Metod grananja i ograičavanja

- Najelementarniji način za rešavanje problem optimizacije na končanom skupu je pretraživanje. Ovaj postupak može biti jako dug za veći broj ulaznih podataka i zato su razvijene metode koje će pomoću procena eliminisati neke delove pretrage i brže doći do traženog rešenja.
- Metoda grananja i ograničavanja jedna je od opštih metoda pretraživanja.
- Ideja metode je da se problemi razlože na prostije potprobleme i da se mnogi od ovih potrpoblema ni ne rešavaju ako se proceni da nemaju bolje rešenje od trenutno najboljeg rešenja. Do trenutno najboljeg rešenja se može doći neposrednom proverom ili nekim heurističkim postupcima u toku algoritma.
- Prvi put se pojavila 1960.godine kao ideja za rešavanje problema celobrojnog linearnog programiranja.
- Loša osobina metode je nepolomijalnost.
- Dobra osobina je što se, u praksi, ova metoda zavprava u dopustivoj tački koja je blizu rešenja.

Problem:

$$\min f(x), x \in X \qquad (P)$$

$$X - diskretan\ skup$$

Rešenje:

Problem *P* razlažemo na potprobleme u nadi da se neki od njegovih potproblema neće ni rešavati ako se proceni da ne mogu imati bolje rešenje od trenutno najboljeg rešenja (rekorda). Drugim rečima, očekuje se da funkcija cilja na tim potproblemima ne može uzimati manje vrednosti u odnosu na vrednosti koje su do tada dobijene kao dopustivo rešenje problema *P*.

Razlaganje problema *P* na potprobleme se može vršiti tako što se skup *X* pokrije unijom svojih delova $X_k, k \in K$ i problem *P* zameni skupom problema (potproblema)

$$\min f(x), x \in X_k \qquad (P_k)$$

Optimalno rešenje polaznog problema je optimalno za bar jedan problem s spiska.
Razlaganje skupa *X* na podskupove X_k je pogodno zato što skupovi X_k mogu biti dovoljno sitni ili laki za rešavanje, pa se vrednost funkcije na njima može lakše oceniti.
U slučaju da je potproblem P_k težak za rešavanje, možemo da ga olakšamo izostavljanjem nekih ograničenja (umesto funkcije $f(x)$ posmatramo funkciju $g(x)$ u kojoj je neko ograničenje izostavljeno) ili proširivanjem njegovog dopustivog skupa X_k na neki skup Y_k. Novodobijeni problem nazivamo relaksacionim problemom i obeležavamo sa:

$$\min g(x), x \in Y_k \qquad (Q_k)$$

Optimalna vrednost relaksacionog problema Q_k nije veća od optimalne vrednosti problema P_k, tj važi:

$$v(Q_k) \leq v(P_k)$$

U idealnom slučaju optimalne vrednosti su jednake i početni problem je rešen.

Ako problem nije rešen, dobijamo ocenu odozdo $m(Q_k) = v(P_k)$ njegove optimalne vrednosti. Neka je, npr. trenutno najbolje pronađeno rešenje *M* ili je najbolje rešenje ograničeno sa *M*:

$$m(P_k) \geq M$$

i u skupu X_k nema rešenja koje je bolje od onog koje smo dobili kao tekući rekord zato što je

$$v(P_k) \geq m(P_k) \geq M \geq v(P)$$

Onog trenutka, kada procenimo da nam problem P_k neće dati bolja rešenja od tekućih, možemo da pređemo na sledeći potproblem a njega da eliminišemo sa spiska potproblema.

Na opisan način obrađujemo sve potprobleme sa spiska potproblema:

Dakle, proces rešavanja problema *P* ide po sledećem algoritmu:

KORAK 1 Podelimo problem *P* na skup potproblema $P_k,\ k \in K.$ Neka je *S* spisak tih problema. Trenutna vrednost problema *P* je $v(P) = \infty$ ako je problem nemoguć ili $v(P) = -\infty$ ako je vrenost problema neograničena odozdo. Donju ocenu optimalne vrednosti problema obeležimo sa $m(P)$. Odnosno:

$$S = \{(P)\}, \qquad m(P) = -\infty, \qquad M = \infty$$

KORAK 2 Rešavamo potproblem P_k sa spiska *S* na sledeći način:

Izračunamo $m(P_k)$ tako što računamo neku relaksaciju problema P_k. Ako je $m(P_k) \geq M$ idemo na korak6, inače se ide na korak 3.

KORAK 3 Tražimo dopustivi skup rešenja: Ako je skup lak za rešavanje, tražimo odgovarajuće $\bar{x}$ kao rešenje problema *P*. Ako je $f(\bar{x}) \geq M$ ili ako je nalaženje rešenja teško ići na korak5, inače ići na korak4.

KORAK 4 Stavimo da je $M = f(\bar{x})$. Ako je $M = -\infty$ zaustavljamo se i stavljamo da je $v(P) = -\infty$. Ako je *M* konačno i ako se može pokazati da je $\bar{x}$ optimalno rešenje potproblema P_k idemo na korak6. Inače idemo na korak5.

KORAK 5 Pošto nam je potproblem P_k težak za rešavanje, granamo ga na potprobleme $(Q_1), (Q_2), \ldots, (Q_p)$ i vraćamo se na korak 1.

KORAK 6 Uklonimo problem P_k sa spiska *S*. Ako se spisak problema ispraznio postupak se prekida. Optimalna vrednost problema jednaka je trenutnom rekordu *M* ukoliko je *M* konačan broj, a problem nema dopustivih rešenja ako je $M = \infty$. Ako se spisak ne isprazni, ići na korak 1.

U svakom grananju generiše se samo konačan broj potproblema i ako se oni nikada ne ponavljaju, algoritam se posle konačno mnogo iteracija završava nalaženjem optimalnih vrednosti i rešenja polaznog problema.

Ovaj postupak se najlakše može prikazati preko grafa čiji su čvorovi dobijeni grananjem. Dobijeni graf nazivamo drvetom pretraživanja u kome je koren polazni problem a listovi najsitniji problemi (problemi koji ne mogu dati bolje rešenje daljim grananjem).

Pri izboru problema za grananje, postoje dve osnovne taktike:

- Grananje u širinu
- Grananje u dubinu (LIFO strategija)

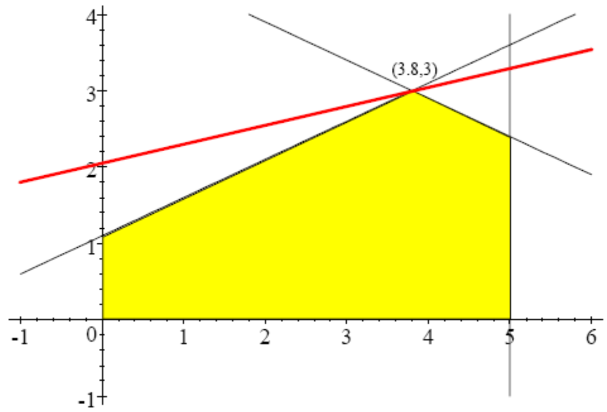
PRIMER 67

Rešiti problem metodom grananja i ograničavanja:

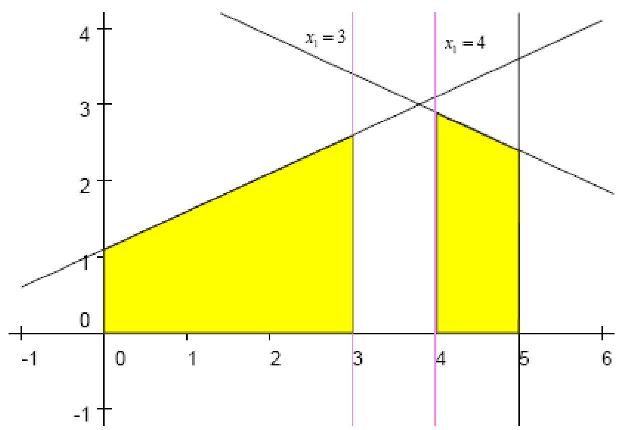
$$\max \ -x_1 + 4x_2$$
$$-10x_1 + 20x_2 \leq 22$$
$$5x_1 + 10x_2 \leq 49$$
$$x_1 \leq 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

REŠENJE:

Problem možemo rešavati simpleks ili grafičkom metodom.



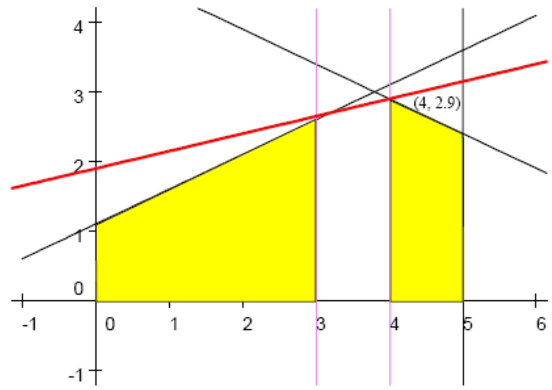
Rešenje datog problema je $(x_1, x_2) = (3.8, 3)$, $f_{max} = 8.2$. Obzirom da rešenje nije celobrojno, posmatramo dve relaksacije: $x_1 \geq 4, x_1 \leq 3$



Relaksacija problema je

$$\max \ -x_1 + 4x_2$$
$$-10x_1 + 20x_2 \leq 22$$
$$5x_1 + 10x_2 \leq 49$$
$$x_1 \leq 5$$
$$x_1 \geq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Optimalno rešenje $(x_1, x_2) = (4, 2.9)$, $f_{max} = 7.6$



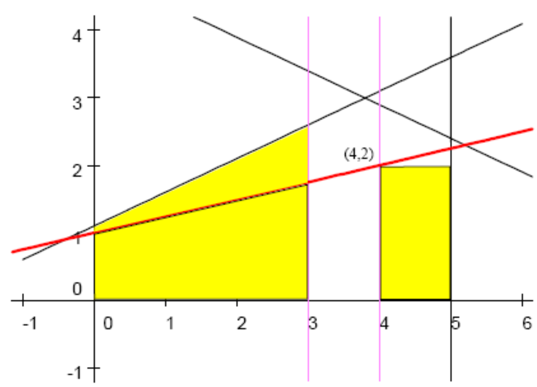
Rešenje nije celobrojno, pa pravimo novu relaksaciju za drugu koordinatu ($x_2 \geq 3, x_2 \leq 2$). Neka je $x_2 \geq 3$. Rešavamo sledeću relaksaciju:

$$\max \quad -x_1 + 4x_2$$
$$-10x_1 + 20x_2 \leq 22$$
$$5x_1 + 10x_2 \leq 49$$
$$4 \leq x_1 \leq 5$$
$$x_2 \geq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Medjutim, imajući u vidu da je $x_1 \geq 4$ i da je $x_2 \geq 3$, zbog uslova $5x_1 + 10x_2 \leq 49$, ovakva relaksacija nema dopustivih rešenja. Uzećemo, dakle, da je $x_2 \leq 2$. Posmatramo sledeću relaksaciju početnog problema

$$\max \quad -x_1 + 4x_2$$
$$-10x_1 + 20x_2 \leq 22$$
$$5x_1 + 10x_2 \leq 49$$
$$4 \leq x_1 \leq 5$$
$$0 \leq x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Rešavamo problem grafičkom metodom i dobijamo da je optimalno rešenje $(x_1, x_2) = (4,2)$, $f_{max} = 7$.

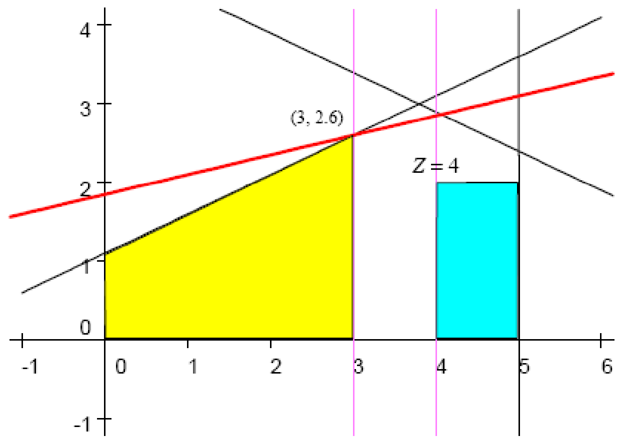


Dobijeno rešenje je (za sada) optimalno rešenje.

Vraćamo se na početnu podelu i drugu relaksaciju:

$$\max \quad -x_1 + 4x_2$$
$$-10x_1 + 20x_2 \leq 22$$
$$5x_1 + 10x_2 \leq 49$$
$$0 \leq x_1 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

koji ima rešenje $(x_1, x_2) = (3{,}2.6)$, $f_{max} = 7.4$.



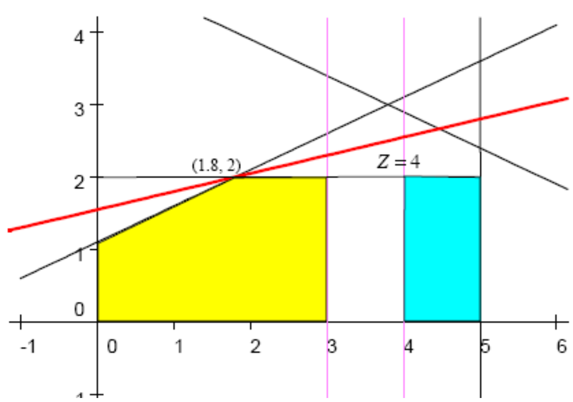
Daljim grananjem dobijamo ograničenja $x_2 \leq 2, x_2 \geq 3$. Posmatramo relaksacije ovog problema:

$$\begin{gathered} \max \quad -x_1 + 4x_2 \\ -10x_1 + 20x_2 \leq 22 \\ 5x_1 + 10x_2 \leq 49 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{gathered}$$

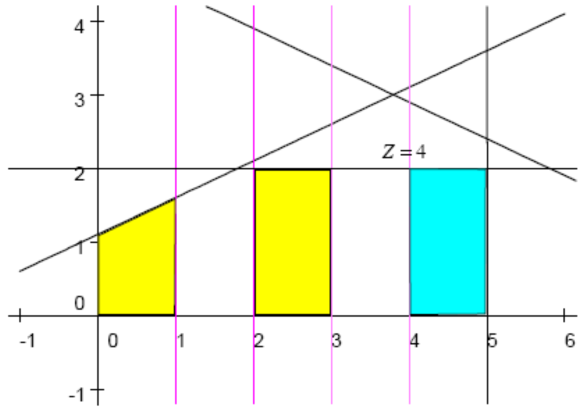
Prva relaksacija nema dopustivo rešenje *(*$-10x_1 + 20x_2 \geq 30$) tako da ovaj potrpoblem više ne posmatramo.
Posmatramo drugu linearnu relaksaciju

$$\begin{gathered} \max \quad -x_1 + 4x_2 \\ -10x_1 + 20x_2 \leq 22 \\ 5x_1 + 10x_2 \leq 49 \\ 0 \leq x_1 \leq 3 \\ 0 \leq x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{gathered}$$

Druga relaksacija ima rešenje $(x_1, x_2) = (1.8{,}2)$, $f_{\max} = 6.2$.



Daljim grananjem dobijamo dva nova uslova: $x_1 \geq 2, x_1 \leq 1$



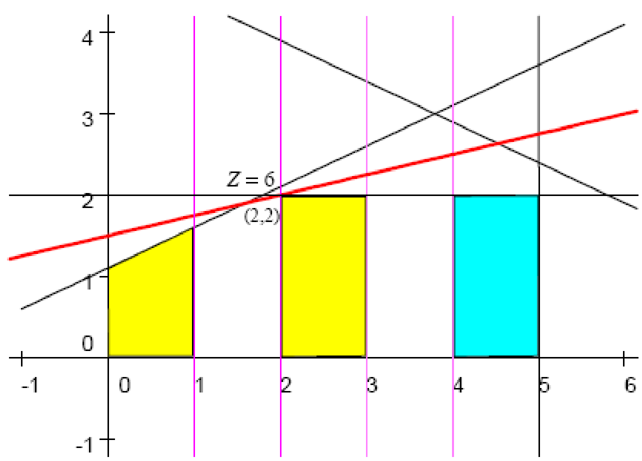
Nova linearna relaksacija je

$$\begin{gathered}\max \quad -x_1 + 4x_2 \\ -10x_1 + 20x_2 \leq 22 \\ 5x_1 + 10x_2 \leq 49 \\ 2 \leq x_1 \leq 3 \\ 0 \leq x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0\end{gathered}$$

Koja ima rešenje $(x_1, x_2) = (2,2), f_{max} = 6$. Ovo rešenje je bolje od prethodnog.
Druga relaksacija daje problem

$$\begin{gathered}\max \quad -x_1 + 4x_2 \\ -10x_1 + 20x_2 \leq 22 \\ 5x_1 + 10x_2 \leq 49 \\ 0 \leq x_1 \leq 1 \\ 0 \leq x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0\end{gathered}$$

Čije rešenje je $(x_1, x_2) = (1,1.6), f_{max} = 5.4$.



Kako je ovo rešenje lošije od do sada postignutog, nećemo dalje relaksirati problem.

PRIMER 68

Rešiti problem

$$\max 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

pri ograničenjima

$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10$$
$$-x_3 + x_4 \leq 1$$
$$-x_1 + x_3 \leq 0$$
$$-x_2 + x_4 \leq 0$$
$$x_i \in \{0,1\}, i = 1, . . ,4$$

Rešenje:

Posmatrani problem rešavaćemo simplex metodom. Nakon što funkciju cilja prevedemo na min i dodamo izjednačavajuće promenljive, primenjujemo simplex metodu. Primenom simplex metode dobija se da je rešenje posmatranog problema $f = 16.5$, $x_1 = \frac{5}{6}, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1$

Rešenje je necelobrojno, razlikujemo sledeće slučajeve $x_1 = 0, x_1 = 1$

1) $x_1 = 0$

Početni problem dobija sledeći oblik ($x_3 = 0$ zbog uslova $-x_1 + x_3 \leq 0$):

$$\max 5x_2 + 4x_4$$

pri ograničenjima

$$3x_2 + 2x_4 \leq 10$$
$$x_4 \leq 1$$
$$-x_2 + x_4 \leq 0$$
$$x_i \in \{0,1\}, i = 2,4$$

Rešenje novog problema je $f = 9$ i dostiže se za $x_2 = 1, x_4 = 1$ (dobijeno rešenje je trenutno najbolje rešenje).

2) $x_1 = 1$

Početni problem dobija sledeći oblik

$$\max 9 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

pri ograničenjima

$$3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 4$$
$$x_3 + x_4 \leq 1$$
$$-x_2 + x_4 \leq 0$$
$$x_i \leq 1, i = 2,3,4$$

Rešenje problema je $f = 16.2$ i dobija se za $x_1 = 1, x_2 = 0.8, x_3 = 0, x_4 = 0.8$.

Pošto dobijeno rešenje nije celobrojno, postupak grananja se nastavlja.

2.1) $x_1 = 1, x_2 = 0$

Zbog uslova $-x_2 + x_4 \leq 0$ mora da važi $x_4 = 0$, tako da se dalje rešava sledeći problem

$$\max 9 + 6x_3$$

pri ograničenjima

$$5x_3 \leq 4$$
$$x_3 \leq 1$$
$$x_3 \in \{0,1\}$$

Rešenje ovog problema je $f = 13.8$ i dobija se za $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0.8, \; x_4 = 0$.

Rešenje nije celobrojno, postupak granjanja se nastavlja.

2.1.1) $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$

U ovom slučaju se dobija da je $x_4 = 0$ i da je $f = 9$, međutim dobijeno rešenje nije bolje od trenutno najboljeg rešenja.

2.1.2) $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$

Slučaj 2.1.2 nije dopustiv.

2.2) $x_1 = 1, x_2 = 1$

Posmatramo problem

$$\max 14 + 6x_3 + 4x_4$$

pri ograničenjima

$$5x_3 + 2x_4 \leq 4$$
$$x_3 + x_4 \leq 1$$
$$x_4 \leq 0$$
$$x_i \leq 1, i = 3,4$$

Rešenje ovog problema je $f = 16$ za $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0.5$. Rešenje nije celobrojno, granjanje se nastavlja.

2.2.1) $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$

Kao rešenje problema dobija se da je $f = 16$, ali za $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0.5$

Dobijeno rešenje nije celobrojno, razlikujemo slučajeve u odnosu na vrednosti promeljive x_4

2.2.1.1) $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0$

Rešenje problema je $f = 14$ (trenutno najbolje rešenje)

2.2.1.2) $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1$

Nije dopustivo rešenje.

2.2.2.) $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$

Nije dopustiv problem.

Primetimo sledeće: za $x_1 = 0$ se dobija da je vrednost funkcije cilja $f = 9$, dok smo za $x_1 = 1$ (i sve kombinacije vrednosti ostalih promenljivih) dobiti rešenje $f = 14$. Budući da je za $x_1 = 1$ nađeno rešenje koje ima veću vrednost od 9, nema potrebe da se računaju ostali podslučajevi slučaja 1) jer se ni za jednu kombinaciju vrednosti ne može dobiti rešenje koje će imati vrednost veću od 9. Dakle, rešenje $f = 14$ je optimlano rešenje polaznog problema.

PRIMER 69

Rešiti problem

$$\begin{aligned} max \quad & 12\mathrm{x}_1 + 8x_2 + 7x_3 + 6x_4 \\ & 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 15 \\ & x_i = \{0,1\} \end{aligned}$$

Rešenje:

Polazeći od promenljive x_1 razlikujemo dva slučaja:

1. $x_1 = 1$

Posmatrani problem je sada obllika $\max 12 + 8x_2 + 7x_3 + 6x_4$ pri ograničenju $6x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 7$.

Sada se u odnosu na vrednosti promenljive x_2 mogu razlikovati dva slučaja:

1.1 $x_2 = 1$

Polazni problem je sada oblika $\max 20 + 7x_3 + 6x_4$ pri ograničenju $5x_3 + 4x_4 \leq 1$

U odnosu na vrednosti promenljive x_3 razlikovaćemo takođe dva slučaja

1.1.1 $x_3 = 1$

Dobija se problem $\max 27 + 6x_4$ pri ograničenju $4x_4 \leq -4$ koji je nedopustiv.

Dakle, rešenje (1,1,1,c) je nedopustivo za sve vrednosti parametra c, $c \in \{0,1\}$.

1.1.2 $x_3 = 0$

Dobija se problem $\max 20 + 6x_4$ pri ograničenju $4x_4 \leq 1$.

Poslednji problem je dopustiv jedino u slučaju da je $x_4 = 0$. Dakle, za (1,1,0,0) početni problem ima rešenje $f = 20$. Ovo rešenje je trenutno najbolje rešenje.

1.2 $x_2 = 0$

Polazni problem je sada oblika $\max 12 + 7x_3 + 6x_4$ pri ograničenju $5x_3 + 4x_4 \leq 7$.

U odnosu na vrednosti promenljive x_3 razlikuju se sledeći slučajevi:

1.2.1 $x_3 = 1$

Dobija se problem $\max 19 + 6x_4$ pri ograničenju $4x_4 \leq 2$.

Ovaj problem ima jedno dopustivo rešenje: $(1,0,1,0)$, $f = 19$

1.2.2 $x_3 = 0$

Dobija se problem $\max 12 + 6x_4$ koji bi u najboljem slučaju imao rešenje 18, a kako je to manja vrednost od trenutno pronađene najveće vrednosti funkcije f ovaj slučaj dalje neće biti razmatran.

Najzad, rešenje polaznog problema je 20.

Metod implicitnog prebrojavanja (testovi nedopustivosti i neoptimalnosti)

- Metoda implicitnog prebrojavanja predstavlja specijalan slučaj metode granjanja i ograničavanja. Koristi se za probleme LP definisane na sledeći način:

$$\min f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \le 0, \ i = 0,1,..,m$$
$$x_j \in K_j, j = 1,2,..,n$$

gde su $K_j, j = 1,2,..,n$ konačni brojevni skupovi. Grananje se vrši fiksiranjem mogućih vrednosti izabrane promenljive x_j iz skupa K_j, pa tako svakom problemu sa spiska odgovara delimično rešenje kod koga neke promenljive $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_k}$ imaju fiksiranu vrednost, dok su ostale nefiksirane (nefiksirane promenljive obeležavamo sa *). Umesto relaksacija, za donju ocenu optimalne vrednosti problema sa spiska, koristi se neposredna ocena.
Ovu metodu ćemo dalje objasniti na primeru.

PRIMER 75

Metodom implicitnog prebrojavanja rešiti problem:

$$\min f(x_1, x_2, x_3, x_4) = -4x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4$$
$$g_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4, \quad g_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \le 5$$
$$g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4, \quad g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \le 7$$
$$g_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4, \quad g_3(x_1, x_2, x_3, x_4) \le 6$$
$$x_i \in \{0,1\}, i = 1, \dots, 4$$

Rešenje:
Početni problem je minimizacija funkcije f pri datim ograničenjima za g_i, $i = 1,2,3$ i uslova $x_i \in \{0,1\}$. Donja ocena za funkciju cilja je $f(x_1, x_2, x_3, x_4)_- = f(1,1,1,1) = -4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -12$.
Testiramo da li je ovo rešenje dopustivo tako što računamo donje ocene za donja ograničenja g_{i-} funkcija g_i:

$$g_1(1,1,0,0) = g_{1-} = -4, \quad -4 \le 5$$
$$g_2(0,0,1,0) = g_{2-} = -2, \quad -2 \le 7$$
$$g_3(0,0,0,1) = g_{3-} = -1, \quad -1 \le 6$$

Početni problem je prošao test nedopustivosti (najmanje moguće vrednosti početnih ograničenja se mogu zadovoljiti za neke vrednosti x_i).

Sada početni problem možemo da granamo na dva potproblema:

1. $x_1 = 1$
2. $x_1 = 0$

Biramo ova dva slučaja zato što tražimo minimum funkcije f a ona najbrže opada po upravo promenljivoj x_1.
U zavisnosti od vrednosti promenljive x_1 funkcija cilja ima vrednosti $f_- = -12$ ($f(1,1,1,1)$ ili $f_- = -8$ ($f(0,1,1,1)$).
Proveravamo dopustivost rešenja u zavisnosti od vrednosti promenljive x_1.

1. $x_1 = 1$

   Proveravamo da li postoji neko dopustivo rešenje kod koga je $x_1 = 1$.

$$g_1(1, x_2, x_3, x_4) = -2 - 2x_2 + x_3 + 4x_4: \quad g_{1-} = -4, \quad -4 \le 5$$
$$g_2(1, x_2, x_3, x_4) = 2 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4: \quad g_{2-} = 0, \quad 0 \le 7$$
$$g_3(1, x_2, x_3, x_4) = 1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4: \quad g_{3-} = 0, \quad 0 \le 6$$

Sa obzirom da postoji dopustivo rešenje kod koga je $x_1 = 1$, optimalno rešenje tražimo kao rešenje sledećih potproblema:

1.1. $x_2 = 1$

U ovom slučaju funkcija cilja može da ima vrednost -12. Proveravamo dopustivost potencijalnog rešenja:

$g_1(1,1,x_3,x_4) = -4 + x_3 + 4x_4$: $g_{1\_} = -4$, $-4 \le 5$

$g_2(1,1,x_3,x_4) = 5 - 2x_3 + 5x_4$: $g_{2\_} = 3$, $3 \le 7$

$g_3(1,1,x_3,x_4) = 5 + 5x_3 - x_4$: $g_{3\_} = 4$, $4 \le 6$

Rešenje $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ je dopustivo.

1.1.1. $x_3 = 1$

Za $x_1 = 1, x_2 = 1$ i $x_3 = 1$ funkcija cilja je odozdo ograničena sa -12 ($f_- = -12$).

$g_1(1,1,1,x_4) = -3 + 4x_4$, $g_{1\_} = -3$, $-3 \le 5$

$g_1(1,1,1,x_4) = 3 + 5x_4$, $g_{2\_} = 3$, $3 \le 7$

$g_1(1,1,1,x_4) = 10 - x_4$, $g_{3\_} = 9$, $9 \le 6$!!!!

Rešenje za $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ i $x_3 = 1$ nije dopustivo rešenje početnog problema.

1.1.2. $x_3 = 0$

Za $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ i $x_3 = 0$ funkcija cilja je ograničena odozgo sa -9

$g_1(1,1,0,x_4) = -4 + 4x_4$, $g_{1\_} = -4$, $-4 \le 5$

$g_1(1,1,0,x_4) = 5 + 5x_4$, $g_{2\_} = 5$, $5 \le 7$

$g_1(1,1,0,x_4) = 5 - x_4$, $g_{3\_} = 4$, $4 \le 6$

Ovo rešenje jeste dopustivo. Sada rešavamo problem za nova dva slučaja:

1.1.2.1. $x_4 = 1$

Za $x_4 = 1$ funkcija f je ododo ograničena sa -9.

Proveravamo dopustivost rešenja za promenljivu x_4:

$g_1(1,1,0,1) = 0$, $g_{1\_} = 0$, $0 \le 5$

$g_1(1,1,0,1) = 10$, $g_{2\_} = 10$, $10 \le 7$!!!!

$g_1(1,1,0,1) = 4$, $g_{3\_} = 4$, $4 \le 6$

Rešenje za $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ i $x_4 = 1$ nije dopustivo.

1.1.2.2. $x_4 = 0$

Za $x_4 = 0$ funkcija f je ododo ograničena sa -7. Rešenje $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ i $x_4 = 0$ je dopustivo:

$g_1(1,1,0,0) = 0$, $g_{1\_} = -4$, $-4 \le 5$

$g_1(1,1,0,0) = 10$, $g_{2\_} = 5$, $5 \le 7$

$g_1(1,1,0,0) = 4$, $g_{3\_} = 5$, $5 \le 6$

1.2. $x_2 = 0$

Kada je $x_1 = 1, x_2 = 0$ funkcija f je odozdo ograničena sa -9. Rešenje je $x_1 = 1$ i $x_2 = 0$ je dopustivo:

$g_1(1,0,x_3,x_4) = -2 + x_3 + 4x_4$: $g_{1\_} = -4$, $-4 \le 5$

$g_2(1,0,x_3,x_4) = 2 - 2x_3 + 5x_4$: $g_{2\_} = 0$, $0 \le 7$

$g_3(1,0,x_3,x_4) = 1 + 5x_3 - x_4$: $g_{3\_} = 0$, $0 \le 6$

1.2.1. $x_3 = 1$

U ovom slučaju funkcija cilja može dostići vrednost -9.

$g_1(1,0,1,x_4) = -1 + 4x_4$: $g_{1\_} = -1$, $-1 \le 5$

$g_2(1,0,1,x_4) = 5x_4$: $g_{2\_} = 0$, $0 \le 7$

$g_3(1,0,1,x_4) = 6 - x_4$: $g_{3\_} = 5$, $5 \le 6$

Rešenje $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$ je dopustivo.

1.2.1.1. Slučaj kada je $x_4 = 1$

Slučaj $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1$ je dopustiv. $f_{\_} = -9$.

1.2.1.2. Slučaj kada je $x_4 = 0$

Slučaj $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0$ je dopustiv, $f_{\_} = -7$.

1.2.2. $x_3 = 0$

Funkcija je odozdo ograničena sa -6. Rešenje je dopustivo.

$g_1(1,0,0,x_4) = -2 + 4x_4$: $g_{1\_} = -2$, $-2 \leq 5$

$g_2(1,0,0,x_4) = 2 + 5x_4$: $g_{2\_} = 2$, $2 \leq 7$

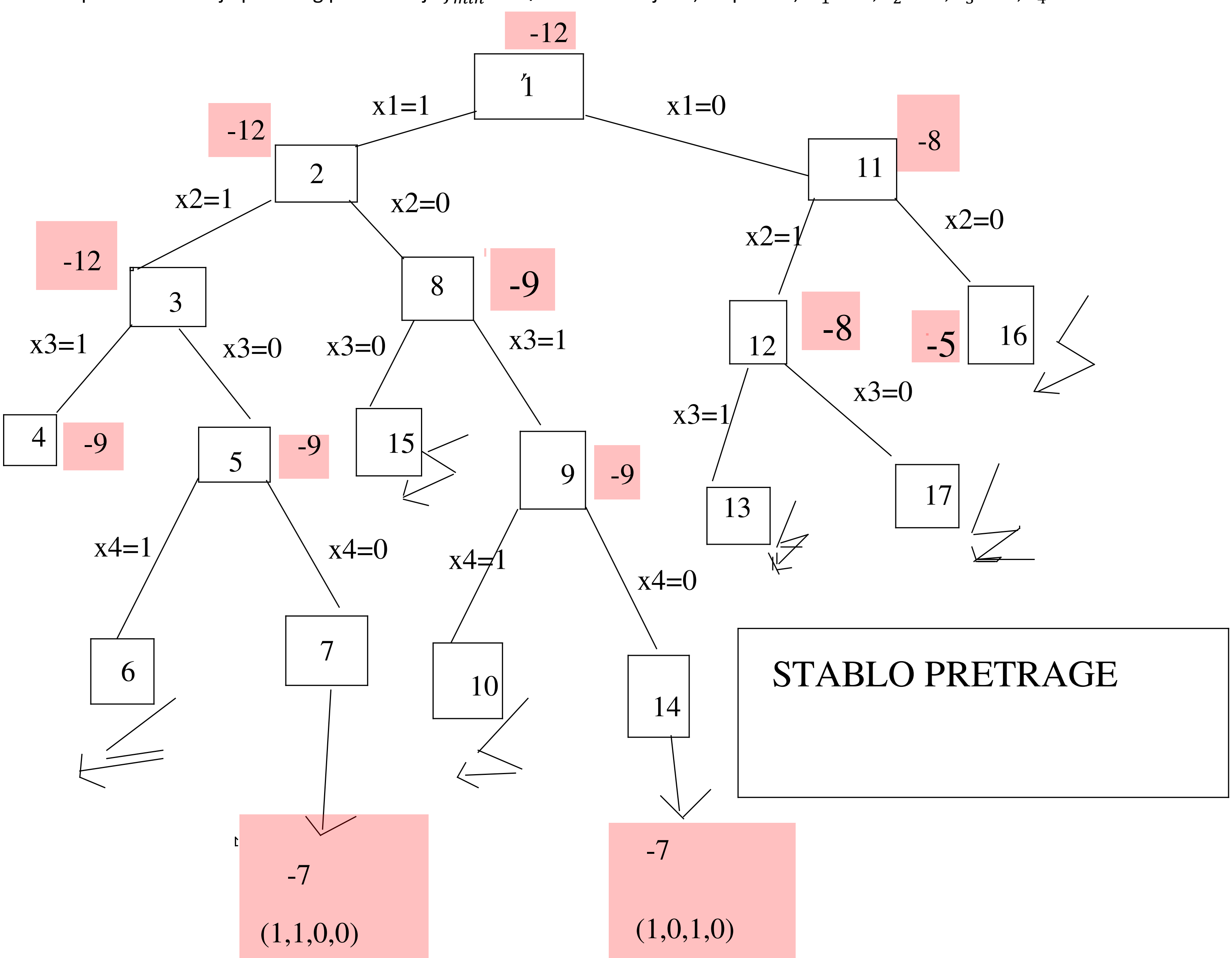
$g_3(1,0,0,x_4) = 1 - x_4$: $g_{3\_} = 0$, $0 \leq 6$

Sa obzirom da u slučaju 1. rešenje funkcije cilja ne može biti manje od -9 prestajemo da granamo ovaj problem na potprobleme.

2. $x_1 = 0$

U slučaju da je x_1 funkcija je odozdo ograničena sa $f_{\_} = -8$. Kako je -8>-9 ovaj slučaj nećemo razdvajati na potprobleme jer je bolje rešenje već pronađeno.

Optimalno rešenje polaznog problema je $f_{min} = -7$ i da se dobija za, na primer, $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0$.



Optimalne tačke su (1,1,0,0) i (1,0,1,0).