Гоморијева метода

$$(\Pi)\quad \begin{cases} (\min)\ c^T x \\ \text{п.о.}\quad Ax = b \\ \qquad x \geq 0,\ x \in \mathbb{Z}^n \\ \qquad A \in \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}^n \\ \qquad b \in \mathbb{Z}^m,\ c \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

Ако у (П) изоставимо услов целобројности задатак се своди на ЛП задатак (релаксиран задатак), који се решава симплекс алгоритмом.

Ако је таквим решавањем, добијено решење целобројно, онда је то решење и полазног проблема (П).

- У супротном →

* Правимо једну линеарну неједначину која задовољава свако допустиво решење полазног проблема, а не задовољава добијено нецелобројно решење релаксираног проблема. Ову неједнакост зовемо — "рез". (Гоморијев рез).

Дефинишемо $\phi(a) = a - \lfloor a \rfloor$ разломљени део $a \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \phi(a) \in [0,1)$

Претпоставимо да је линеарна релаксација решена симплексом (или дуалним симплексом) до облика:

$$f - f_0 = \sum_{j \in N} r_j x_j$$

$$y_{i0} = x_i + \sum_{j \in N} y_{ij} x_j, \; i \in B$$

где је B скуп базисних индекса а N скуп небазисних индекса

променљивих
$$\begin{cases} y_{i0} \geq 0, & i \in B \\ r_j \geq 0, & j \in N. \end{cases}$$

Ако су сви y_{i0}, $i \in B$ цели $\Rightarrow$ базисно решење је и оптимално за (П).

Иначе, ако постоји неко y_{i0}, $i \in B$ нецелобројно. Следи:

$$y_{ij} = \lfloor y_{ij} \rfloor + \phi(y_{ij}).$$

Следи, i-ту једначину можемо написати као

$$\sum_{j \in N} \phi(y_{ij}) x_j - \phi(y_{i0}) = -x_i - \sum_{j \in N} \lfloor y_{ij} \rfloor x_j + \lfloor y_{i0} \rfloor.$$

⇒ За свако допустиво решење од (П)

$$\sum_{j\in N} \phi(y_{ij})x_j - \phi(y_{i0}) > -1$$

и $-x_i - \sum_{j\in N} \lfloor y_{ij} \rfloor x_j + \lfloor y_{i0} \rfloor \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{j\in N} \phi(y_{ij})x_j - \phi(y_{i0}) \geq 0}_{\text{Гоморијев рез !}}$$

Ако на (таблицу симплекс), списак ограничења допишемо ограничење:

$$-\phi(y_{i0}) = -\sum_{j\in N}\phi(y_{ij})x_j + s$$

(где је s изравнавајућа, $s \geq 0$, $s \in \mathbb{Z}$)

релаксирани проблем даље решавамо дуал симплексом (јер је таблица дуална симплекс таблица).

ПР1.

$$(\min)\ -x_1 - x_2$$

п.о. $2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5$

$3x_2 + 3x_3 - x_4 = 3$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

$x_i \in \mathbb{Z},\ i = \overline{1,4}$

x_1	x_2	x_3	x_4	
2	-2	-3	2	5 $/ \cdot \frac{1}{2}$
0	3	3	-1	3
-1	-1	0	0	0

$\rightarrow$

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	-1	$-\frac{3}{2}$	1	
0	3	3	-1	3
-1	-1	0	0	

$\sim$

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	-1	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{5}{2}$
0	3	3	-1	3 $/ \cdot \frac{1}{3}$
0	-2	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{5}{2}$

$\rightarrow$

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	-1	$-\frac{3}{2}$	1	
0	1	1	$-\frac{1}{3}$	
0	-2	$-\frac{3}{2}$	1	

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{2}$
0	1	1	$-\frac{1}{3}$	1
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{9}{2}$

STOP

$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4) = (\frac{7}{2}, 1, 0, 0)$

$(\frac{7}{2}, 1, 0, 0) \notin \mathbb{Z}^4$

То оптимално решење није целобројно!

⇒ Правимо Гоморијев рез

$$\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \leq -\frac{1}{2}$$

Уводимо изравнавајућу променљиву S

$$-\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + S = -\frac{1}{2}$$

Додамо ову јну нашој симплекс табели:

x_1	x_2	x_3	x_4	S	
1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{7}{2}$
0	1	1	$-\frac{1}{3}$	0	1
0	0	$\boxed{-\frac{1}{2}}$	$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{9}{2}$

б) Одређивање пивота: између негативних елемената ове врсте у небазисним колонама по лексикографском правилу

$$\frac{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)}{-\left(-\frac{1}{2}\right)} \underset{lex}{<} \frac{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)}{-\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

! ⇒ $\boxed{-\frac{1}{2}}$ пивот ?

поништимо (нуле) изнад, испод

⇒ добијамо

x_1	x_2	x_3	x_4	S	
1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{7}{2}$
0	1	1	$-\frac{1}{3}$	0	1
0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{9}{2}$

x_1	x_2	x_3	x_4	S		
1	0	0	1	-1	4	
0	1	0	-1	2	0	
0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{2}$	$/\cdot(-2$
0	0	0	0	1	4	

6

→

x_1	x_2	x_3	x_4	S	
1	0	0	1	-1	4
0	1	0	-1	2	0
0	0	1	$\frac{2}{3}$	-2	1
0	0	0	0	1	4

$\Rightarrow$ STOP.

$$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4) = (4, 0, 1, 0)$$

$$\Rightarrow \hat{f}_{min} = -\hat{x}_1 - \hat{x}_2 = -4 - 0 = -4$$

$$\boxed{\hat{f}_{min} = -4}$$

TECT 1

$$(\min) \; -x_1 - x_2$$

$$\text{п.о.} \quad \begin{aligned} -8x_1 + 7x_2 &\leq +14 \\ x_1 + 6x_2 &\leq 60 \\ 7x_1 - 3x_2 &\leq 16 \\ x_1, x_2 \geq 0, \; & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

input : $c = (-1, -1)$, $b = (14, 60, 16)$

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 7 \\ 1 & 6 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$$

output: $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (5, 7)$

$$\hat{f}_{min} = -12$$

ТЕСТ2

$$(\min)\quad x - y - 3z$$

п.о.

$$\begin{aligned} 2x - y + z &\le 1 \\ -4x + 2y - z &\le 2 \\ 3x \phantom{{}+2y} + z &\le 5 \end{aligned}$$

$$x, y, z \ge 0,\quad x, y, z \in \mathbb{Z}$$

input: $c = (1, -1, -3)$, $b = (1, 2, 5)$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

output $= (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (0, 3, 4)$

$$\hat{f}_{min} = -15$$

НАПОМЕНА: ИСПИСИВАТИ ТАБЛИЦЕ И ГОМОРИЈЕВЕ РЕЗОВЕ У КОРАЦИМА!