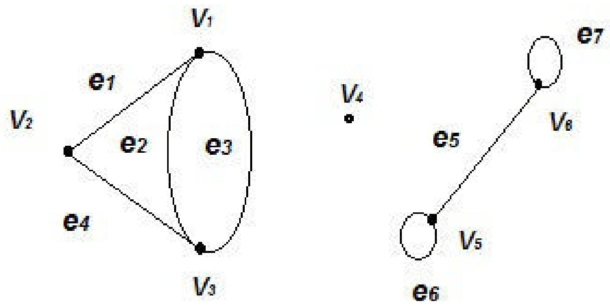
GRAFOVI - Aleksandar Jović

1. Увод, дефиниција графа, примери.

2. Разматрамо следећи граф:



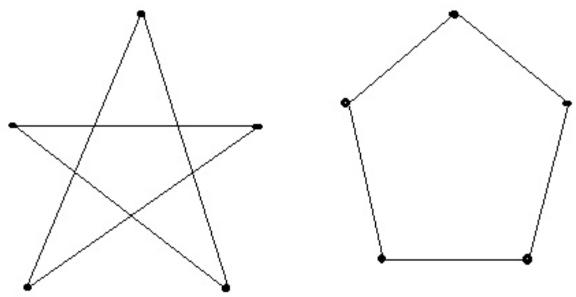
а) Написати скуп чворова и скуп грана графа и дати табелу (функцију инциденције).

б) Наћи све гране које су инцидентне са чвором v_1, све чворове који су суседни са v_1, све гране које су суседне са e_1, све петље, све паралелне гране, све чворове суседне са самим собом и све изоловане чворове.

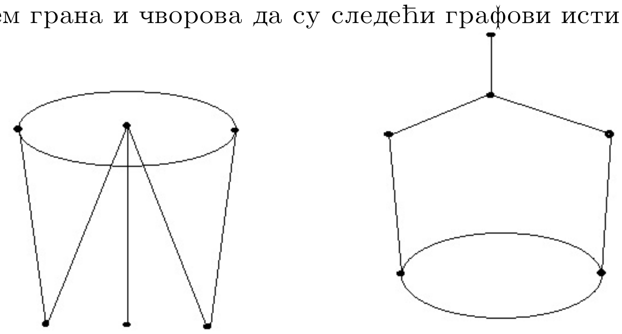
3. (Пример да не постији јединствен начин цртања графа) Нацртати граф G са скупом чворова $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ скупом грана $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ и функцијом инциденције:

грана	чворови којима је одређена
e_1	$\{v_1, v_3\}$
e_2	$\{v_2, v_4\}$
e_3	$\{v_2, v_4\}$
e_4	$\{v_3\}$

4. Још један пример за исте графове:



5. Доказати обележавањем грана и чворова да су следећи графови исти



6. Неке врсте графова (дефиниције за прост, комплетан, бипартитан, потпун бипартитан граф)

7. Нацртати све просте графове $\{u, v, w, x\}$ са 4 чвора и 2 гране од којих је увек једна $\{u, v\}$.

8. (дефиниција подграфа)

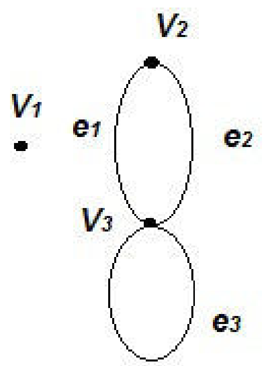
9. Написати све подграфове графа задатог са $V = \{v_1, v_2\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ и

грана	чворови којима је одређена
e_1	$\{v_1, v_2\}$
e_2	$\{v_1, v_2\}$
e_3	$\{v_1, v_1\}$

10. Пример за разапињући подграф, индуковани (цворовима и гранама)подграф.

11. Степен чвора - дефиниција.

12. Одредити степен сваког чвора приказаног на слици и одредити тотални степен целог графа.



13. **(Теорема)** У произвољном графу $G = (V, E)$ важи: $\sum_{v_i \in V} d_G(v_i) = 2|E|$.

14.(Последица) Лема "о руковању" У произвољном графу $G = (V, E)$ број чворова непарног степена је паран број. (У сваком друштву број особа које су се руковале непаран број пута је паран број.)

15. Нацртати граф са одговарајућим особинама или доказати да такав не постоји:

а) граф са 4 чвора степена 1, 1, 2, 3

б) граф са 4 чвора степена 1, 1, 3, 3

в) прост граф са 4 чвора степена 1, 1, 3, 3

г) граф са 5 чворова степена 1, 2, 3, 3, 5

д) граф са 4 чвора степена 1, 2, 3, 3

ђ) граф са 4 чвора степена 1, 2, 3, 3

е) граф са 4 чвора степена 1, 1, 1, 4

ж) граф са 4 чвора степена 1, 2, 3, 4

з) прост граф са 4 чвора степена 1, 2, 3, 4

и) прост граф са 5 чворова степена 2, 3, 3, 3, 5

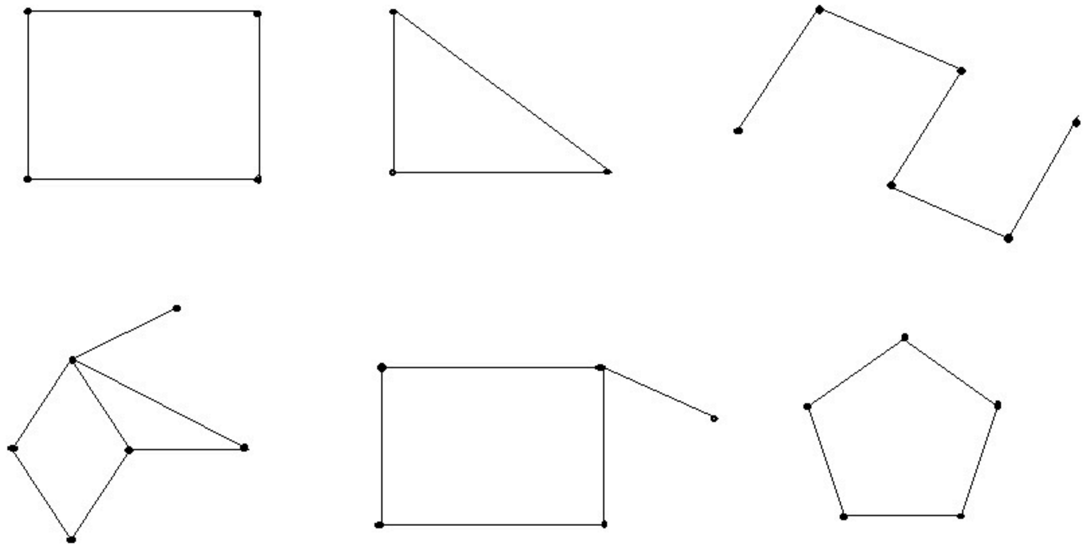
ј) прост граф са 5 чворова степена 1, 1, 1, 2, 3

к) прост 3-регуларан граф са 6 чворова

л) (домаћи) прост 3-регуларан граф са 9 чворова.

16. Да ли је могуће да у групи од 9 људи свако има по 5 познаника?

17. Испитати да ли су следећи графови бипартитни?



18. У следећем графу одредити да ли су следеће шетње стазе, путеви, циклуси или прости циклуси?

а)$v_1e_1v_2e_3v_3e_4v_3e_5v_4$

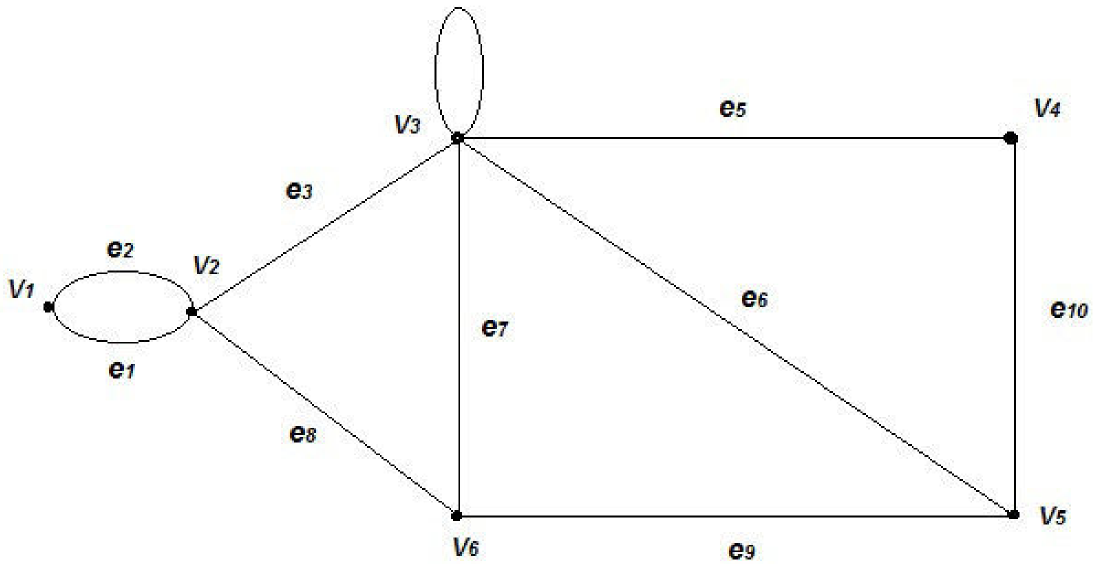
б)$v_2v_3v_4v_5v_6v_2$

в)$e_1e_3e_5e_5e_6$

г)$v_2v_3v_4v_5v_6v_3v_2$

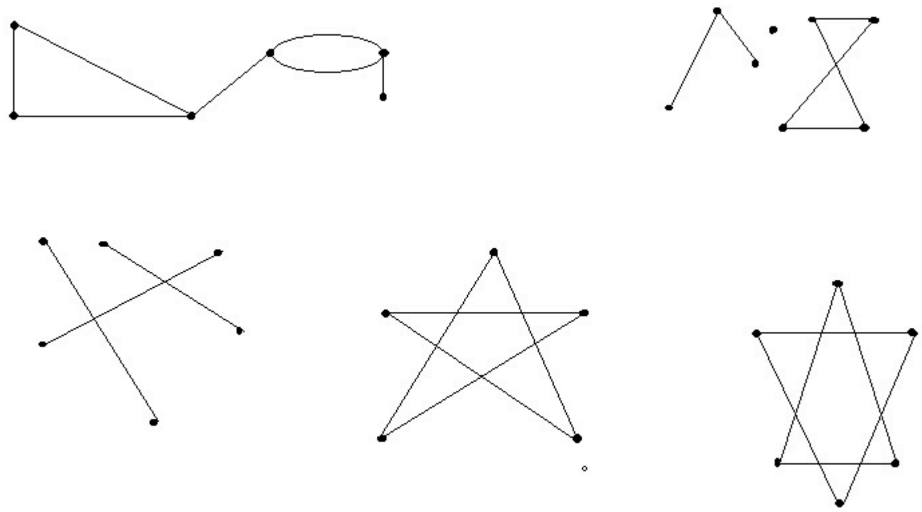
д)$v_2v_3v_4v_5v_3v_6v_2$

ђ) v_1

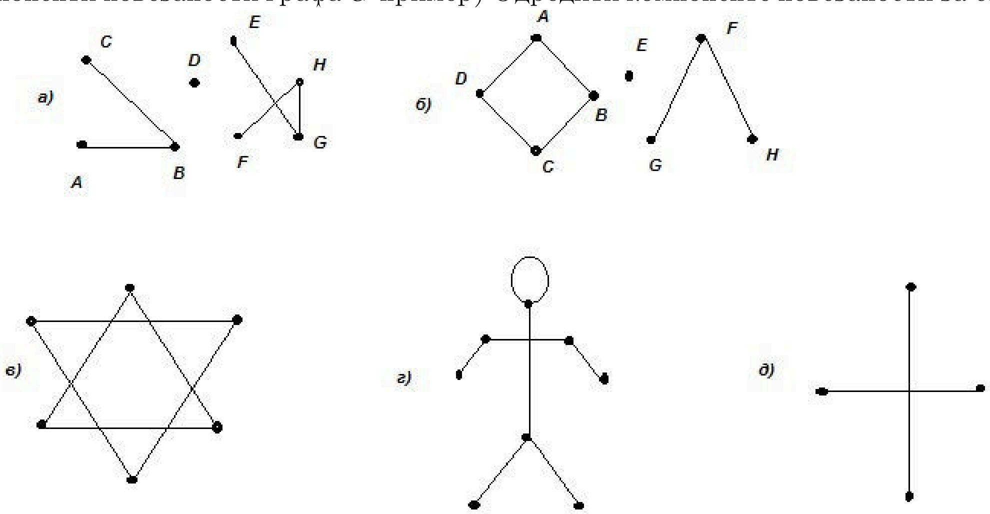


19. за домаћи још један задатак овог типа.

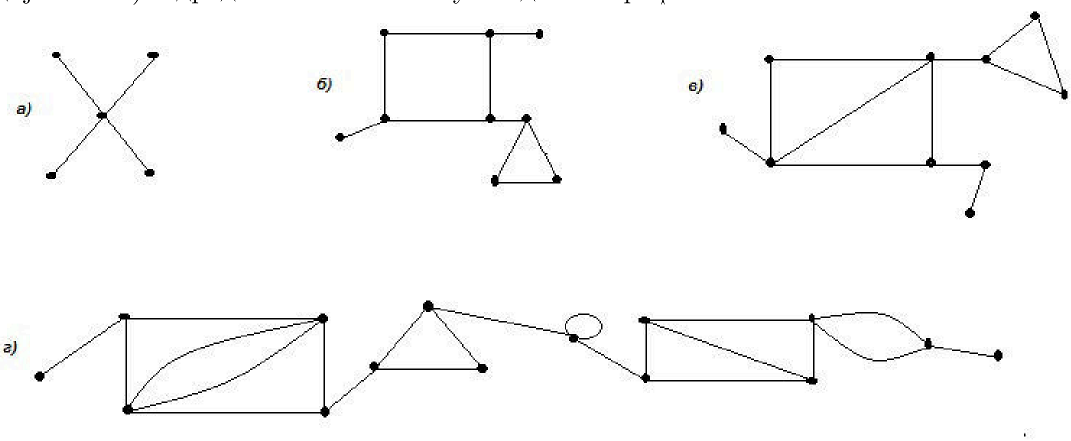
20.(дефиниција повезаности графа) Испитати да ли су следећи графови повезани:



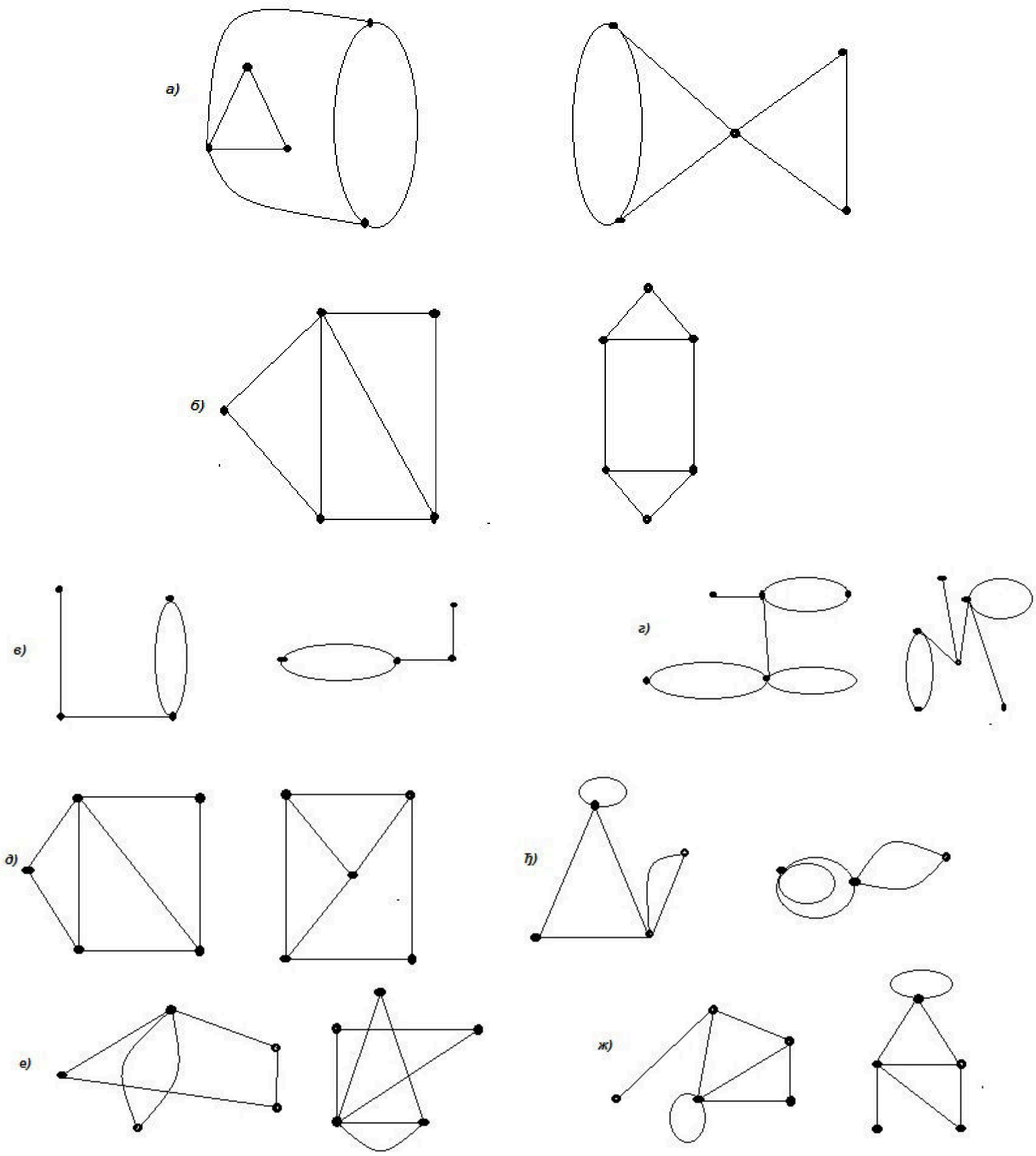
21. (Број компоненти повезаности графа G-пример) Одредити компоненте повезаности за следеће графове:



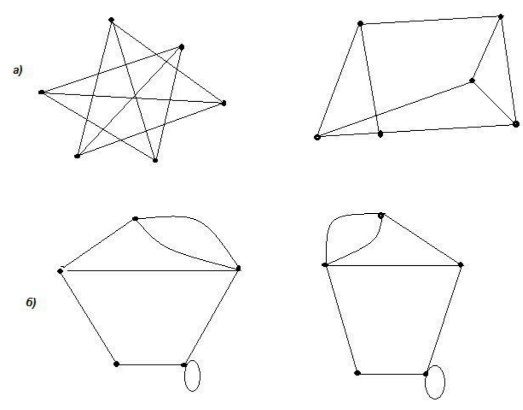
22.(дефиниција моста) Одредити све мостове у следећим графовима:



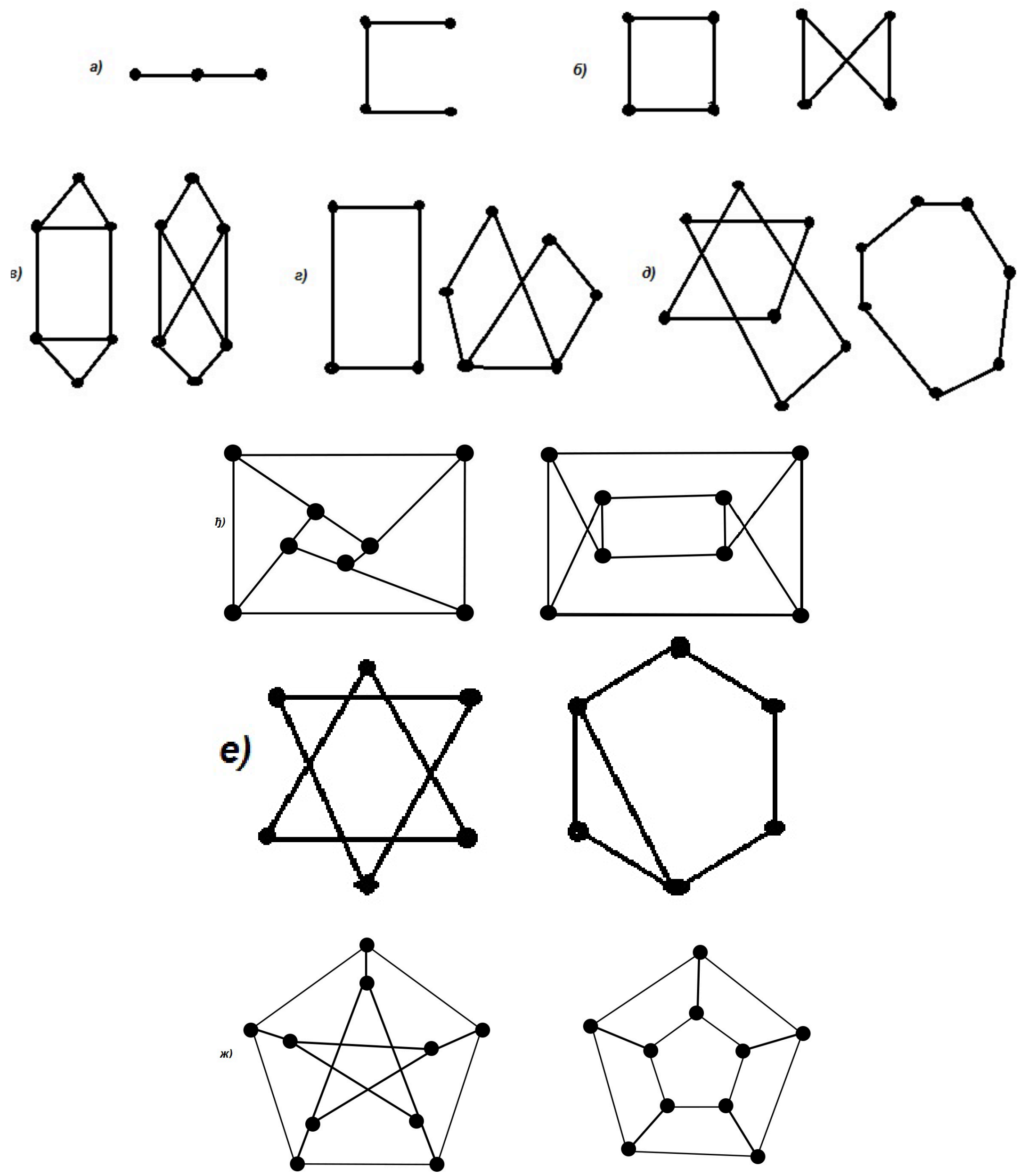
23.(Изоморфизам графова-дефиниција) Да ли су графови на слици изоморфни? Ако јесу образложити (доказати) да јесу, ако нису рећи зашто нису.



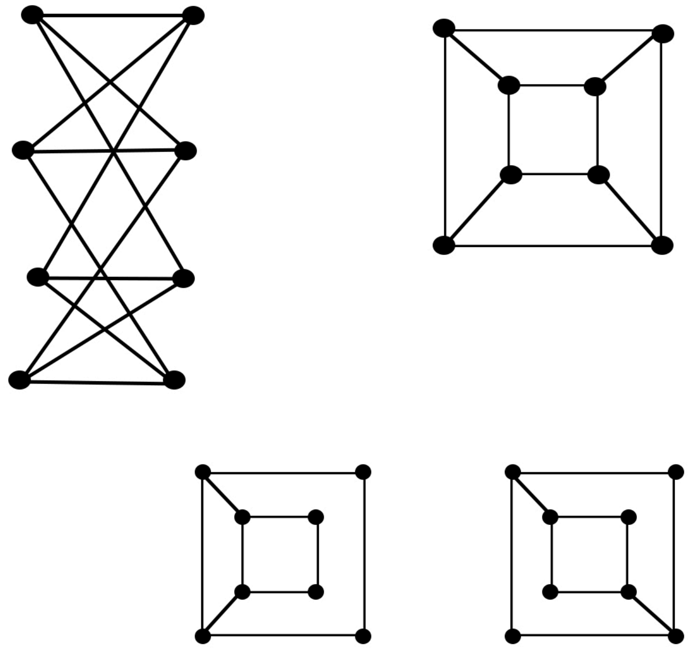
24. (Домаћи) Проверити изоморфност следећих графова:



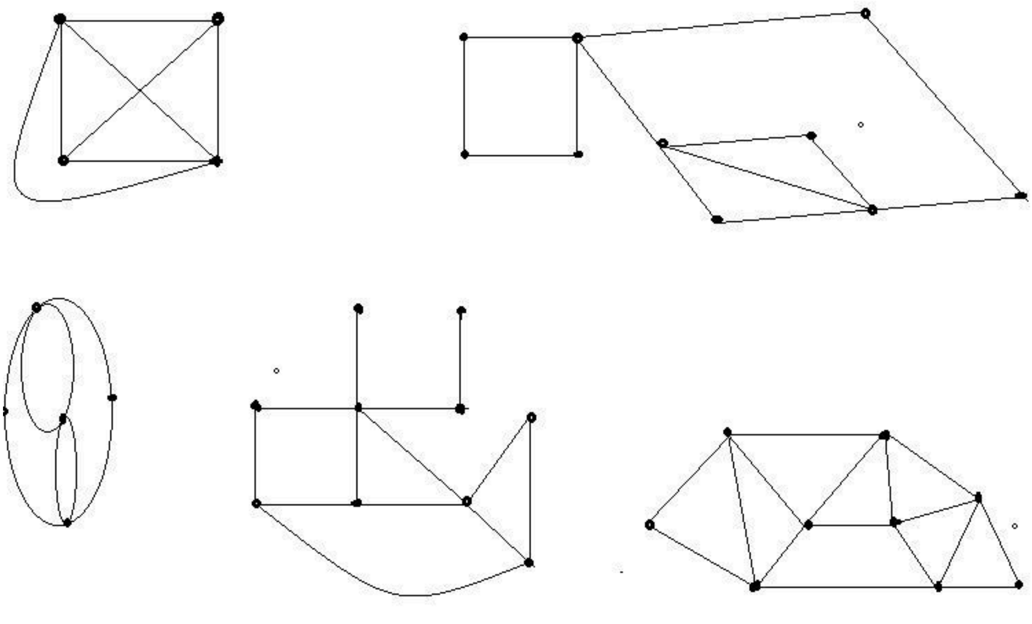
25. Да ли су следећи прости графови изоморфни?

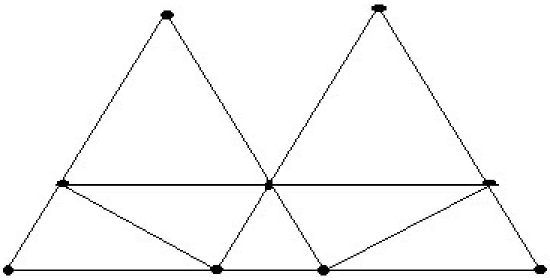


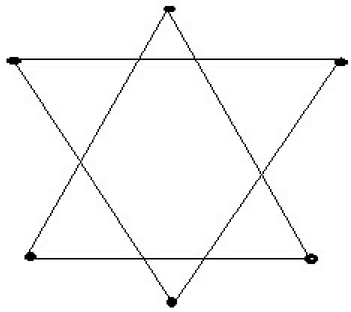
26. (Домаћи) Испитати изоморфност следећих графова:

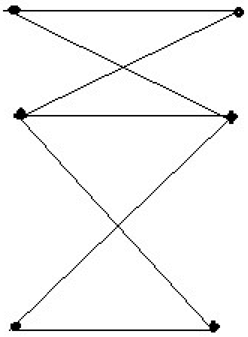


27. Испитати да ли граф има Ојлеров цикл и ако га има наћи га.

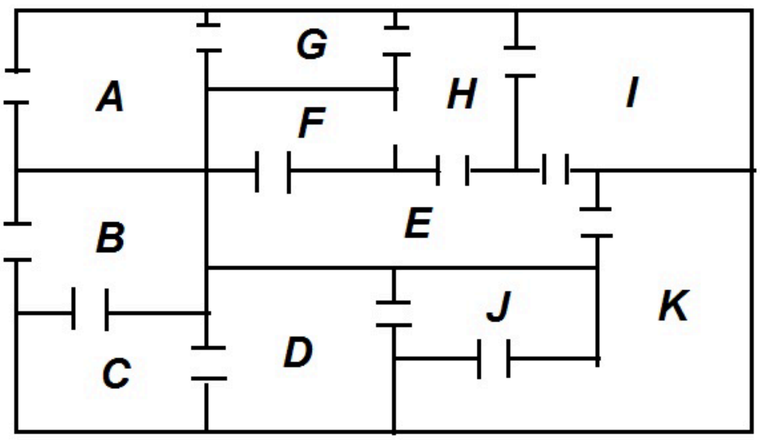




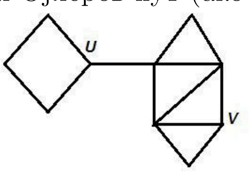


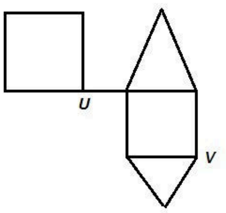


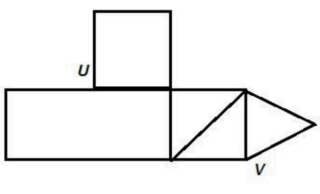
28. (Ојлеров пут) Да ли је могуће наћи пут од почетка A (собе) до краја B собе пролазећи кроз свака врата тачно једном? Наћи тај пут.



29. Одредити Ојлеров пут (ако постоји) од чвора U до чвора V.

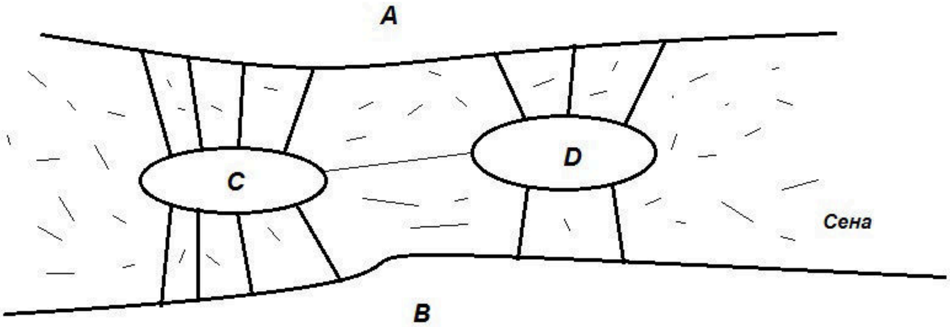






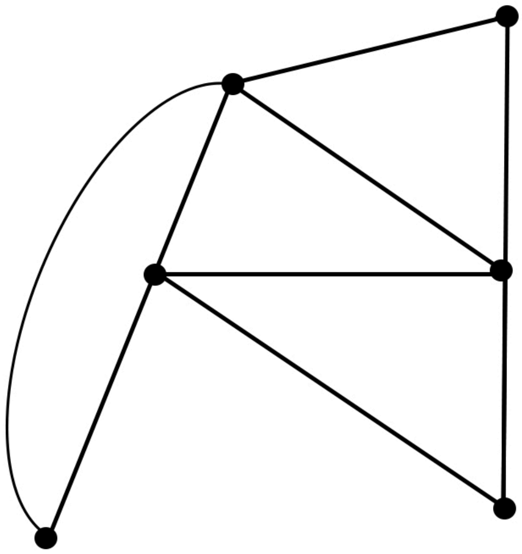
30. (Вратио сам се на Кенинсбершке мостове)

31.(План Париза) Да ли се Париз може обићи тако да преко сваког моста пређемо тачно једном?

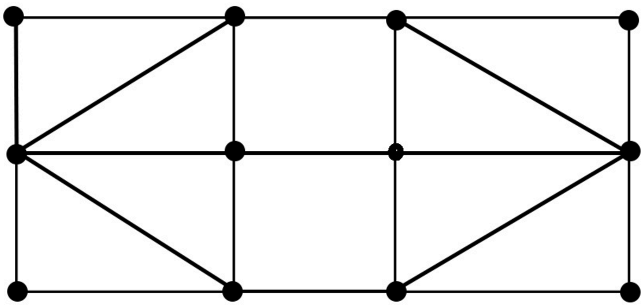


32. (*Fleury*-ев алгоритам)

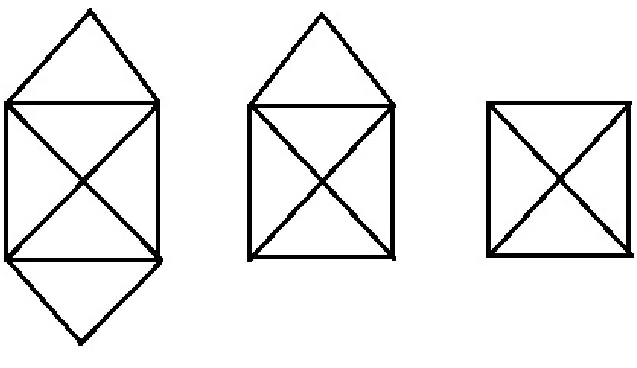
33. Одредити Ојлеров цикл на слици



34. Одредити Ојлеров пут у следећем графу

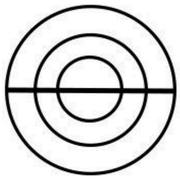


35. (Цртање слике у једном потезу) Граф који има највише два чвора непарног степена може се нацртати у једном потезу. Граф који има $2k$ непарних чворова црта се у k потеза.

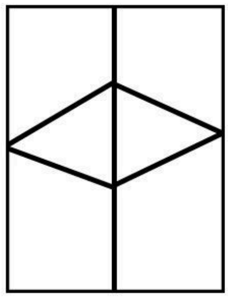


36. Нацртати следеће фигуре у једном потезу (ако је то могуће)

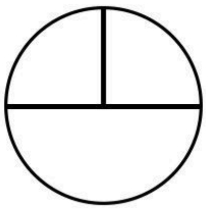
а)



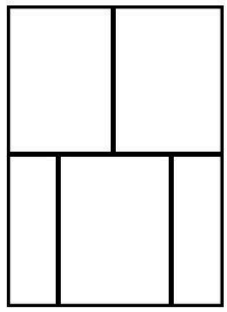
б)



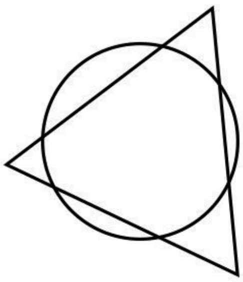
в)



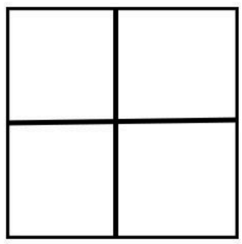
г)



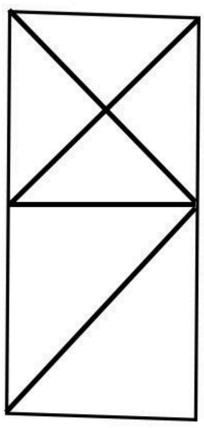
д)



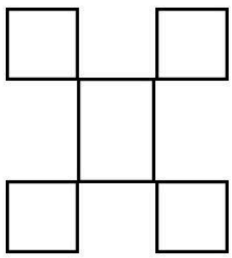
ђ)



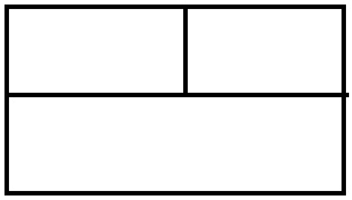
е)



ж)

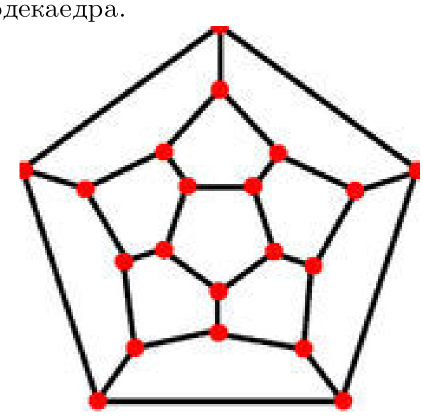


37. Да ли постоји проста затворена линија која пресеца сваку дуж на слици тачно једном?

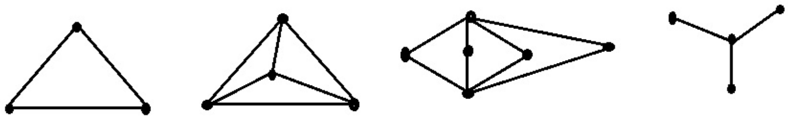


38. (Хамилтонови графови, дефиниција, проблем трговачког путника , $William Hamilton$)

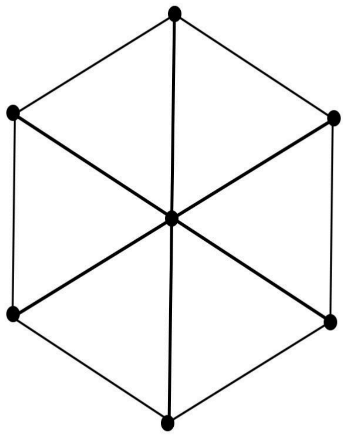
39. "Пут око света" на графу додекаедра.



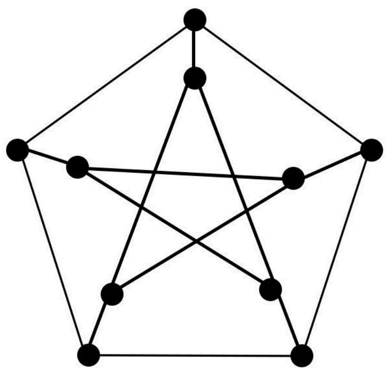
40. Испитати да ли су следећи графови Хамилтонови (Ојлерови)?



41. Испитати да ли граф има Хамилтонов циклус?

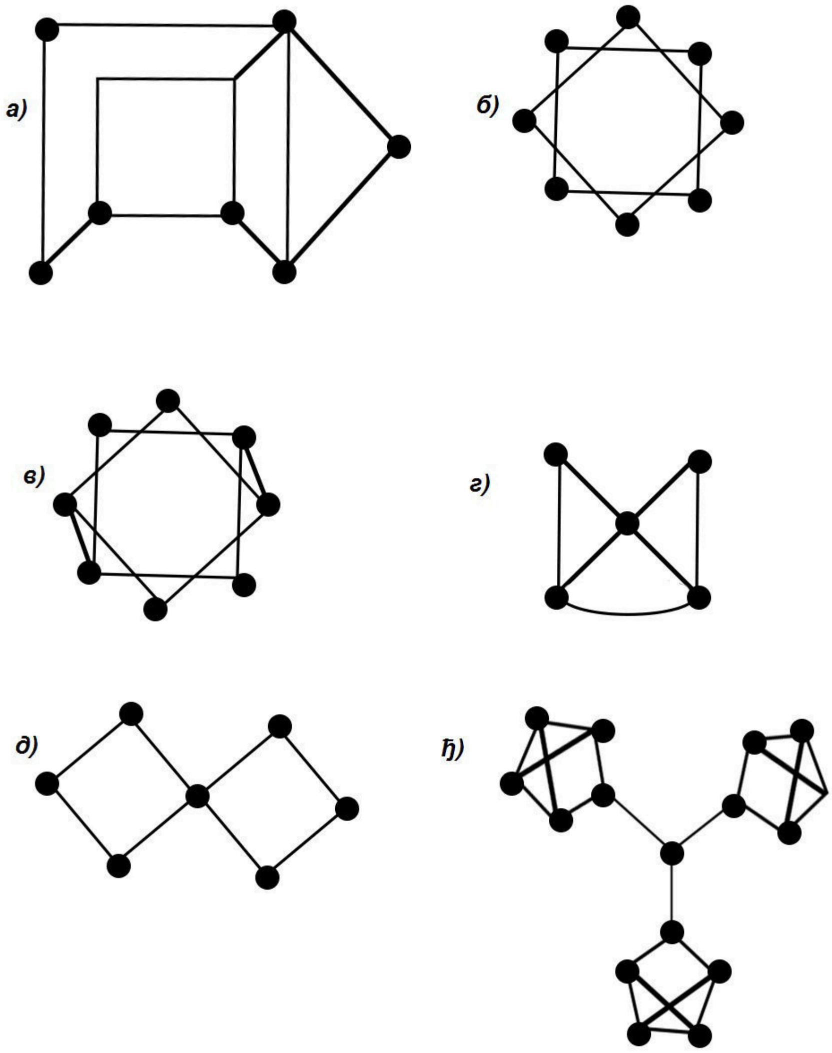


42. Петерсенов граф има Хамилтонов пут али не и Хамилтонов циклус.



43. (Диракова и Ореова теорема)

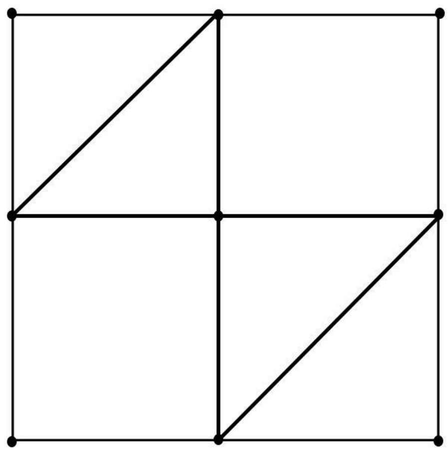
44. Одредити ако постоји Хамилтонов циклус у следећим графовима



45. Ако G има мост онда G нема Хамилтонов цикл. Ако компоненте добијене уклањањем моста имају Хамилтонове циклусе онда G има Хамитонов пут.

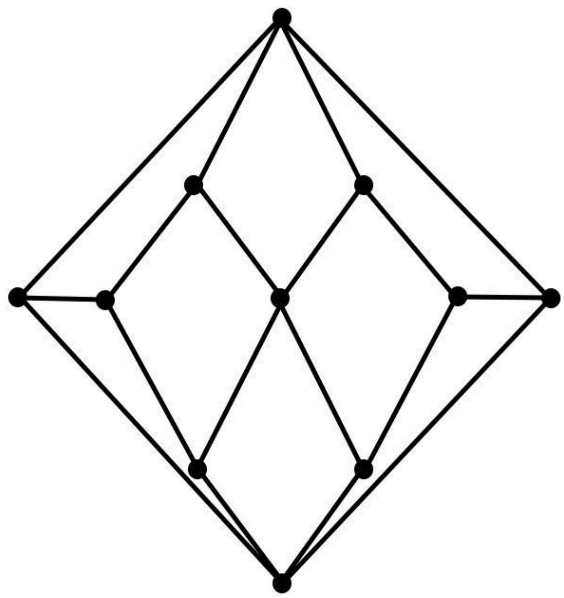
46. Ако у Хамилтоновом графу постоји чвор степена 2, тада обе гране инцидентне са њим морају бити део Хамилтоновог циклуса. Доказати.

47. Да ли је граф на слици Хамилтонов?

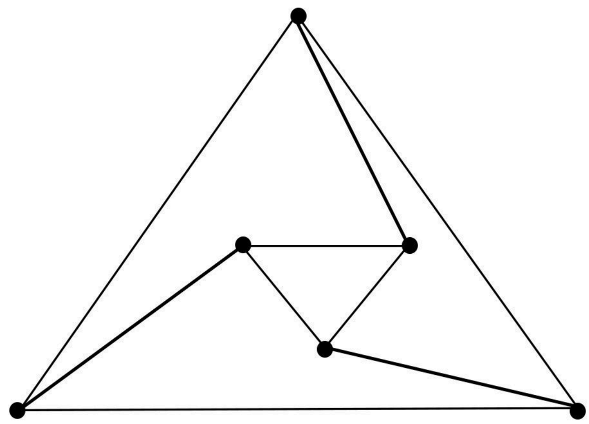


48. Нека је G бипартитан и Хамилтонов чији се скуп чворова V може партиционирати у скупове X и Y. Тада важи $|X| = |Y|$. Доказати.

49. Да ли је *Hershelov* граф Хамилтонов? (користећи претходни задатак)



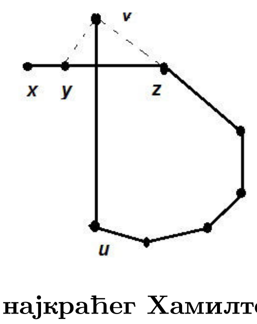
50. Да ли је граф на слици Ојлеров? Да ли је Хамилтонов?



51. Нацртати граф са 6 чворова који има Ојлеров циклус али не и Хамилтонов.

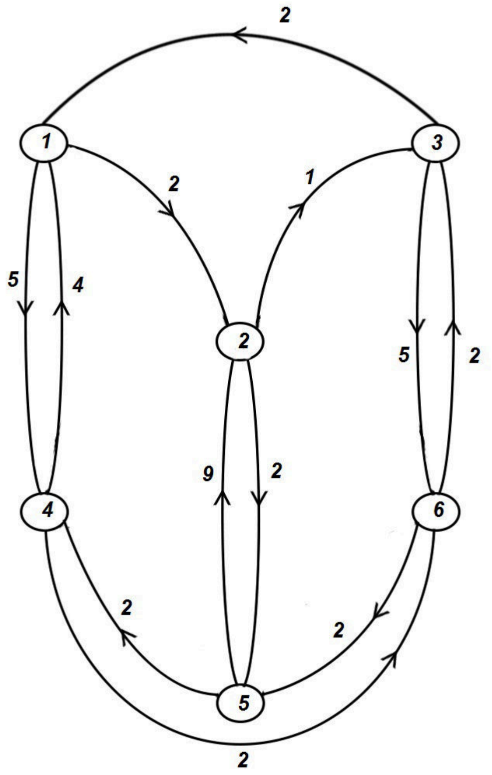
52. (Проблем трговачког путника) Дато је n градова и мрежа путева која их спаја. Трговачки путник треба да обиђе све градове и врати се у полазно место (тако да кроз сваки град прође тачно једном) а да притом пређе најмањи пут. Тразимо минималан Хамилтонов цикл. Навео сам примере како се проблем може решавати генерисањем свих пермутација скупа од n елемената (али је неефикасно), може се формулисати као задатак целобројног програмирања, може се користити алгоритам гранања и ограничавања (који има експоненцијалну сложеност) итд.

Хеуристике Хеуристика базирана на идејама прождрљивог алгоритма не даје добре резултате (конструисао сам пример зашто је то тако)



3-оптимална хеуристика. Налажење најкраћег Хамилтоновог цикла у задатом потпуном тежинском графу. Кораци. Пример

53.

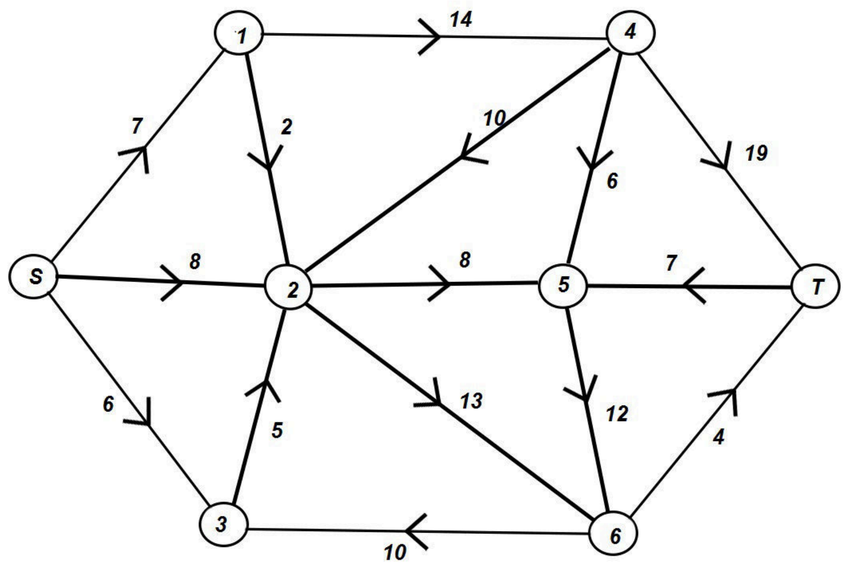


54. Хала правоугаоног облика подељена је на $3x4$ квадратних соба. Из сваке собе може се прећи у суседну собу. Може ли човек да обиђе све собе тако да у свакој буде само једном и да се врати у собу одакле је кренуо?

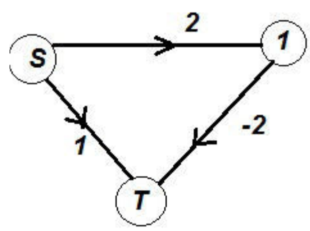
Тежински графови и алгоритми најкраћег пута

Дијсkстрин алгоритам. Добар алгоритам. Временска сложеност. Кораци.

55. Одредити најкраћи пут од чвора S до чвора T у графу на слици.



56. Пример да за негативна растојања Дисјкстрин не ради.

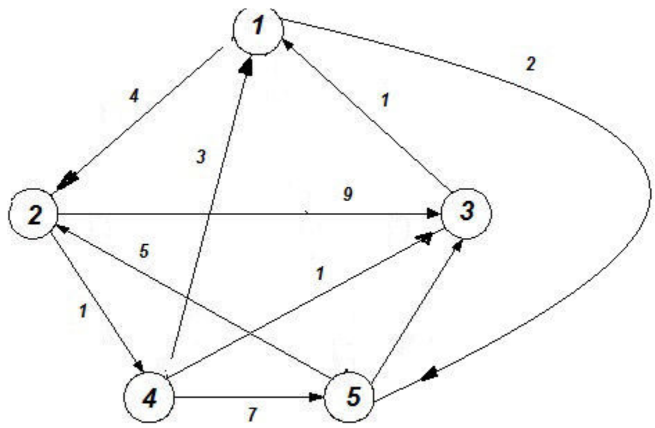


$Belman - Ford$ **-ов алгоритам ради за негативна растојања, спорији од Дисјкстриног. Временска сложеност. Само сам поменуо ово, нисам радио задатке.**

57. Још један пример за Дијкстрин алгоритам.

$Floyd$**-ов или** $Floyd-Warshall$**-ов алгоритам. Налажење најкраћег пута између било која два чвора у графу. Алгоритам. Кораци. Реконструкција пута. Временска сложеност.**

58. Одредити најкраће путеве између свака два чвора у графу. Одредити најкраћи пут између чвора 5 и 1.



Дрво (Стабло) - дефиниција.

Теорема1 Нека G има n чворова. G је дрво акко је повезан и има $n-1$ грану.

Теорема2 Свако дрво има бар 2 цвхора степена 1.

59. Да ли постоји дрво са 10 чворова и 12 грана?

60. Наћи сва неизоморфна стабла са 4 чвора.

61. Нацртати граф са 5 чворова и 4 гране а да није дрво.

62. Да ли наредни графови постоје?

а) Дрво са 9 чворова и 9 грана.

б) Граф без циклова са 9 чворова и 6 грана.

в) Повезан граф са 9 чворова и 9 грана.

г) Дрво са 6 чворова тоталног степена 14.

д) Дрво са 5 чворова тоталног степена 8.

ђ) Повезан граф са 6 чворова, 5 грана и има нетривијалан цикл.

е) Граф са 2 чвора једном граном а није дрво.

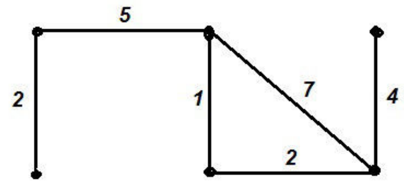
ж) Граф са 7 чворова и 4 гране а без циклова.

з) Граф са 6 чворова и 5 гране а није дрво.

и) Прост повезан граф са 6 чворова и 6 грана.

Разапињуће стабло - је подграф од G **који садржи све чворове од** G **и уз то је још и дрво.**

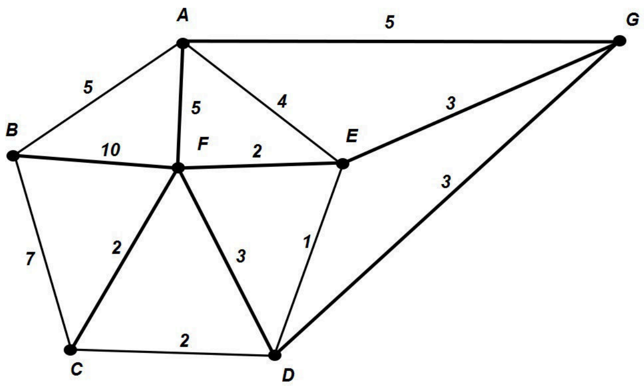
63. Одредити сва растојања разапињућег стабла следећег графа

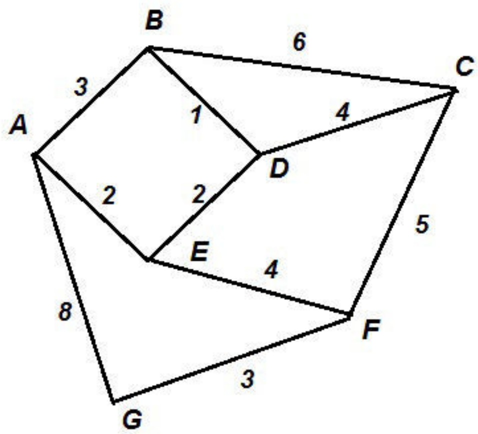


Minimum spaning tree problem - *MST*

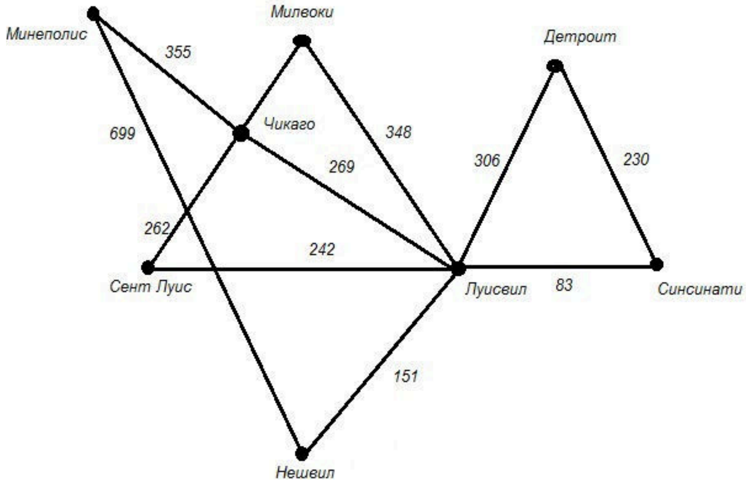
Крускалов алгоритам. Похлепни алгоритам. Кораци.

64. Одредити Крускаловим алгоритмом минимално разапињуће стабло у графовима на слици



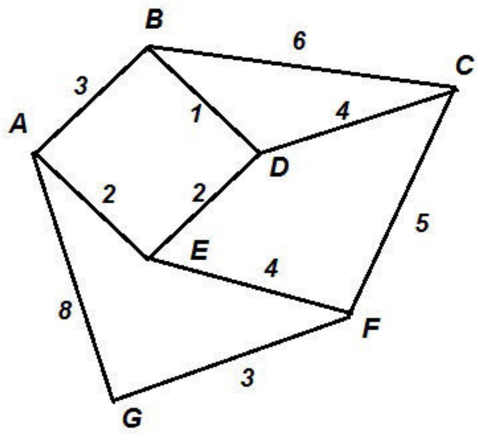


65. Дат је граф путева Федералне авио компаније. Тежине су растојања између градова (у миљама). Авио компанија жели да споји све градове са мапе али да минимизира тоталну километражу. Како то треба да се изведе?



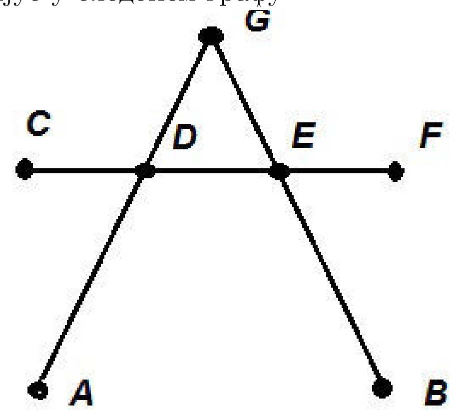
Prim-ов алгоритам. Кораци.

66. Одредити *Prim* - овим алгоритмом минимално разапињуће стабло у графу на слици



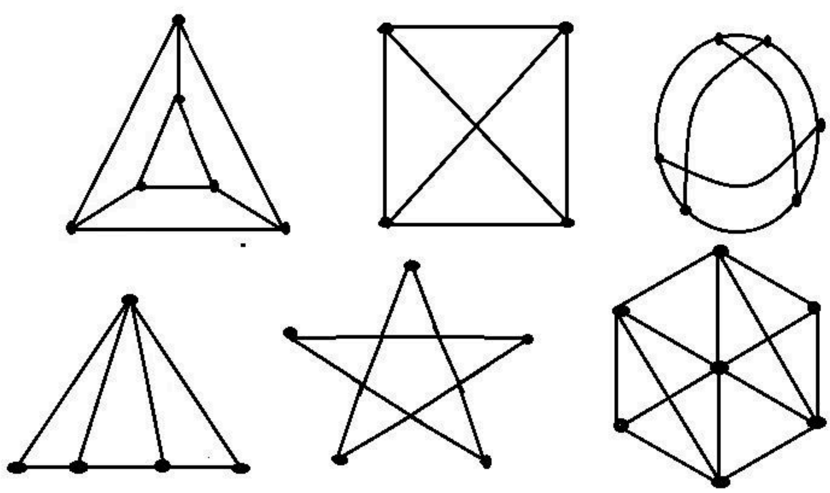
Дефиниција ексцентрицитета чвора у графу. Дефиниција дијаметра и радијуса графа.

67. Одредити дијаметар и радијус у следећем графу



Планарни графови

68. Испититати планарност следећих графова



Тврђење За сваки повезан планаран граф G са $n \geq 3$ чвора важи $3|V| - |E| \geq 6$.

Теорема G је планаран акко не садржи као подграф ни K_5 ни $K_{3,3}$ ни неку њихову потподелу.

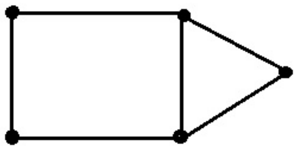
69. Доказати да K_5 није планаран.

Теорема *Vagner*

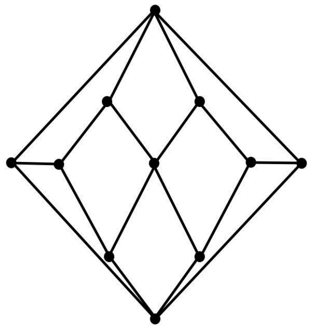
Хроматски број графа. Бојење графа. Хрома тски полином $C_G(\lambda)$, хрома тски број графа, примери

Теорема Граф је бипартитан акко не садржи непарне циклусе. (Сваки бипартитан граф је 2-обојив)

70. Пример за 3- обојив граф.



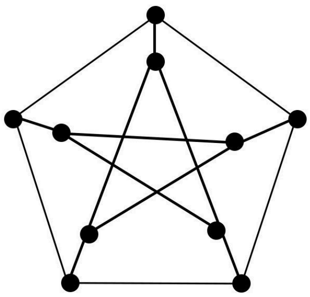
71. *Hershel*-ов граф је 2-обојив.



Тврђење За сваки граф G је $\gamma \leq \Delta + 1$.

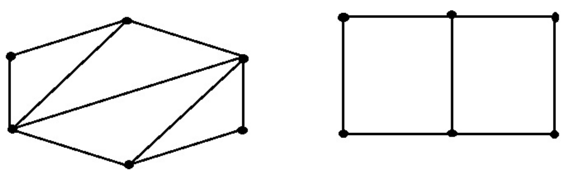
Теорема-*Brooks* Ако је G прост повезан, није потпун нити је непаран циклус, онда је $\gamma(G) \leq \Delta$.

72. Петерсенов граф је 3 - обојив.

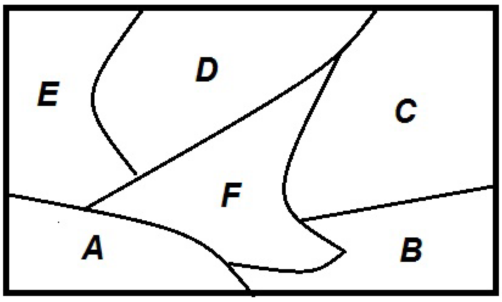


Похлепни алгоритам за бојење графова - примена у рачунарству. Пример.

73. Обојити следеће графове



74. Обојити следећу карту тако да никоје две суседне земље нису обојене истом бојом.



Представљање графова у рачунару. Матрице суседства код усмереног и неусмереног графа. Матрице инциденције код усмереног и неумсереног графа.

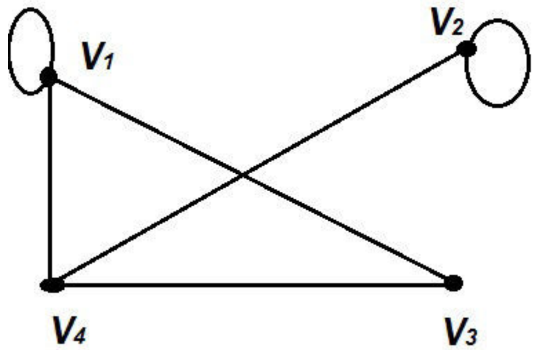
75. Нацртати граф дат матрицом суседства (матрица није симетрична)

0	1	1	0
1	1	0	2
0	0	1	1
2	1	0	0

76. Нацртати граф дат матрицом суседства (матрица је симетрична)

1	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

77. Одредити матрицу инциденције за граф

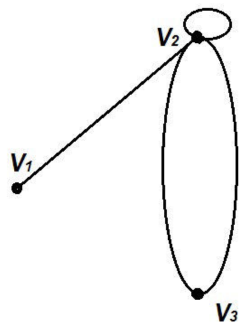


78. За дату матрицу инциденције одредити матрицу суседства.

-1	1	0	-1	0	0
0	0	1	0	1	0
0	0	-1	0	0	-1
1	-1	0	1	-1	0
0	0	0	0	0	1

Став Нека је A матрица суседства графа G. Тада је (i, j)-ти члан матрице A^k једнака броју (v_i, v_j) шетњи у G дужине k. Број свих шетњи дужине k једнак је суми свих чланова од A^k.

79. За дати граф G одредити матрицу суседства $A(G)$ и наћи све шетње дужине 2 између било која два чвора.



V_2
V_1
V_3