $\widehat{A_{i-1}Ai}$ izdelimo na još tačaka, dobijamo finiju podelu P'.

Njoj odgovara poligonalna linija $r_{P'}$ čija je dužina $\ell(r_{P'})$.

Na osnovu nejednakosti trougla $\Rightarrow \ell(r_P) \leq \ell(r_{P'})$.

Dakle, finije podele rezultiraju poligonalnim linijama veće dužine.

Kriva može imati konačnu ili beskonačnu dužinu.

Kriva koja ima konačnu dužinu je **rektificijabilna** kriva.

Definicija

*Kriva je **rektificijabilna** (ima konačnu dužinu) ako postoji M,* $(0 < M < \infty)$*, takvo da* $\sum_{i=1}^{k} ||\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})|| < M$ *za svaku podelu* $P : a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$ *segmenta* $[a, b]$.

Ako je kriva C rektificijabilna onda je **dužina krive** C jednaka

$$\ell(C) = \sup_{P} \sum_{i=1}^{k} ||\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})||.$$

Kriva je **diferencijabilna** akko su sve koordinatne funkcije diferencijabilne.

Za diferencijabilnu vektorsku funkciju $\vec{r}(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ vektor $(x_1'(t), ..., x_n'(t))$ zovemo njenim **prvim izvodom** i označavamo $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}\,' = (x_1'(t), ..., x_n'(t))$.

Kriva je **neprekidno diferencijabilna** akko $\exists \vec{r}\,'$ i $\vec{r}\,'$ je neprekidna funkcija.
Ekvivalentno, $\vec{r}$ je neprekidno diferencijabilna ako su joj sve koordinatne funkcije neprekidno diferencijabilne.

Tačka krive C je **singularna tačka krive** ako je $\vec{r}'(t) = \vec{0}$ (u toj tački postoji dve ili više tangenti na krivu).

Ako je $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ za neko $t \in [a, b]$ onda je sa $\vec{r}'(t)$ određena **tangenta krive** u tački $\vec{r}(t)$.
Tangenta je prava koja prolazi kroz $\vec{r}(t)$ i čiji je vektor pravca $\vec{r}'(t)$.

Kriva je **glatka** ako postoji $\vec{r}'(t)$, ako je $\vec{r}'(t)$ neprekidna na $[a, b]$ i $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}, \forall t \in [a, b]$ (nema singularnih tačaka).
Kriva je glatka ako se u svakoj tački te krive može odrediti jedinstvena tangenta.

Teorema

Neka je $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ glatka kriva. Tada je r rektificijabilna kriva i njena dužina je data sa:
$$\ell(r) = \int_a^b ||\vec{r}'(t)||dt = \int_a^b \sqrt{(x_1'(t))^2 + ... + (x_n'(t))^2}dt.$$

Neka je $P : a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$ proizvoljna podela segmenta $[a,b]$.

$$\int_a^b ||\vec{r}'(t)||dt = \int_a^b \sqrt{(x_1'(t))^2 + ... + (x_n'(t))^2}dt$$
$$= \lim_{d(P)\to 0} \sum_{i=1}^{k} \sqrt{\left(\frac{x_1(t_i) - x_1(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2 + .. + \left(\frac{x_k(t_i) - x_k(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2}(t_i - t_{i-1})$$
$$= \lim_{d(P)\to 0} \sum_{i=1}^{k} \sqrt{(x_1(t_i) - x_1(t_{i-1}))^2 + ... + (x_k(t_i) - x_k(t_{i-1}))^2} = \ell(r)$$

Definicija

*Kriva je **deo-po-deo glatka** ako postoji podela $P : a = S_0 < S_1 < ... < S_m = b$ segmenta $[a, b]$ takva da je kriva glatka na svakom od segmenata $[S_{i-1}, S_i],\ i = 1, ..., m$.*

Jedine tačke koje remete neprekidnost "kretanja" tangente su konacno mnogo tačaka $S_1, ..., S_{m-1}$.

Deo-po-deo glatka kriva zove se **putanja**.

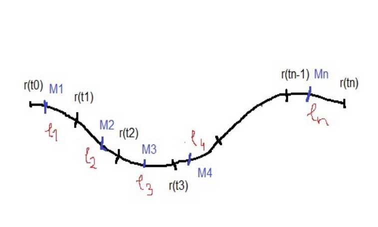
Teorema

Neka je $\vec{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ deo-po-deo glatka kriva. Tada je r rektificijabilna kriva i njena dužina je data sa:
$\ell(r)=\int\limits_a^b ||\vec{r}'(t)||dt=\int\limits_a^b\sqrt{(x_1'(t))^2+...+(x_n'(t))^2}dt$*, pri čemu zanemarujemo konačno mnogo tačaka S_i u kojima ne postoji prvi izvod $\vec{r}'(S_i)$.*

Dokaz:
Dužina krive na $[a,b]$ jednaka je sumi dužina delova krive na $[S_{i-1},S_i]$.
$\ell(r)=\int\limits_a^b ||\vec{r}'(t)||dt=\sum\limits_{i=1}^{k}\int\limits_{S_{i-1}}^{S_i} ||\vec{r}'(t)||dt.$
Pošto je r glatka na $[S_{i-1},S_i]$ (na osnovu prethodne teoreme) ona je i rektificijabilna na $[S_{i-1},S_i]$
$\Rightarrow$ ima konačnu dužinu.

Krivolinijski integral prve vrste

Neka je $P : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ proizvoljna podela segmenta $[a, b]$ kojom je glatka kriva C sa parametrizacijom $\vec{r}(t),\ t \in [a, b]$ podeljena na n lukova l_i.



Δl_i - dužina luka l_i.

Neka je $f : C \to \mathbb{R}$ (domen je kriva).

Na svakom luku l_i izaberemo proizvoljnu tačku M_i.

Krivolinijski integral funkcije f duž glatke krive C definiše se preko Rimanovih integralnih suma na sledeći način:

$$\int_C f \cdot ds = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \Delta l_i.$$

Teorema

Izračunavanje krivolinijskog integrala prve vrste

Ako kriva C ima deo-po-deo glatku parametrizaciju $\vec{r}(t)$ na $[a, b]$ i ako je $\vec{r}$ neprekidna, onda krivolinijski integral prve vrste neprekidne funkcije $f(x, y, z)$ duž krive C postoji i on je jednak:

$$\int_C f(x, y, z)ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \cdot ||\vec{r}'(t)||dt$$

$$= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt$$

Specijalno: Ako je $f \equiv 1$ na $[a, b]$ onda je dužina krive $\ell(C) = \int_C ds$.

Svojstva krivolinijskog integrala prve vrste

Teorema

Neka je $\mathcal{C}$ luk krive između tačaka A i B, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i neka su f i g funkcije definisane na luku $\mathcal{C}$ i integrali $\int\limits_{\mathcal{C}} f(x,y,z)ds$ i $\int\limits_{\mathcal{C}} g(x,y,z)ds$ postoje. Tada:

- $\int\limits_{\mathcal{C}}(\alpha f(x,y,z)+\beta g(x,y,z))ds = \alpha \int\limits_{\mathcal{C}} f(x,y,z)ds + \beta \int\limits_{\mathcal{C}} g(x,y,z)ds.$
- $\int\limits_{\mathcal{C}} ds = \mathfrak{l}(\mathcal{C})$ *gde je* $\mathfrak{l}(\mathcal{C})$ *duzina luka krive* $\mathcal{C}$.
- $\int\limits_{AB} f(x,y,z)ds = \int\limits_{AC} f(x,y,z)ds + \int\limits_{CB} f(x,y,z)ds$
  gde je $C \in \mathcal{C}$ *tačka između A i B.*
- $|\int\limits_{\mathcal{C}} f(x,y,z)ds| \leq \int\limits_{\mathcal{C}} |f(x,y,z)|ds.$
- *Ako* $f(x,y,z) \leq g(x,y,z) \implies \int\limits_{\mathcal{C}} f(x,y,z)ds \leq \int\limits_{\mathcal{C}} g(x,y,z)ds.$
- $\int\limits_{AB} f(x,y,z)ds = \int\limits_{BA} f(x,y,z)ds$
- $\int\limits_{\mathcal{C}} f(x,y,z)ds = f(x_0,y_0,z_0)\cdot \mathfrak{l}(\mathcal{C})$ *za neku* $(x_0,y_0,z_0) \in \mathcal{C}.$

Primena krivolinijskog integrala *I* vrste, geometrijsko tumačenje

Ako kriva $\mathcal{C}$ pripada nekoj kod koordinatnih ravni (npr. $\mathcal{C} \in 0xy$) tada se funkcija $f(x, y, z)$ svodi na funkciju dve promenljive $f(x, y, 0)$.

- Krivolinijski integral $\int_{\mathcal{C}} f(x, y)ds$ predstavlja površinu cilindrične površi čije su izvodnice paralelne z-osi. Donji bazis je ograničava kriva $\mathcal{C}$ a gornji bazis se nalazi u preseku te površi i površi $z = f(x, y)$.

Krivolinijski integral druge vrste

Neka je kriva C data parametrizacijom $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$.

Neka su $P(x, y, z), Q(x, y, z)$ i $R(x, y, z)$ funkcije definisane i ograničene na C.

Neka je $P : a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ podela segmenta $[a, b]$.

Izaberimo vrednosti $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Neka su tačke na krivoj:
$A_i(x(t_i), y(t_i), z(t_i)) = \vec{r}(t_i)$ i
$M_i(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) = \vec{r}(\tau_i)$

Označimo:

$$\triangle x_i = x_i - x_{i-1}, \quad x_i = x(t_i), x_{i-1} = x(t_{i-1})$$
$$\triangle y_i = y_i - y_{i-1}, \quad y_i = y(t_i), y_{i-1} = y(t_{i-1})$$
$$\triangle z_i = z_i - z_{i-1}, \quad z_i = z(t_i), z_{i-1} = z(t_{i-1})$$

Sastavimo Rimanove integralne sume:

$$\mathcal{R}_1(P, C) = \sum_{i=1}^{n} P(M_i)\triangle x_i$$
$$\mathcal{R}_2(Q, C) = \sum_{i=1}^{n} Q(M_i)\triangle y_i$$
$$\mathcal{R}_3(R, C) = \sum_{i=1}^{n} R(M_i)\triangle z_i$$

Definicija

Ako za funkciju $P(x,y,z)$ (odnosno $Q(x,y,z), R(x,y,z)$) definisanu i ograničenu na krivoj C, postoji $\lim\limits_{\triangle \ell_i \to 0} \mathcal{R}_1(P,C)$ (odnosno $\lim\limits_{\triangle \ell_i \to 0} \mathcal{R}_2(Q,C)$, $\lim\limits_{\triangle \ell_i \to 0} \mathcal{R}_3(R,C)$) onda se on naziva ***krivolinijski integral druge vrste*** *fukcije P (odnosno Q, R) po krivoj C i oznacava sa $\int\limits_C P(x,y,z)dx$ (odnosno $\int\limits_C Q(x,y,z)dy$, $\int\limits_C R(x,y,z)dz$).*

Definicija

Zbir $\int\limits_C P(x,y,z)dx + \int\limits_C Q(x,y,z)dy + \int\limits_C R(x,y,z)dz$ obično se piše u obliku: $\int\limits_C (P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz)$ i naziva se ***opšti krivolinijski integral druge vrste****.*

Teorema

Izračunavanje krivolinijskog integrala druge vrste

Ako kriva C ima deo-po-deo glatku parametrizaciju $\vec{r}(t)$ na $[a, b]$ i $P(x, y, z)$ je neprekidna, tada važi:

$$\int_C P(x,y,z)dx = \int_a^b P(x(t),y(t),z(t))\cdot x'(t)dt.$$

Analogno i za:

$$\int_C Q(x,y,z)dy = \int_a^b Q(x(t),y(t),z(t))\cdot y'(t)dt.$$

$$\int_C R(x,y,z)dz = \int_a^b R(x(t),y(t),z(t))\cdot z'(t)dt.$$

Konačno:

$$\int_C (P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz) =$$

$$\int_a^b \big(P(x(t),y(t),z(t))\cdot x'(t)+$$

$$+Q(x(t),y(t),z(t))\cdot y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))\cdot z'(t)\big)dt$$

Svojstva krivolinijskog integrala druge vrste

Teorema

Neka je C krive između tačaka A i B, neka su P_1 i P_2 funkcije definisane na C i postoje integrali $\int\limits_C P_1(x,y,z)dx$ i $\int\limits_C P_2(x,y,z)dx$ postoje. Tada:

- $\int\limits_C (\alpha P_1(x,y,z) + \beta P_2(x,y,z))dx =$
  $\alpha \int\limits_C P_1(x,y,z)dx + \beta \int\limits_C P_2(x,y,z)dx, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$
- $\int\limits_{AB} P_1(x,y,z)dx = \int\limits_{AM} P_1(x,y,z)dx + \int\limits_{MB} P_1(x,y,z)dx$
  gde je $M \in C$ tačka između A i B.

Teorema

(Ovo svojstvo nema krivolinijski integral prve vrste)
Ako postoji $\int\limits_{AB} P(x, y, z)dx$ *onda je*
$$\int\limits_{BA} P(x, y, z)dx = -\int\limits_{AB} P(x, y, z)dx.$$

Smatramo da je luk AB orijentisan. Oznake:
$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)dx = \int\limits_{C} P(x, y, z)dx$$
$$\int\limits_{BA} P(x, y, z)dx = \int\limits_{C-} P(x, y, z)dx$$

Ako je C zatvorena kriva: $\oint\limits_{C} Pdx + Qdy + Rdz$.

Nezavisnost integracije od putanje

Krivolinijski integral $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$ u opštem slučaju zavisi od putanje po kojoj se vrši integracija.

Međutim, nekad to nije tako: Ako izraz $Pdx + Qdy + Rdz$ predstavlja totalni diferencijal neke funkcije, onda krivolinijski integral po luku AB zavisi samo od tačaka A i B, a ne od luka AB.

Teorema

Sledeća tvrđenja su međusobno ekvivalentna:

1. *Postoji funkcija* $u(x, y, z)$ *sa neprekidnim parcijalnim izvodima takva da važi:* $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$ *i* $\frac{\partial u}{\partial z} = R$.
2. *Krivolinijski integral* $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$ *po putanji AB ne zavisi od oblika putanje, nego samo od tačaka A i B.*
   Ako su $A = (a_1, a_2, a_3)$ *i* $B = (b_1, b_2, b_3)$ *onda je vrednost integrala* $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz =$
   $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = u(b_1, b_2, b_3) - u(a_1, a_2, a_3)$.
3. *Krivolinijski integral* $\oint\limits_{C} Pdx + Qdy + Rdz$ *po proizvoljnoj zatvorenoj putanji C jednak je 0.*

Još jedan kriterijum za raspoznavanje da li je podintegralna funkcija $Pdx + Qdy + Rdz$ gradijent neke funkcije $u(x, y, z)$:

Definicija

Oblast $D \subset \mathbb{R}^3$ je ***prosto (jednostruko) povezana*** *ako se svaka zatvorena deo-po-deo glatka kriva $C \subset D$ može "stegnuti" u proizvoljnu tačku $M \in C$ ostajući pri tome u D.*

Primeri na času.

Teorema

Neka je $D \subset \mathbb{R}^3$ prosto povezana oblast i neka neprekidna funkcija $u(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, z, y))$ ima neprekidne parcijalne izvode $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}$. Potreban i dovoljan uslov da integral $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$ ne zavisi od putanje AB je da su ispunjene jednakosti: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$.

Primena krivolinijskog integrala *II* vrste, geometrijsko tumačenje

Grinova teorema

(Veza između dvostrukog integrala po nekoj oblasti i krivolinijskog integrala po granici te oblasti)

Neka je $D \subset \mathbb{R}^2$ oblast ograničena deo-po-deo glatkom krivom C. Ako su funkcije $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ neprekidne, zajedno sa svojim parcijalnim izvodima $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ na zatvorenoj oblasti D onda važi:

$$\oint\limits_{C^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\int\limits_{D} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy.$$

$\oint\limits_{C^+}$ znači da se integracija vrši u pozitivno orijentisanom smeru.

Ako je D prosto povezana oblast u ravni i C njena kontura, $P(x,y) = -y$ i $Q(x,y) = x$. Tada je

$$\oint\limits_{C^+} xdy - ydx = 2\iint\limits_{D} dxdy \implies P(D) = \frac{1}{2}\oint\limits_{C^+} xdy - ydx.$$