Дефиниција 5.13. *Нека је* $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$, x_0 *унутрашња тачка скупа* D_f *и* $\vec{a} \neq 0$ *вектор. Гранична вредност*

$$f'_{\vec{a}}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h \cdot a) - f(x_0)}{h}$$

уколико постоји, зове се изводом функције f *у тачки* x_0 *у правцу вектора* $\vec{a}$.

Пример 5.14 (На часу)**.** *Одредити извод функције*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{5.1}$$

у тачки $x_0 = (0,0)$ *у правцу вектора* $\vec{a} = (1,2)$.

5.7 Парцијални извод

Дефиниција 5.14. *Нека је* $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ *дефинисана у околини тачке* $x_0 = (a_1, ..., a_n)$ *и нека је* e_k k*-ти вектор стандардне базе у* $\mathbb{R}^n$. *Уколико постоји извод функције* f *у тачки* x_0 *правцу вектора* e_k *зовемо га парцијални извод функције* f *по променљивој* x_k *у тачки* x_0 *тј.*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_k} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + he_k) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_{k-1}, a_k + h, a_{k+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{h}. \end{aligned}$$

Ако постоји парцијални извод функције f по променљивој x_k у тачки $\mathbf{x_0}$, онда кажемо да је функција f диференцијабилна по k-тој променљивој у тачки x_0.

За функцију две променљиве f парцијални изводи по x и y у тачки $x_0 = (a_1, a_2)$ се рачунају на следећи начин:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + h) - f(a_1, a_2)}{h}$$

Пример 5.15. *Одредити парцијалне изводе функције* (5.1) *у тачки* $x_0 = (0,0)$.

Подсетимо се из курса Математике 1 када је функција једне променљиве диференцијабилна у тачки $x_0 \in D_f$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Други начин да се ово запише је

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h), \; h \to 0.$$

Ако је f функција две променљиве пресликавање $h \to f'(x_0)h$ у горњем услову се само замењује линеарним пресликавањем $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Теорема 5.16. *Ако је функција две променљиве диференцијабилна у* (x_0, y_0) *онда постоје* $f'_x(x_0, y_0)$ *и* $f'_y(x_0, y_0)$.

Ако неки од њих не постоји функција није диференцијабилна у (x_0, y_0). Ако постоје оба онда проверимо да ли израз

$$\frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - f'_x(x_0, y_0)h - f'_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

тежи нули кад $(h, k) \to (0, 0)$. Ако то јесте случај онда функција f јесте диференцијабилна у (x_0, y_0). У супротном кажемо да функција није диференцијабилна у (x_0, y_0).

Пример 5.17.

Теорема 5.18. *Ако је функција* f *диференцијабилна у некој тачки* x_0 *отвореног скупа* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *онда је она и непрекидна у* x_0.

Напомена 5.19. *Обрнуто не важи. Заиста, функција* $f(x, y) = |x| + |y|$ *је непрекидна у тачки* $(0, 0)$*, али у њој није диференцијабилна.*

Пример 5.20. *Да ли је функција* $f(x, y) = xy^{\frac{1}{3}}$ *диференцијабилна у тачки* $(0, 0)$*? Да ли има парцијалне изводе у овој тачки?*

Дефиниција 5.15. *За функцију* $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$, *кажемо да је непрекидно-диференцијабилна (глатка) да* D_f *ако у свим тачкама скупа* D_f *има непрекидне парцијалне изводе.*

Дефиниција 5.16. *Нека је скуп* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *отворен и* $x_0 \in D$. *Вектор функција* $F : D \to \mathbb{R}^n$ *је диференцијабилна у тачки* x_0 *ако постоји линеарно пресликавање* $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *такво да важи*

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + Lh + o(h),\ h \to 0 \tag{5.2}$$

при чему је $o(h)$ *вектор функција.*

Запишимо претходну једнакост у координатама (преко $F = (f_1, ..., f_n)^T$):

$$\begin{bmatrix} f_1(x_0+h) \\ \vdots \\ f_n(x_0+h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_0) \\ \vdots \\ f_n(x_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1m} \\ \dots \\ a_{n1} \dots a_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o(h) \\ \vdots \\ o(h) \end{bmatrix},\ h \to 0.$$

Услов (5.2) је еквивалентан услову

$$f_j(x_0 + h) = f_j(x_0) + L_j h + o(h),\ h \to 0,\ j = 1, \dots, n \tag{5.3}$$

где су $L_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ линеарна пресликавања чије су матрице

$$A_{L_j} = [a_{j1} \dots a_{jm}] = [\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f_j}{\partial x_m}(x_0)]$$

Једнакост (5.3) је услов диференцијабилности функције f_j.
Матрица

$$J = \begin{bmatrix} A_{L_1} \\ \vdots \\ A_{L_n} \end{bmatrix}$$

тј. матрица

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x_0) \end{bmatrix}$$

се назива Јакобијева матрица. Линеарно пресликвање L је извод вектор функције F у x_0 и означава се са $F'(x_0)$.

Дефиниција 5.17. *За $m = n$ детерминанта Јакобијеве матрице се зове Јакобијан у тачки x_0 и означава са $det(J)$ или $|J|$.*

Пример 5.21 (Веза Декартовог и поларног кооординатног система)**.** *Одредити Јакобијан пресликавања:*

$$F(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \rho \cdot \cos\theta \\ \rho \cdot \sin\theta \end{bmatrix}.$$

Теорема 5.22 (Извод сложене функције)**.** *Нека су $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^n$ отворени скупови и $F : A \to \mathbb{R}^n$, $G : B \to \mathbb{R}^k$, $x_0 \in A$ и $F(x_0) = y_0$ где је $y_0 \in B$. Ако је F диференцијабилна у x_0 и G диференцијабилна у y_0 тада је и композиција $G \circ F$ диференцијабилна у x_0 и важи*

$$(G \circ F)'(x_0) = G'(y_0) \circ F'(x_0).$$

Ово је аналогон теореме за извод сложене функције једне променљиве (подсетник из Математике 1).

Изводе другог и вишег реда дефинишемо на следећи начин:

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ (ознаке f''_x, f''_y)
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ мешовити изводи (ознаке f''_{xy}, f''_{yx})
- Аналогно се дефинишу мешовити изводи трећег реда: f'''_{xxy}, f'''_{xyx}, f'''_{yxx}, f'''_{xyy}, f'''_{yxy}, f'''_{yyx}.

Пример 5.23. *Одредити све изводе другог реда функције $f(x, y) = x^3y + x^4 + y^2e^{2xy}$.*

Теорема 5.24. *Ако f има мешовите парцијалне изводе f''_{xy} и f''_{yx} у некој отвореној кугли са* *центром у (x_0, y_0) и ако су они непрекидни у (x_0, y_0) тада је*

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Квадратну матрицу

$$\mathcal{H}_f(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{bmatrix}$$

називамо матрицом другог извода функције f у x_0 или Хесеовом матрицом (Хесијан) и обележавамо са $\mathcal{H}_f(x_0)$.

Напомена 5.25. *Ако су задовољени услови претходне теореме онда је Хесеова матрица симетрична.*

Ако је $f(x_1, x_2, \dots, x_n) : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ дата функција, тада је градијент функције f вектор функција

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T.$$

Вектор

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)^T$$

називамо градијент функције f у тачки $x_0 \in D_f$. Градијент је заправо правац (из x_0) у ком функција f најбрже расте.

Пример 5.26. *За функцију $f(x_1, x_2) = 4 - 2x_1^2 - x_2^2$ имамо да је*

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^T = (-4x_1, -2x_2)^T.$$

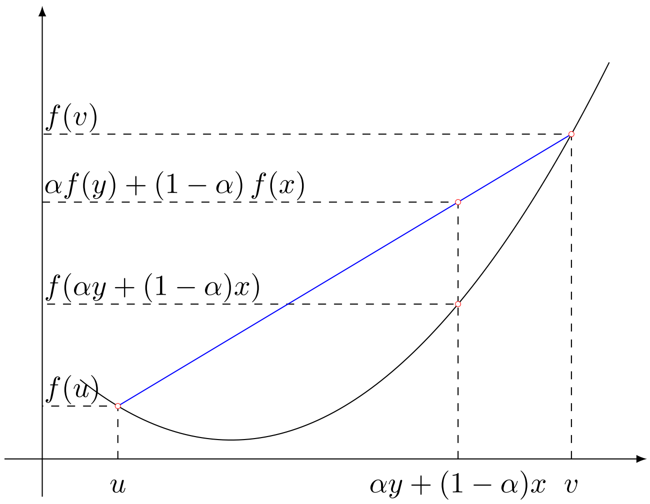
За $x_0 = (1, 2)$ је $\nabla f(1, 2) = (-4, -4)^T$. Јасно је да је $(-4, -4)^T = -4(1, 0) - 4(0, 1)$.

5.8 Конвексност

Дефиниција 5.18. *Нека је K конвексан скуп у $\mathbb{R}^n$. Функција $f : K \to \mathbb{R}$ је конвексна ако за све $x, y \in K$ и све $\alpha \in [0, 1]$ важи*

$$f((1 - \alpha)x + \alpha y) \leq (1 - \alpha)f(x) + \alpha f(y).$$

Ако за $x \neq y$ и $\alpha \in (0, 1)$ важи строга неједнакост онда кажемо да је функција строго конвексна. Функција је конкавна (строго конкавна) ако је функција $-f$ конвексна (строго конвексна).



Теорема 5.27. *Нека је K конвексан скуп у $\mathbb{R}^n$ и функција $f : K \to \mathbb{R}$ конвексна на K. Ако функција f има у тачки $x_0 \in K$ локални минимум онда f има глобални минимум у x_0.*

Овде ћемо се подсетити два критеријума за конвексне функције једне промењиве, које смо формулисали у курсу Математике 1.

Теорема 5.28. *Нека је $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ диференцијабилна. Онда важи*

$$f \text{ је конвексна} \quad \Leftrightarrow \quad f' \text{ је неопадајућа.}$$

Теорема 5.29. *Нека је $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ два пута диференцијабилна. Онда важи*

$$f \text{ је конвексна} \quad \Leftrightarrow \quad f''(x) \geq 0 \ \forall x \in (a, b).$$

Сад ћемо дати критеријум конвексности за функције више промењивих.

Теорема 5.30. *Нека је функција више променљивих $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ два пута непрекидно диференцијабилна и нека је $\mathcal{H}_f(x)$ Хесијан функције f у тачки x. Онда важи*

$$f \text{ је конвексна} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{H}(x) \ \text{ је позитивно семидефинитна матрица } \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Пример 5.31. *Одредити скуп на коме је функција $f(x, y) = e^{x-y+xy}$ конвексна.*

Решење: Хесијан дате функције је

$$\mathcal{H}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} (y+1)^2 e^{x-y+xy} & (x-1)(y+1)e^{x-y+xy} + e^{x-y+xy} \\ (x-1)(y+1)e^{x-y+xy} + e^{x-y+xy} & (x-1)^2 e^{x-y+xy} \end{bmatrix}.$$

Проверавамо семидефинитност Хесијана функције f. Проверимо знак дијагоналних минора. Очигледно је

$$(y+1)^2 e^{x-y+xy} \geq 0$$

и

$$(x-1)^2 e^{x-y+xy} \geq 0$$

за све x, y. Минор димензије 2 има детерминанту

$$(-2x(y+1)+2y+1)e^{2(x-y+xy)}.$$

Одавде закључујемо да је функција конвексна за

$$-2x(y+1)+2y+1 \geq 0.$$

Дакле, тражени скуп на коме је функција $f(x,y)=e^{x-y+xy}$ конвексна, је:

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -2xy+1-2x+2y+1 \geq 0\right\}.$$

Пример 5.32. *Да ли је функција* $g(x_1,x_2)=x_1x_2^2+x_1^2x_2-3x_1^2-3x_2^2$ *конвексна на скупу*

$$K=\left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1 \geq 0,\, x_2 \geq 0\right\}.$$

5.9 Екстремуми функција више променљивих

У овом поглављу ћемо разматрати проблем одређивања екстремума реалне функције више променљивих. Локалне екстремуме функција једне променљиве добро смо изучили у курсу Математика 1, али веома је важно знати у реланом животу испитати и одредити локалне екстремуме функција више променљивих. Наравно, важно је знати да екстремуме фунције више променљивих f тражимо унутар обалсти дефинисаности D_f, тако да је зато потребно знање домена елементарних функција. Код функција једне променљиве смо цртали и графике функција, а овде нећемо цртати графике функција више променљивих, јер график функције већих димензија не можемо приказати на довољно прегледан начин. Постоје доста софтвера који цртају графике функција две и три променљиве тако за илустрацију можемо неке и користити.

Дефиниција 5.19. *Функција* $f: D_f \to \mathbb{R}, D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ *има* ***глобални максимум [минимум]*** *у тачки* $x_0 \in D_f$ *ако за свако* $x \in D_f$ *важи*

$$f(x) \leq f(x_0) \quad [f(x) \geq f(x_0)].$$

Негде у литератури се глобални екстремум обично назива и **апсолутни** екстремум и користе се ознаке: $\max_{D_f} f = f_{\max}(x_0)$ или $\min_{D_f} f = f_{\min}(x_0)$.

Теорема 5.33. *(***Теорема о егзистенцији)** *Нека је* $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ *компактан скуп (затворен и ограничен). Ако је функција* $f: D_f \to \mathbb{R}$ *непрекидна на* D_f *онда она достиже минимум и максимум на* D_f.

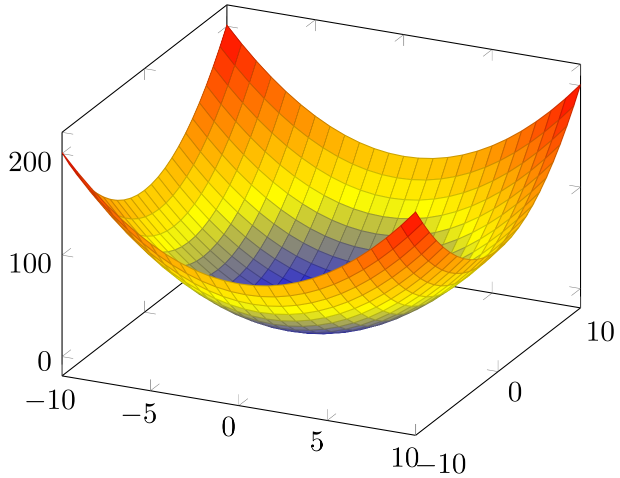
Дефиниција 5.20. *Функција* $f: D_f \to \mathbb{R}, D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ *има* ***локални максимум [локални минимум]*** *у тачки* $x_0=(a_1,\ldots,a_n) \in D_f$ *ако постоји околина* $\mathcal{N}(x_0)$ *тачке* x_0 *таква да за свако* $x \in \mathcal{N}(x_0) \cap D_f$ *важи*

$$f(x) \leq f(x_0) \quad [f(x) \geq f(x_0)]. \tag{5.4}$$

Напомена 5.34. *Локални максимуми и минимумим функције f називају се локалним екстремумима функције f. Ако у неједнакостима (5.4) важе строге неједнакости онда се екстремуми називају још и строгим локалним екстремумима.*

Пример 5.35. *Нека је дата функција $f : D_f \to \mathbb{R}$ са $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 1$. Очигледно је $D_f = \mathbb{R}^2$. Видимо да f има локални минимум у тачки $(0,0)$ јер за свако $x = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ важи*

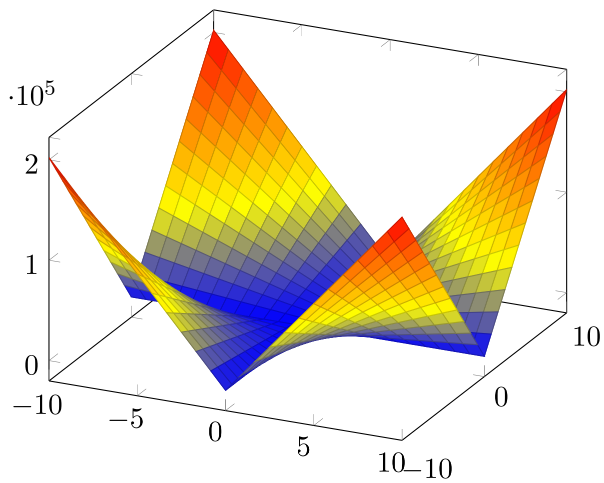
$$1 = 0^2 + 0^2 + 1 = f(0,0) \leq f(a_1, a_2).$$



$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 1$$

Пример 5.36. *Тачке облика $(a,0)$ и $(0,b)$, $a, b \in \mathbb{R}$ су локлани минимуми функције $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ дате са $f(x_1, x_2) = 2022 \cdot |x_1 \cdot x_2|$, где је $D_f = \mathbb{R}^2$. Заиста је*

- *За $x_0 = (a, 0)$ важи*
$$0 = f(a,0) \leq f(x,y) \;\; \forall (x,y) \in D_f,$$
- *За $x_0 = (0, b)$ важи*
$$0 = f(0,b) \leq f(x,y) \;\; \forall (x,y) \in D_f.$$



$$f(x_1, x_2) = 2022|x_1 x_2|$$

Дефиниција 5.21. *Тачка x_0 је* ***стационарна тачка*** *функције $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ ако су сви парцијални изводи првог реда функције f у тачки $x_0 \in D_f$ једнаки 0, тј.*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) &= 0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Напомена 5.37. *Овај услов (5.5) се краће може записати:*

$$\nabla f(x_0) = 0.$$

Дефиниција 5.22. *Тачке у којима функција није диференцијабилна зову се* ***сингуларне тачке****.*

Стационарне и сингуларне тачке зовемо заједно **критичне тачке**.

Дефиниција 5.23. *Ако је x_0 стационарна тачка функције f, али у свакој њеној околини постоје тачке у којима функција f узима и мање и веће вредности од $f(x_0)$, онда x_0 називамо* **седластом тачком***.*

Видимо да Теорема 5.33 о егзистенцији говори само када екстремуми постоје, али не и како их наћи. Зато су нам потребни неопходни и довољни услови за одређивање екстремума.

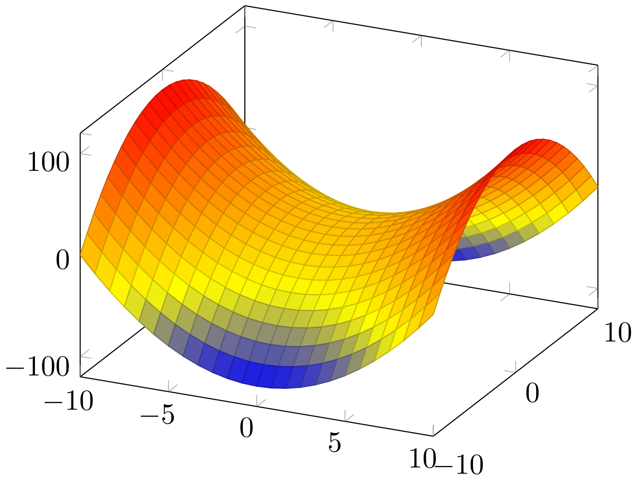
Теорема 5.38 (Неопходан услов за локални екстремум функције n променљивих). *Нека је функција n променљивих $f : D \to \mathbb{R}$ дефинисана и диференцијабилна на отвореном скупу $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$. Ако функција f у тачки $x_0 \in D_f$ има локални екстремум, онда је x_0 стационарна тачка тј. важи услов (5.5) ($\nabla f(x_0) = 0$).*

Напомена 5.39. *Услови стационарности (5.6) нису и довољни да би тачка x_0 била екстремум функције f (Слично важи и код функције једне променљиве). Заправо, могу да важе услови (5.6) а да функција f у тачки x_0 нема локални екстремум. Показаћемо ово следећим примером.*

Пример 5.40. *За функцију $f(x, y) = x^2 - y^2$ имамо да је*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y \end{aligned} \tag{5.6}$$

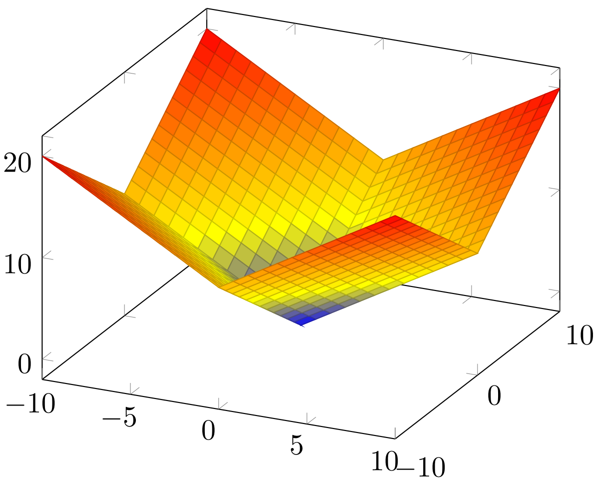
па је $x_0 = (0, 0)$ једина стационарна тачка функције f. Међутим, тачка x_0 није тачка локалног екстремума јер у свакој околини те тачке има тачака у којима је функција позитивна, као и тачака у којима је функција негативна.



$f(x, y) = x^2 - y^2$

Такодје, функција може имати екстремуме и у тачкама у којима не постоје парцијални изводи, што показује следећи пример.

Пример 5.41. *Функција* $f(x_1, \ldots, x_n) = |x_1| + \ldots + |x_n|$ *има очиїледно сшроїи локални минимум у шачки* $x_0 = (0, \ldots, 0)$*, али йарцијални изводи ове функције у* x_0 *не йосшоје.*



$f(x, y) = |x| + |y|$

На основу претходног закључујемо да кандидати за локалне екстремуме функције више променљивих $f : D_f \to \mathbb{R}$ могу бити:

1. Стационарне тачке;
2. Сингуларне тачке;
3. Тачке на ∂D_f.

Да би показали да је стационарна тачка дате функције f и екстремум, морамо користити парцијалне изводе другог реда.

Теорема 5.42 (**Довољан услов за екстремум функције две променљиве**). *Нека је дата функција две променљиве $f(x,y): D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ и нека је тачка $x_0 = (a_1, a_2)$ стационарна тачка функције f и претпоставимо да је f два пута диференцијабилна у околини тачке x_0.*

Ако је

- $$A_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0) \end{vmatrix} > 0 \tag{5.7}$$

  онда функција f има локални екстремум у тачки x_0 и то:

  а) за $A_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) > 0$ тачка x_0 је локални минимум;

  б) за $A_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) < 0$ тачка x_0 је локални максимум;

- *Ако је $A_2 < 0$ онда функција f нема локални екстремум у тачки x_0 (x_0 је седласта тачка)*
- *Ако је $A_2 = 0$ потребно је додатно испитивање.*

Слично важи за функцију три променљиве.

Теорема 5.43 (**Довољан услов за екстремум функције три променљиве**). *Нека је дата функција три променљиве $f(x,y,z): D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^3$ и нека је тачка $x_0 = (a_1, a_2, a_3)$ стационарна тачка функције f и претпоставимо да је f два пута диференцијабилна у околини тачке x_0.*

Ако је

- $$A_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) > 0,\ A_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0) \end{vmatrix} > 0,\ A_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0) \end{vmatrix} > 0$$

  онда је тачка x_0 локални минимум функције ф;

- *Ако је $A_1 < 0$, $A_2 > 0$ и $A_3 < 0$ онда је тачка x_0 локални максимум функције f;*
- *Ако је $A_2 < 0$ онда функција f нема локални екстремум у тачки x_0 (x_0 је седласта тачка)*
- *Ако је $A_2 = 0$ потребно је додатно испитивање.*

Критеријум за испитивање локалних екстремума функција више променљивих дат у претходним теоремама може се представити и на други начин (преко другог диференцијала). За функцију две променљиве су диференцијали првог и другог реда дати са:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \quad d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dy^2$$

Теорема 5.44 (Довољан услов за локални екстремум функције n променљивих). *Нека је x_0 стационарна тачка функција n променљивих $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$. Претпоставимо да је f два пута диференцијабилна у околини тачке x_0 и нека су јој сви други парцијални изводи непрекидни у x_0. Ако $(dx_1, ..., dx_n) \neq (0, ..., 0)$, онда важи:*

- *Ако је $d^2 f(x_0) < 0$ онда је тачка x_0 локални максимум функције f.*
- *Ако је $d^2 f(x_0) > 0$ онда је тачка x_0 локални минимум функције f.*
- *Ако $d^2 f(x_0)$ мења знак онда тачка x_0 није екстремум функције f.*

Пример 5.45.

Пример 5.46.

5.10 Квадратне форме

Дефиниција 5.24. *Реална функција n реалних променљивих*

$$\Phi(x_1, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = x^T A x \tag{5.8}$$

*зове се **квадратна форма** променљивих $x_1, ..., x_n$.*

Пример 5.47. *Неки примери квадратних форми:*

$$\Phi(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$$

$$\Phi(x, y, z) = x^2 - xy + 2yz + z^2$$

Свакој симетричној квадратној матрици $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ можемо доделити квадратну форму $\Phi(x_1, ..., x_n) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$. И обрнуто, свакој квадратној форми $\Phi(x_1, ..., x_n) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ можемо доделити симетричну матрицу

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

где је $\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$ и $\alpha_{ii} = a_{jj}$ за $i, j = 1, \dots, n$.

За функцију три променљиве је $\Phi(x_1, x_2, x_3) = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2^2 + a_{23} x_2 x_3 + a_{31} x_3 x_1 + a_{32} x_3 x_2 + a_{33} x_3^2$.

Пример 5.48. *Нека је дата функција* $f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_3^2$. *Тада је*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Дефиниција 5.25. *Квадратна форма* Φ *је:*

- ***позитивно семидефинитна*** *ако је* $\Phi(x_1, ..., x_n) \geq 0,\ \forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.
- ***негативно семидефинитна*** *ако је* $\Phi(x_1, ..., x_n) \leq 0,\ \forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.
- ***позитивно дефинитна*** *ако је* $\Phi(x_1, ..., x_n) > 0,\ \forall x \neq \boldsymbol{0}$.
- ***негативно дефинитна*** *ако је* $\Phi(x_1, ..., x_n) < 0,\ \forall x \neq \boldsymbol{0}$.

Теорема 5.49 (Силвестеров критеријум). *Квадратна форма* Φ *је*

- *позитивно дефинитна ако и само ако су главни минори њене матрице позитивни*
- *негативно дефинитна ако и само су главни минори њене матрице наизменичног знака почев од првог негативног.*

У Примеру 5.48 квадратна форма Φ је негативно дефинитна.

Последица 5.50 (Довољан услов за екстремум функције n **променљивих).** *Ако је тачка* x_0 *стационарна тачка функције* $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^n$, *где је* D *отворен скуп и* f *два пута непрекидно диференцијабилна функција и* $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$. *Тада важи:*

- *Ако је квадратна форма* Φ *позитивно дефинитна у* x_0 *је (локални) минимум.*
- *Ако је квадратна форма* Φ *негативно дефинитна у* x_0 *је (локални) максимум.*
- *Ако је квадратна форма* Φ *променљивог знака у* x_0 *нема екстремума.*

5.11 Условни (везани) екстремуми функција више променљивих

У овом поглављу ћемо одређивати екстремуме функције f уз неке додатне услове типа једнакости. Нека је дата функција $f : D_f \to \mathbb{R}$ и функције $g_i : D_{g_i} \to \mathbb{R}, i = 1, ..., k,\ k < n$ где су је $D, D_{g_i} \subseteq \mathbb{R}^n$ отворени скупови.

Пример 5.51 (Задатак). *Одредити екстемуме функције* f *при чему су променљиве везане неким условом. Овај проблем се обично зове проблем условног екстремума.*

$$\begin{aligned} & f(x_1, \ldots, x_n) \to \min\ (\max); \\ \text{п.о.}\quad & g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0,\ i = 1, \ldots, k. \end{aligned} \tag{УЕ}$$

Дефиниција 5.26. *Скуп*

$$\Omega = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in D_f | g_i(x_1, \dots, x_n) = 0, i = 1, ..., k\}$$

зовемо допустиви скуп проблема (УЕ).

Надаље ћемо писати $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Дефиниција 5.27. *Функција $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^n$ у тачки $x_0 \in \Omega$ има* ***глобални максимум(минимум)*** *при условима $g_i(x) = 0, i = 1, ..., k$ ако за свако $x \in B$ важи*

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

.

Један метод за одређивање условног екстремума је изражавање неких променљивих x_j из датог система $g_i(x) = 0$, $i = 1, ..., k$ помоћу осталих променљивих. Тако се на пример код функције две променљиве проблем условног екстремума може свести на проблем (локалног) екстремума функције једне променљиве.

Пример 5.52. *Одредити условне екстремуме функције $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ уз услов $g_1(x, y) = 3x - 2y - 1 = 0$.*

Један од недостатака овог приступа је што у неким случајевима долази до компликованог рачуна. Овај недостатак се отклања применом **Лагранжове методе**.

Теорема 5.53 (Лагранж). *Нека су дате функције $f : D_f \to \mathbb{R}$, $g_i : D_{g_i} \to \mathbb{R}$ где су $D, D_{g_i} \subseteq \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, k$ $k < n$ отворени скупови. Нека су функције $f, g_i, i = 1, ..., k$ глатке. Ако је тачка $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ локално решење разматраног проблема* (УЕ) *и ако је $rang(f'(\hat{x})) = n$ онда постоје Лагранжови множиоци $\hat{\lambda_1}, ..., \hat{\lambda_k} \in \mathbb{R}$ такви да је $(\hat{x}, \hat{\lambda})$ стационарна тачка функције*

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + ... + \lambda_k g_k(x)$$

тј. важи:

- $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(\hat{x}, \hat{\lambda}) = 0, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n}(\hat{x}, \hat{\lambda}) = 0$$
- $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1}(\hat{x}, \hat{\lambda}) = 0, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_k}(\hat{x}, \hat{\lambda}) = 0.$$

Напомена 5.54. *Заправо локални ескстремуми Лагранжове функције $\mathcal{L}$ дају условне локалне екстремуме функције f. Имамо систем*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(\hat{x}, \hat{\lambda}) = 0, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n}(\hat{x}, \hat{\lambda}) = 0$$

$$g_1(\hat{x}) = 0, \dots, g_k(\hat{x}) = 0$$

од $n+k$ једначина и $n+k$ непознатих који може да се реши.

Користићемо највише критеријум за испитивање локалних екстремума функција више променљивих дат у претходном поглављу преко другог диференцијала.

Теорема 5.55 (**Довољан услов за локални екстремум функције $\mathcal{L}$**)**.** *Нека је x_0 стационарна тачка функција n променљивих $\mathcal{L}: D_{\mathcal{L}} \to \mathbb{R}$, $D_{\mathcal{L}} \subseteq \mathbb{R}^n$. Претпоставимо да је $\mathcal{L}$ два пута диференцијабилна у околини тачке x_0 и нека су јој сви други парцијални изводи непрекидни у x_0. Ако $(dx_1, ..., dx_n) \neq (0, ..., 0)$, онда важи:*

- *Ако је $d^2\mathcal{L}(x_0) < 0$ онда је тачка x_0 локални максимум функције $\mathcal{L}$.*
- *Ако је $d^2\mathcal{L}(x_0) > 0$ онда је тачка x_0 локални минимум функције $\mathcal{L}$.*
- *Ако $d^2\mathcal{L}(x_0)$ мења знак онда тачка x_0 није екстремум функције $\mathcal{L}$.*

Напомена 5.56. *Приметимо да овде можемо да искористимо услов $dg_i = 0$, $i = 1, \ldots, k$ за одређивање знака диференцијала.*

Пример 5.57.

5.12 Апсолутни екстремуми, највећа и најмања вредност функције у области D

У Поглављу **5.9.** смо формулисали појам глобалног максимума и минимума као и теорему о егзистенцији.

Теорема 5.58. *(***Теорема о егзистенцији***) Нека је $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ компактан скуп (затворен и ограничен). Ако је функција $f: D_f \to \mathbb{R}$ непрекидна на D_f онда она достиже минимум и максимум на D_f.*

Пример 5.59 (Проблем)**.** *Нека је дат проблем одређивања апсолутног максимума(минимума) функције $f(x_1, \ldots, x_n) : D_f \to \mathbb{R}^n$ на области дефинисаности D_f. Нека се граница области D_f може приказати као*

$$\partial D_f = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : g(x_1, \ldots, x_n) = 0\}.$$

Тада кандидати за највећу и најмању вредност функције f у области D_f могу бити:

1. Локални екстремуми функције f у $int(D_f)$;
2. Условни екстремуми функције f при услову $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$ (на граници области ∂D_f);
3. Тачке са границе ∂D_f где парцијални изводи функције g нису дефинисани.

Пример 5.60.