Дискретне структуре, вежбе 2023/2024

1. део - Комбинаторика

1. Принцип једнакости,збира, производа

2. Бацају се истовремено црвена и бела коцка. На колико начина се може добити збир дељив са 5?
3. Од Новог Сада до Београда може да се стигне аутобусом или возом а од Београда до Подгорице аутобусом, возом или авионом. На колико начина се може стици од Новог Сада до Подгорице?
4. Колико има различитих седмоцифрених телефонских бројева?
5. Колико се четвороцифрених бројева од цифара {1,2,3,4,5} може написати :
а) ако цифре могу да се понаваљају
б) ако цифре не могу да се понављају
в) непарних, ако није дозвољено понављање
6. Предавању присуствује 26 студената. Сваки младић познаје тачно 8 девојака на предавању, а свака девојка познаје тачно 5 младића. Колико девојака има на предавању?
7. Колико различитих делилаца има број 42000 ?
8. Слепи човек има хрпу од 10 сивих и 10 црних чарапа. Колико треба да изабере да би био сигуран да има пар исте боје, а колико да има пар сивих чарапа?
9. Колики је број начина да се између 10 мушкараца, 9 жена, 8 дечака и 7 девојчица изабере једна особа? Колики је број начина да се изабере по један мушкарац, једна жена, један дечак и једна девојчица?
10. На полици се налази 15 књига из области рачунарства, 12 из области математике и 10 из области физике. Колико има начина да се изаберу две књиге , при чему обе треба да буду из различитих области?
11. Ниска битова је низ симбола од којих сви могу имати вредност 0 или 1. Колико има ниски битова дужине 5?
12. "Гаусов" пример за збир $1 + 2 + 3 + ... + 100$
13. Пример како ефикасно да срачунамо $1 + 3 + 5 + ... + 1001$
14.(Уређени избор елемената са и без понављања) Дефиниција. Формуле
15. Колико има петоцифрених телефонских бројева ако знамо да су им све цифре непарне.
16. Колико постоји различитих речи са 5 слова укључујући и бесмислене речи.
17. Градски одбор од 10 чланова треба да изабере председника, потпредседника, секретара и благајника. На колико начина ово може да се уради?
18. Колико има шестоцифрених бројева у којима су бар две цифре исте?
19.(Пермутације без понављања) Дефиниција, r-пермутација скупа, број пермутација коначног скупа X
20. Колико има уређених парова различитих слова тј. "речи" од два слова из скупа {а,б,ц,д,е} ?
21. На колико начина може 6 особа стајати у реду?
22. 6 мушкараца и 5 жена треба стајати у реду али тако да је редослед алтернирајући (М-Ж-М-...). На колико начина је то могуће извести?
23. На колико начина n људи може да седне за округли сто?
24. Колико се различитих огрлица може направити од n перли које су све различите боје?
25. На колико се начина 8 топова може разместити по шаховској табли тако да се никоја два међусобно не нападају?
26. На колико начина се 6 мушкараца и 6 девојака може распоредити за округли сто тако да седе девојке између мушкараца?
27.(Неуређени избор елемената) Комбинације без понављања
28. Од 20 кандидата за математичку олимпијаду, професор мора да изабере 8. На колико начина то може да уради?
29. Нека је конвексни n-тоугао такав да се никоје три дијагонале не секу у једној (унутрашњој) тачки. Колико има пресечних тачака дијагонала?
30. Од 7 жена и 4 мушкарца треба изабрати делегацију. На колико начина се може изабрати делегација, тако да се она састоји од:

а) петоро људи и то 3 жене и 2 мушкарца

б) било којег броја људи, али мора бити једнако жена и мушкараца

в) петоро људи од којих су бар две жене

г) петоро људи, стим да једна од њих буде већ унапред одређена жена.

31. Наћи број подскупова $n-$точланог скупа.

32. Нека је S скуп од n елемената. Колико има бинарних релација на S?

33. У равни је задато n различитих тачака од којих никоје три нису колинеарне. Наћи број различитих дужи. Наћи број различитих троуглова са теменима у датим тачкама.

34. Одредити број дијагонала конвексног n-тоуугла.

35. Кошаркашки тренер треба да формира тим (од 5 играча)а на располагању има 5 бекова, 4 центра и 3 крила. На колико начина он може ово да уради ако у тиму мора да играју бар један центар и бар два бека.

36.(Неуређени избори са понављањем) Колико има начина да се изаберу два новчића из касе која садржи новчиће од 1,2,5 и 10 динара, уколико редослед бирања није битан.

37. (Т.) Број неуређених избора k елемената са понављањем скупа X је $\binom{|X|+k-1}{k}$

38.(Основни пример са људима и преградама) На колико начина се може распоредити n једнаких предмета међу k људи.

39. На колико начина се 10 истих предмета може распоредити међу четвото људи?

40. Које су и колико има 3-комбинације и 4-комбинације мултискупа $\{\infty \cdot 1, \infty \cdot 2\}$

41. Колико има решења једначина $x_1 + x_2 + ... + x_n = n$ у скупу природних бројева?

42. Колико има уређених четворки $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in N^4$ тако да је $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 9000$

43.(Пермутације са понављањем) Колико различитих речи, укључујући и бесмислене може да се састави од слова речи МАТЕМАТИКА?

44. Број пермутација са n елемената у којој се први елемент садржи n_1 пута, други елемент n_2 пута,..., k-ти n_k пута $(n_1 + n_2 + ... + n_k = n)$ је
$\binom{n}{n_1} \cdot \binom{n-n_1}{n_2} \cdots \binom{n_k}{n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}$

45. Доказати да је $(4n!)$ дељив са 2^{3n} и 3^n. (Задатак сам урадио користећи пермутације мултискупа)

46.Дат је број 62774277. Колико можемо направити

а) 8-цифрених бројева од цифара датог броја

б) 5-цифрених бројева од цифара датог броја

(Генерисање пермутација) Циклични запис, дефиниција пермутације у лексикографском поретку. Алгоритам за генерисање k-те пермутације.

47. Која је последња пермутација у лексикографском поретку после 42758631 ?

48. Генерисање одређене пермутације. Алгориутам.

49. Која је 17. пермутација у лексикографском поретку пермутација скупа $\{1, 2, 3, 4\}$

50.(домаћи) Која је 22. пермутација у лексикографском поретку пермутација скупа $\{A, E, P, R\}$

51. 52. Дефиниција, основне формуле, особине (симетричност коефицијената, *Pascal*-ова формула, биномна формула, *Pascal*-ов троугао)

53. Одредити бинарни коефицијент уз $a^{10}b^3$ у развоју бинома $(a-b)^{13}$

54. Други, трећи и четврти коефицијент у развоју бинома $(x+y)^n$ образују аритметичку прогресију . Наћи n.

55. Израчунати збир коефицијената полинома по x који представља развој израза $(3x-2)^{100}$.

56. Одредити коефицијент уз x^5 у развоју $(3\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^{20}$.

57.Доказати идентитет $\sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

58. Доказати идентитет $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + ... + (n+1)\binom{n}{n} = (n+2)2^{n-1}$.

59. Доказати идентитет $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k (k+1)\binom{n}{k} = 0$.

60. Доказати $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + ... = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + ... = 2^{n-1}$.

9. Доказати $\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + ... + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

61. Израчунати $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2$.
62. Одредити коефицијент уз $a^3bc^2e^2$ у развоју $(a+b+c+d+e)^8$.
63. Одредити коефицијент уз x^4yz^7 у развоју $(3x-5y+2z)^{12}$.
64. Одредити коефицијент уз x^{10} у развоју $(1-x^2+x^3)^{11}$.
65. Један човек има 12 рођака, 5 мушкараца и 7 жена, а његова жена 7 мушкараца и 5 жена. Заједничких рођака немају. Решили су да позову у госте свако по 6 својих рођака, али тако да међу гостима буде 6 жена и 6 мушкараца. На колико начина то може да се уради?
66. На колико начина се од 6 особа може саставити 5 различитих трочланих комисија тако да се за сваку комисију унапред зна задужење.
(Принцип укључења искључења)

67. Одредити број природних бројева мањих од 1001 који нису дељиви ни са 3 ни са 7.
68. У разреду има 30 ученика. Притом, одличну оцену из математике има 15 ученика, из физике 13 ученика, из хемије 12 ученика, из математике и физике 8 ученика, из физике и хемије 6 ученика, из хемије и математике 7 ученика, а из сва три предмета 3 ученика. Колико ученика има бар једну одличну оцену из наведених премета?
69. Колико има бројева мањих или једнаких 1000 који нису дељиви ни са 2 ни са 3 ни са 5 ?
70. Од 50 учесника математичког такмичења њих 33 воли пилетину, 20 воли свињетину а 18 говедину. Нико не воли све три врсте меса, а 8 воли пилетину и свињетину, 9 свињетину и говедину и 7 пилетину и говедину. Израчунати колико њих су вегетаријанци.
71.(Функције генератрисе) .

72. Нека се $S=\{1,2,3,...,n\}$. Наћи функцију генератрисе $g(x)$ за бројеве k подскупова од S тј. за низ $a_k=\binom{n}{k}, k=0,1,2,...$
73.(Уопштена биномна теорема) .

74. Одредити функције генератрисе за следеће низове:
а) $(1,1,1,1,1,1....)$
б) $(1,0,0,1,0,0,...)$
в) $(1,0,1,0,1,0,...)$
г) $(0,1,2,3,4,5,...)$
д) $(0,1,4,9,16,25,...)$
ђ) $(0,1,8,27,64,125,...)$
е) Споменуо сам им и експоненцијалну функцију генератрисе за низ $(1,1,\frac{1}{2!},\frac{1}{3!},...)$
75. Наћи функцију генератрисе за низ $(0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...)$
76. Радио сам мали експеримент и причао шта може да реши функција генератрисе. Шта генерише, или какве проблеме може да реши функција генератрисе
$(1+x+x^2+x^3+x^4+...)\cdot(1+x^2+x^4+x^6+...)$. Нпр. шта представља коефицијент уз члан x^5 у овом развоју. Прицао сам и повезао то са партицијама природног броја.
77. На колико начина се може платити износ од 21 динара ако имамо 6 новчића од 1 динара, 5 новчића од 2 динара и 4 новчића од 5 динара?
78.$(\binom{-n}{r}=(-1)^r\binom{n+r-1}{r})$ Наћи коефицијенте уз x^4 у развоју $\sqrt[3]{1+x}$.
79. Наћи коефицијенте уз
а) x^5 у $\frac{1}{(1-2x)^2}$
б) x^n у развоју $\frac{1}{(1-3x)(1-2x)}$
80. Наћи функцију генератрисе $g(x)$ за комбинације са понављањем n-тог реда од $r>0$ различитих елемената тј. функцију генератрисе за низ $a_0,a_1,...,a_n$ где је a_n број n комбинација мултискупа

$S=\{\infty\cdot x_1,\infty\cdot x_2,...,\infty\cdot x_n\}$

81. Доказати (користећи развој функције генератрисе) идентитет : $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+...+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$

82. Одредити функције генератрисе за следеће низове

а) $(5,5,5,5,5,5,...)$

б) $(1,1,0,0,1,1,0,0,...)$

в) $(0,0,4,4,0,0,4,4,0,0,...)$

г) $(0,0,1,0,0,1,0,0,...)$

д) $(3,3,0,3,3,0,3,3,...)$ (за домаћи)

ђ) $(0,0,0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...)$ (за домаћи)

е) $(0,0,\frac{1}{1\cdot 2},\frac{1}{2\cdot 3},\frac{1}{3\cdot 4},...)$ (за домаћи)

ж) $(0,1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},...)$ (за домаћи)

83. Одредити функције генератрисе за следеће низове a_n , $n\geq 0$:

а) $a_n=5n+6$

б) $a_n=2014^n$

в) $a_n=6\cdot 4^n-5\cdot 3^n$

г) $a_n=\frac{1}{(n+2)!}$

84. На колико се начина могу 24 јабуке поделити на четворо деце тако да свако дете добије бар 3 а највише 8 јабука ?

85. На колико начина се 1 евро може уситнити помоћу произвољног броја новчића од 10,20 и 50 центи ?

86. На колико начина Пера, Мика, Жика и Лаза могу поделити 12 јабука и 16 јагода тако да Пера добије бар три јагоде и бар једну јабуку, а да остала тројица добију бар две јабуке и највише пет јагода. Воће мора бити распоређено.

87.(Рекурентне једначине) Наћи опште решење рекурентне једначине $a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}$ $a_0=0,\ a_1=2.$

88. Наћи опште решење рекурентне једначине $a_n=4a_{n-1}-4a_{n-2}$

88. Наћи опште решење рекурентне једначине $a_n=4a_{n-1}-a_{n-2}-6a_{n-3},n\geq 3$, ако је $a_0=-1,a_1=2,a_2=4$

88. Наћи опште решење рекурентне једначине $a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}-4a_{n-3}+8a_{n-4},n\geq 4$, ако је $a_0=1,a_1=8,a_2=12,a_3=38$

89. Наћи опште решење рекурентне једначине $a_{n+3}=5a_{n+2}-8a_{n+1}-4a_n$

90. Решити рекурентну једначину $a_{n+1}-5a_n=4n^2+2n+6,a_1=1,(n\geq 0)$

91. Решити рекурентну једначину $a_n-3a_{n-1}+2a_{n-2}=2^n,a_0=3,a_1=8,(n\geq 2)$

92. Наћи опште решење рекурентне једначине $a_n=6a_{n-1}-9a_{n-2}+n\cdot 3^n,a_0=2,a_1=3,(n\geq 2)$

93. Наћи опште решење рекурентне једначине $a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=5$ $a_0=1,\ a_1=2.$

94. Наћи опште решење рекурентне једначине $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n+2+3n$ $a_0=a_1=1.$

95. Наћи функцију генератрисе низа (a_n) који задовољава рекурентну једначину
$a_{n+1}=2a_n+1$,$a_0=0$ и затим одатле наћи општи члан низа a_n.

96. Наћи функцију генератрисе низа (a_n) који задовољава рекурентну једначину
$a_{n+1}=2a_n+n$,$a_0=1$ и затим одатле наћи општи члан низа a_n.

97. Наћи функцију генератрисе низа (a_n) који задовољава рекурентну једначину
$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$,$a_0=0,a_1=1$ и затим одатле наћи општи члан низа a_n.

98. Решити систем рекурентних једначина $a_n=-2a_{n-1}+4b_{n-1},b_n=-5a_{n-1}+7b_{n-1},a_1=4,b_1=1$

99. Дат је низ $a_{n+2}=\frac{a_{n+1}^3}{a_n^2}$, $a_0=1$,$a_1=2$, $n\geq 0$. Одредити општи члан низа.

100. Решити рекурентну једначину $a_{n+1}=\frac{2a_n-3}{3a_n-4}$, $a_0=-1$.

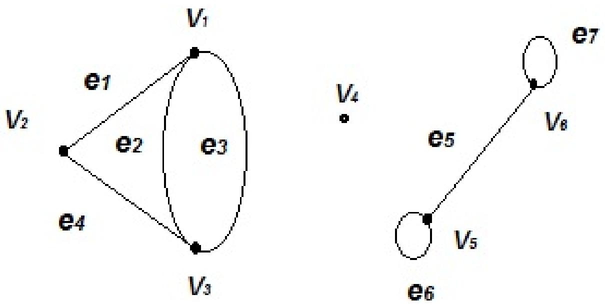
101. Дат је низ са $a_0=1$, $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+...+a_1+2a_0$, $n\geq 1$. Одредити општи члан низа.

102. Низ (a_n) је задат рекурентно $a_{n+1}-na_n=n!\cdot n^5$, $n\geq 0$. Одредити општи члан низа.

2. део, Графови, 2013/2014

1. Увод, дефиниција графа, примери.

2. Разматрамо следећи граф:



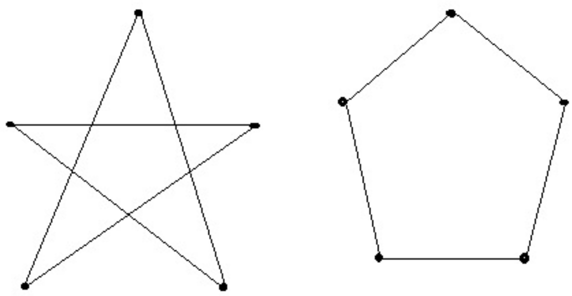
а) Написати скуп чворова и скуп грана графа и дати табелу (функцију инциденције).

б) Наћи све гране које су инцидентне са чвором v_1, све чворове који су суседни са v_1, све гране које су суседне са e_1, све петље, све паралелне гране, све чворове суседне са самим собом и све изоловане чворове.

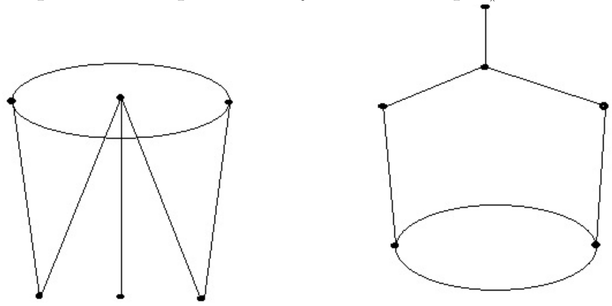
3. (Пример да не постији јединствен начин цртања графа) Нацртати граф G са скупом чворова $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ скупом грана $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ и функцијом инциденције:

грана	чворови којима је одређена
e_1	$\{v_1, v_3\}$
e_2	$\{v_2, v_4\}$
e_3	$\{v_2, v_4\}$
e_4	$\{v_3\}$

4. Још један пример за исте графове:



5. Доказати обележавањем грана и чворова да су следећи графови исти



6. Неке врсте графова (дефиниције за прост, комплетан, бипартитан, потпун бипартитан граф)

7. Нацртати све просте графове $\{u, v, w, x\}$ са 4 чвора и 2 гране од којих је увек једна $\{u, v\}$.

8. (дефиниција подграфа)

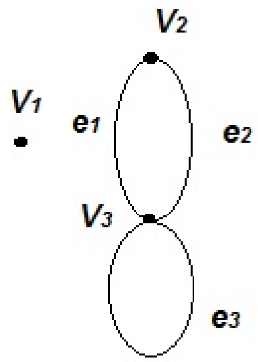
9. Написати све подграфове графа задатог са $V = \{v_1, v_2\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ и

грана	чворови којима је одређена
e_1	$\{v_1, v_2\}$
e_2	$\{v_1, v_2\}$
e_3	$\{v_1, v_1\}$

10. Пример за разапињући подграф, индуковани (цворовима и гранама)подграф.

11. Степен чвора - дефиниција.

12. Одредити степен сваког чвора приказаног на слици и одредити тотални степен целог графа.



13. **(Теорема)** У произвољном графу $G = (V, E)$ важи: $\sum\limits_{v_i \in V} d_G(v_i) = 2|E|$.

14.(Последица) Лема "о руковању" У произвољном графу $G = (V, E)$ број чворова непарног степена је паран број. (У сваком друштву број особа које су се руковале непаран број пута је паран број.)

15. Нацртати граф са одговарајућим особинама или доказати да такав не постоји:

а) граф са 4 чвора степена 1, 1, 2, 3

б) граф са 4 чвора степена 1, 1, 3, 3

в) прост граф са 4 чвора степена 1, 1, 3, 3

г) граф са 5 чворова степена 1, 2, 3, 3, 5

д) граф са 4 чвора степена 1, 2, 3, 3

ђ) граф са 4 чвора степена 1, 2, 3, 3

е) граф са 4 чвора степена 1, 1, 1, 4

ж) граф са 4 чвора степена 1, 2, 3, 4

з) прост граф са 4 чвора степена 1, 2, 3, 4

и) прост граф са 5 чворова степена 2, 3, 3, 3, 5

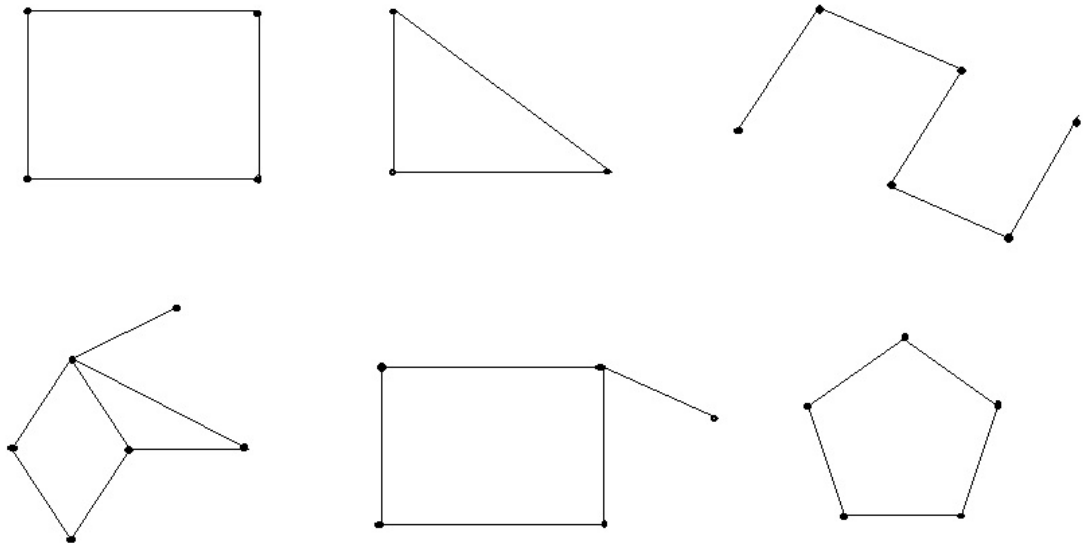
ј) прост граф са 5 чворова степена 1, 1, 1, 2, 3

к) прост 3-регуларан граф са 6 чворова

л) (домаћи) прост 3-регуларан граф са 9 чворова.

16. Да ли је могуће да у групи од 9 људи свако има по 5 познаника?

17. Испитати да ли су следећи графови бипартитни?



18. У следећем графу одредити да ли су следеће шетње стазе, путеви, циклуси или прости циклуси?

а)$v_1e_1v_2e_3v_3e_4v_3e_5v_4$

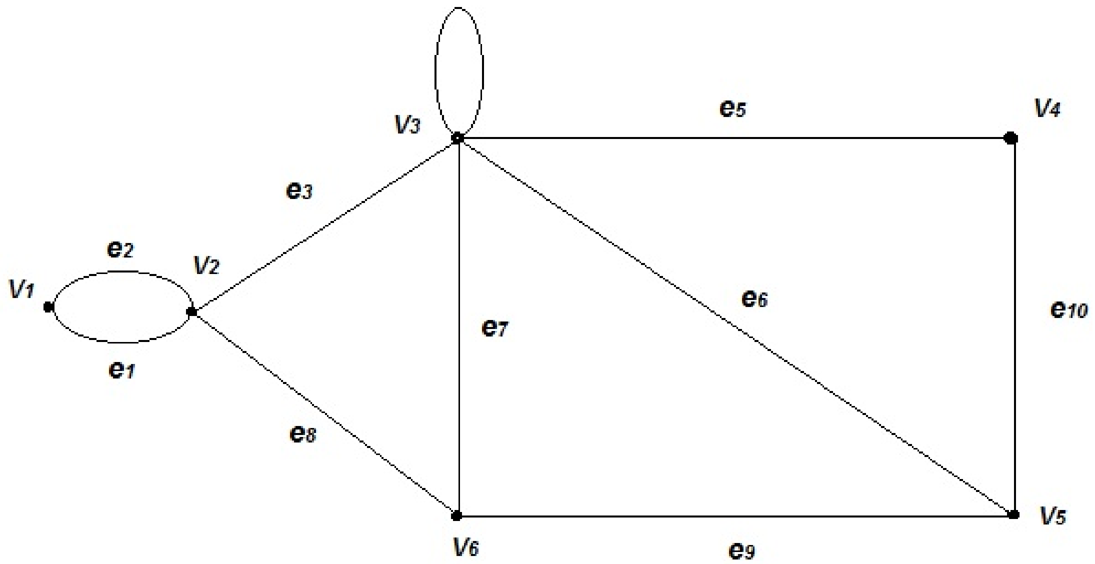
б)$v_2v_3v_4v_5v_6v_2$

в)$e_1e_3e_5e_5e_6$

г)$v_2v_3v_4v_5v_6v_3v_2$

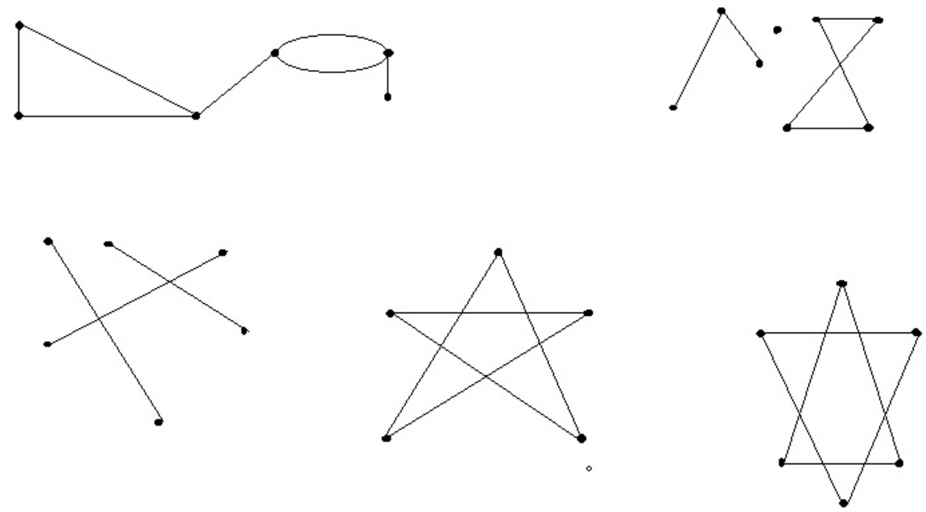
д)$v_2v_3v_4v_5v_3v_6v_2$

ђ) v_1

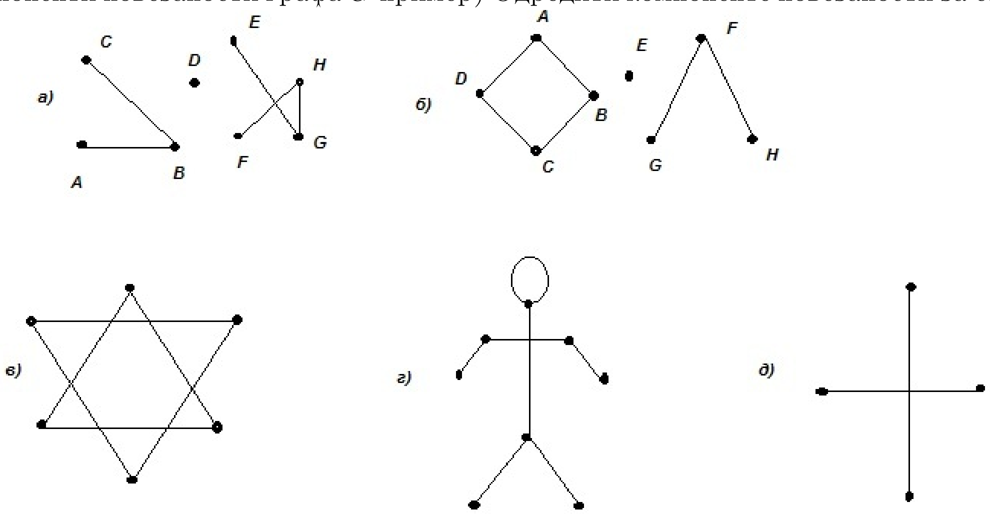


19. за домаћи још један задатак овог типа.

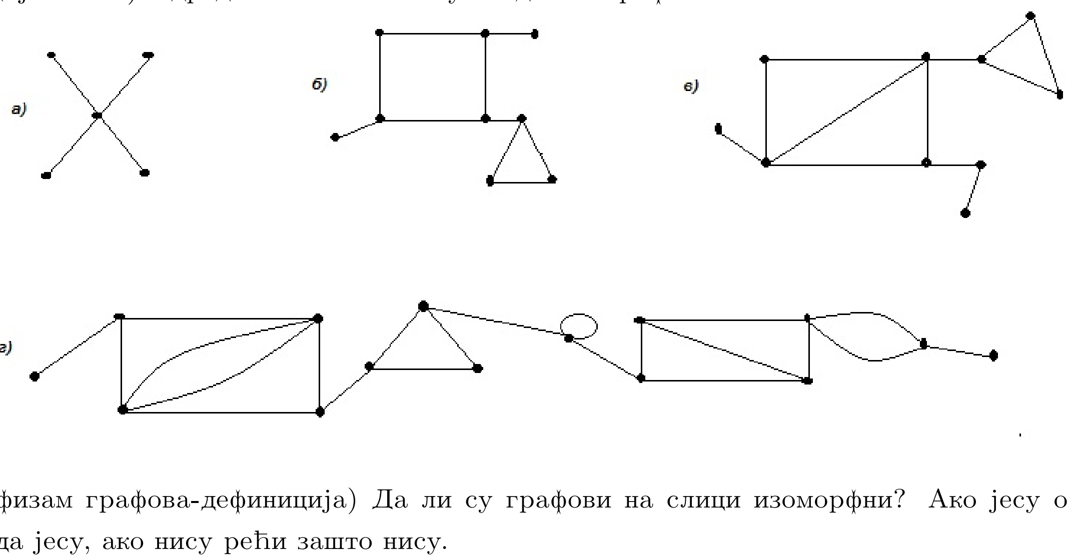
20.(дефиниција повезаности графа) Испитати да ли су следећи графови повезани:



21. (Број компоненти повезаности графа G-пример) Одредити компоненте повезаности за следеће графове:

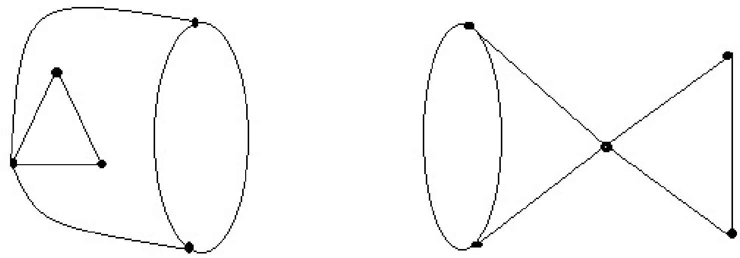


22.(дефиниција моста) Одредити све мостове у следећим графовима:

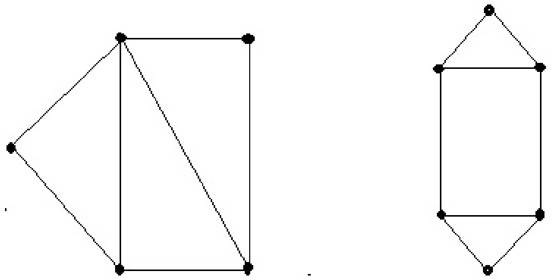


23.(Изоморфизам графова-дефиниција) Да ли су графови на слици изоморфни? Ако јесу образложити (доказати) да јесу, ако нису рећи зашто нису.

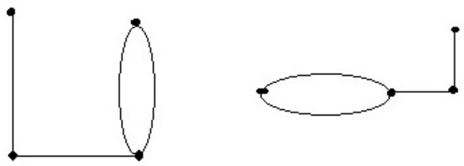
а)



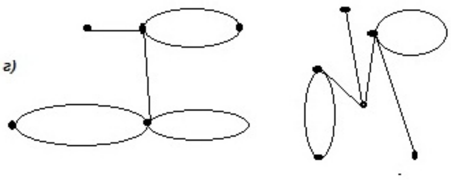
б)



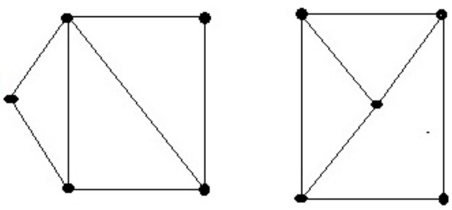
в)



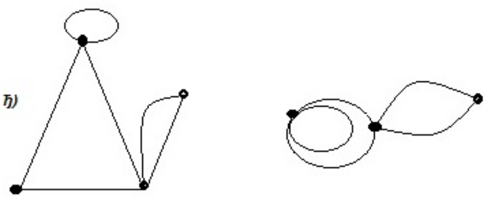
г)



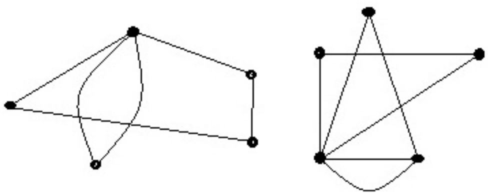
д)



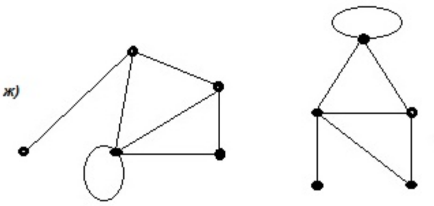
ђ)



е)

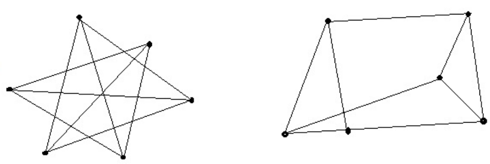


ж)

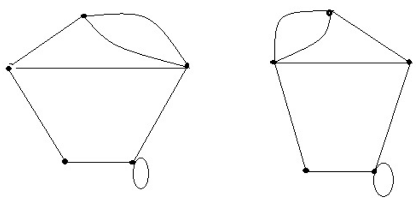


24. (Домаћи) Проверити изоморфност следећих графова:

а)

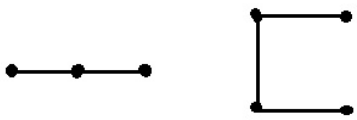


б)

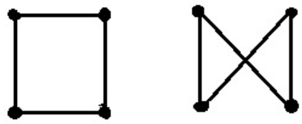


25. Да ли су следећи прости графови изоморфни?

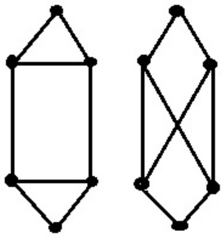
а)



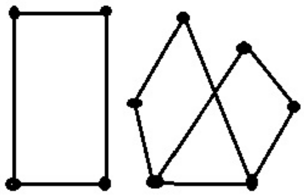
б)



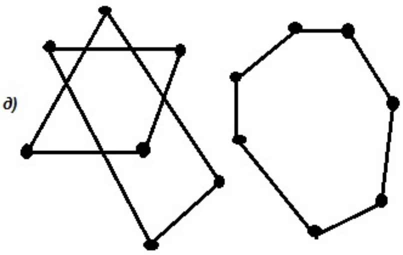
в)



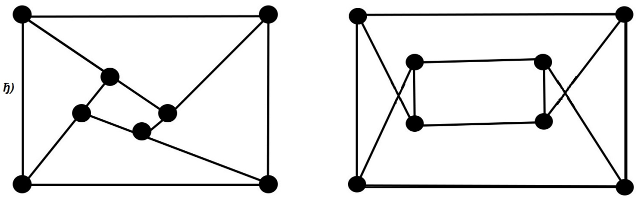
г)



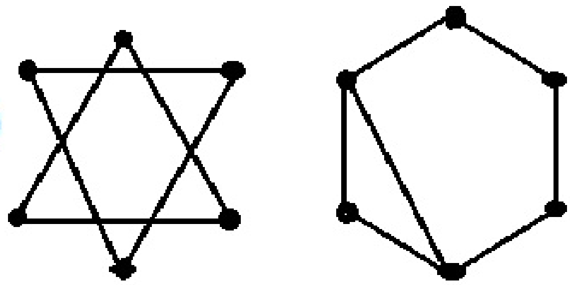
д)



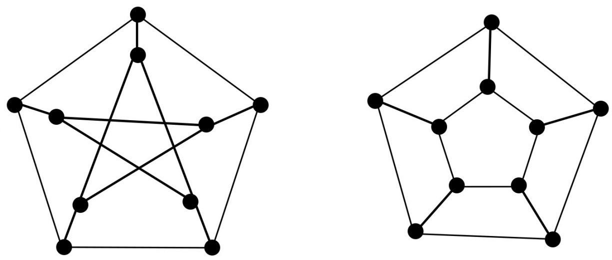
ђ)



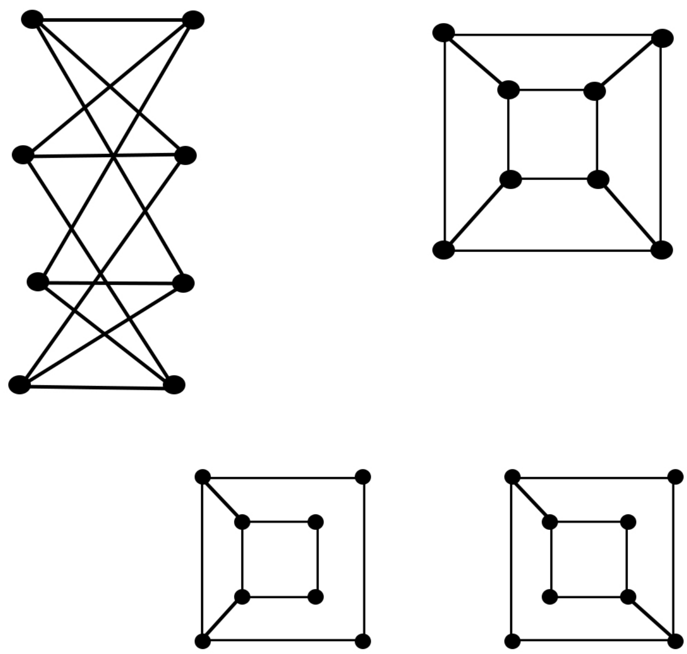
е)



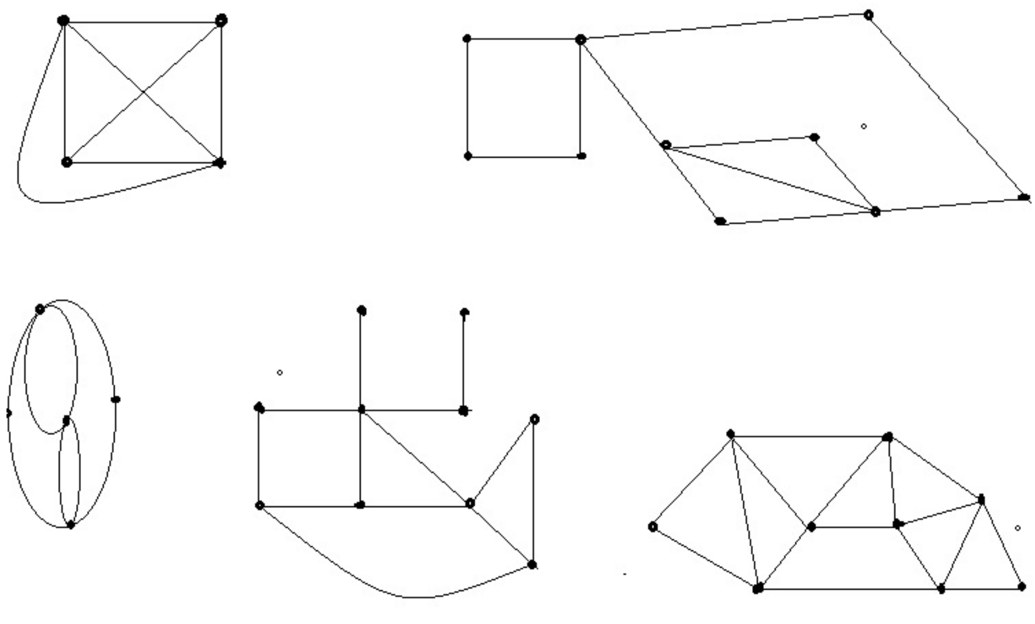
ж)

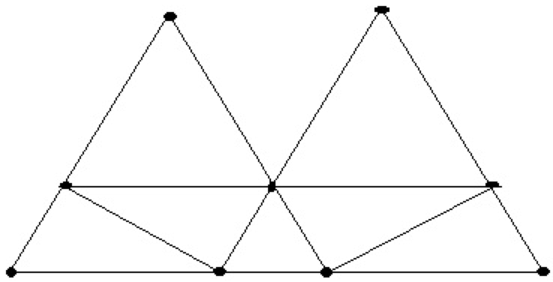


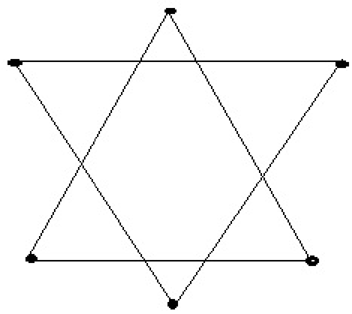
26. (Домаћи) Испитати изоморфност следећих графова:

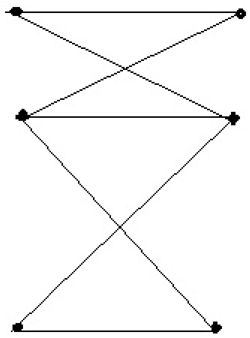


27. Испитати да ли граф има Ојлеров цикл и ако га има наћи га.

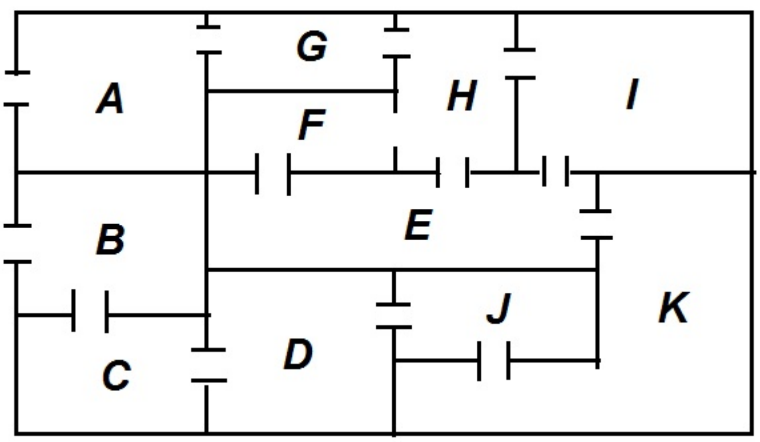




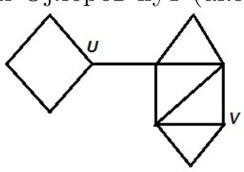


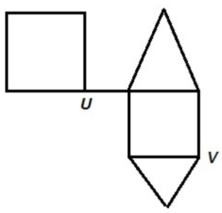


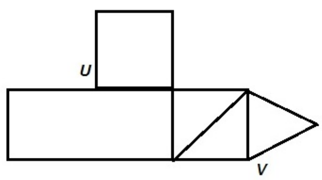
28. (Ојлеров пут) Да ли је могуће наћи пут од почетка A (собе) до краја B собе пролазећи кроз свака врата тачно једном? Наћи тај пут.



29. Одредити Ојлеров пут (ако постоји) од чвора U до чвора V.

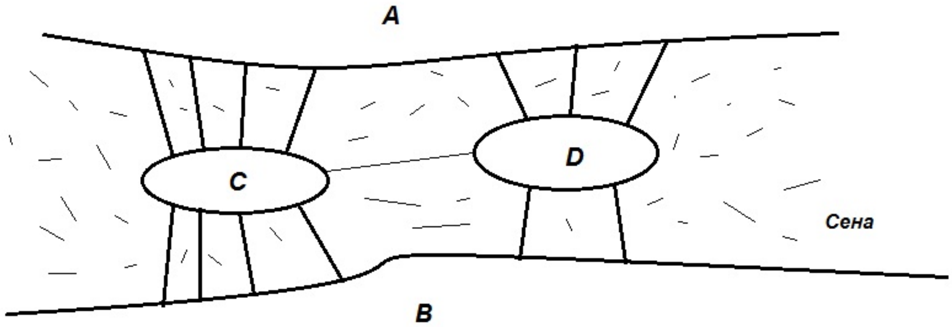






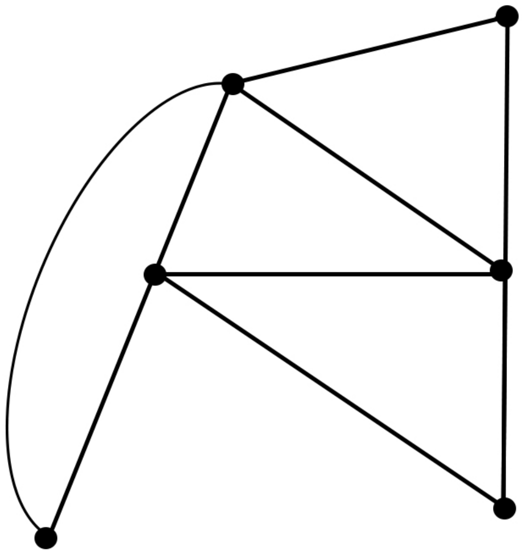
30. (Вратио сам се на Кенинсбершке мостове)

31.(План Париза) Да ли се Париз може обићи тако да преко сваког моста пређемо тачно једном?

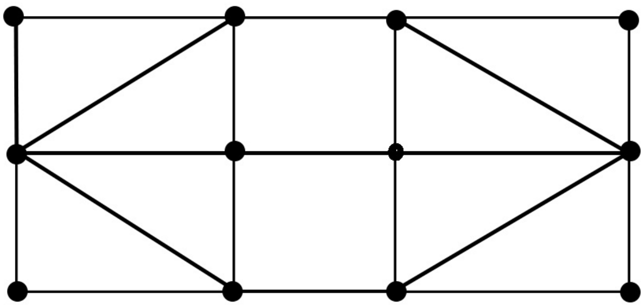


32. (*Fleury*-ев алгоритам)

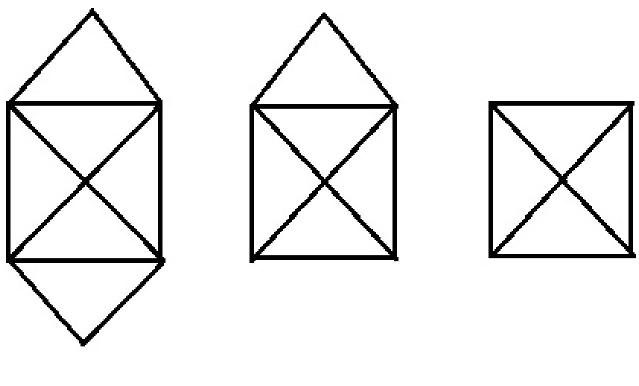
33. Одредити Ојлеров цикл на слици



34. Одредити Ојлеров пут у следећем графу

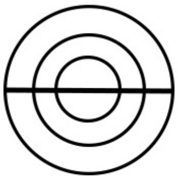


35. (Цртање слике у једном потезу) Граф који има највише два чвора непарног степена може се нацртати у једном потезу. Граф који има $2k$ непарних чворова црта се у k потеза.

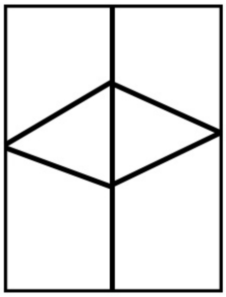


36. Нацртати следеће фигуре у једном потезу (ако је то могуће)

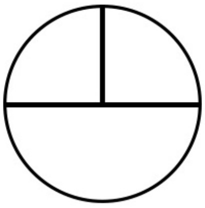
а)



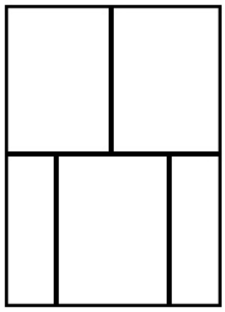
б)



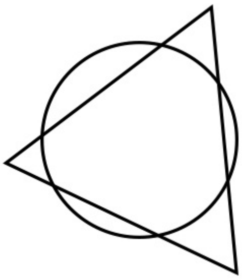
в)



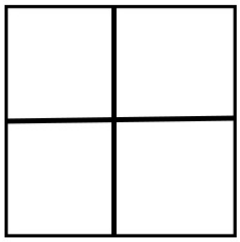
г)



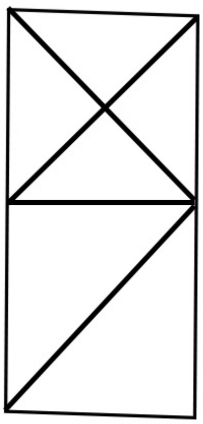
д)



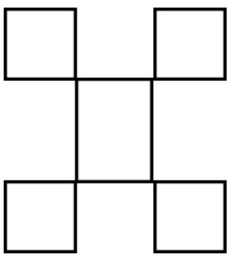
ђ)



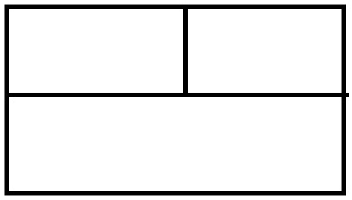
е)



ж)

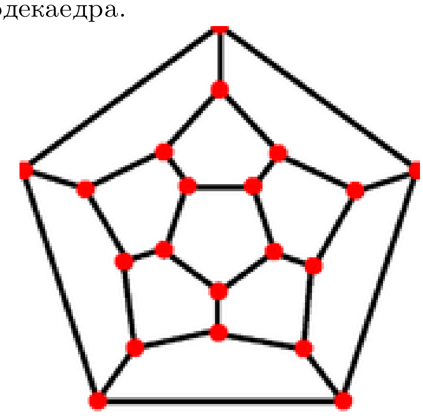


37. Да ли постоји проста затворена линија која пресеца сваку дуж на слици тачно једном?

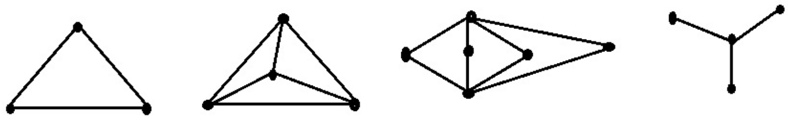


38. (Хамилтонови графови, дефиниција, проблем трговачког путника , $WilliamHamilton$)

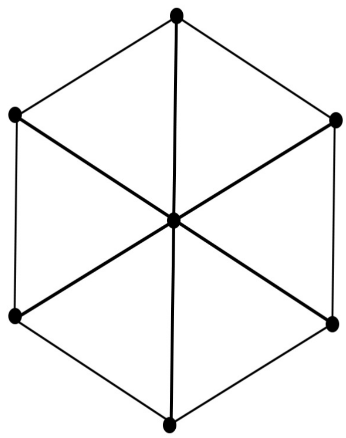
39. "Пут око света" на графу додекаедра.



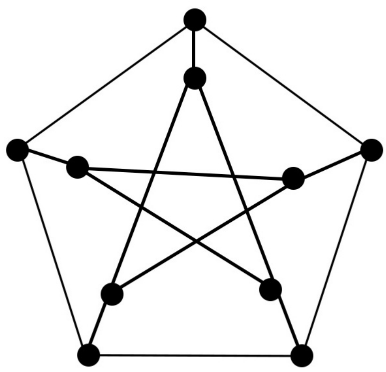
40. Испитати да ли су следећи графови Хамилтонови (Ојлерови)?



41. Испитати да ли граф има Хамилтонов циклус?

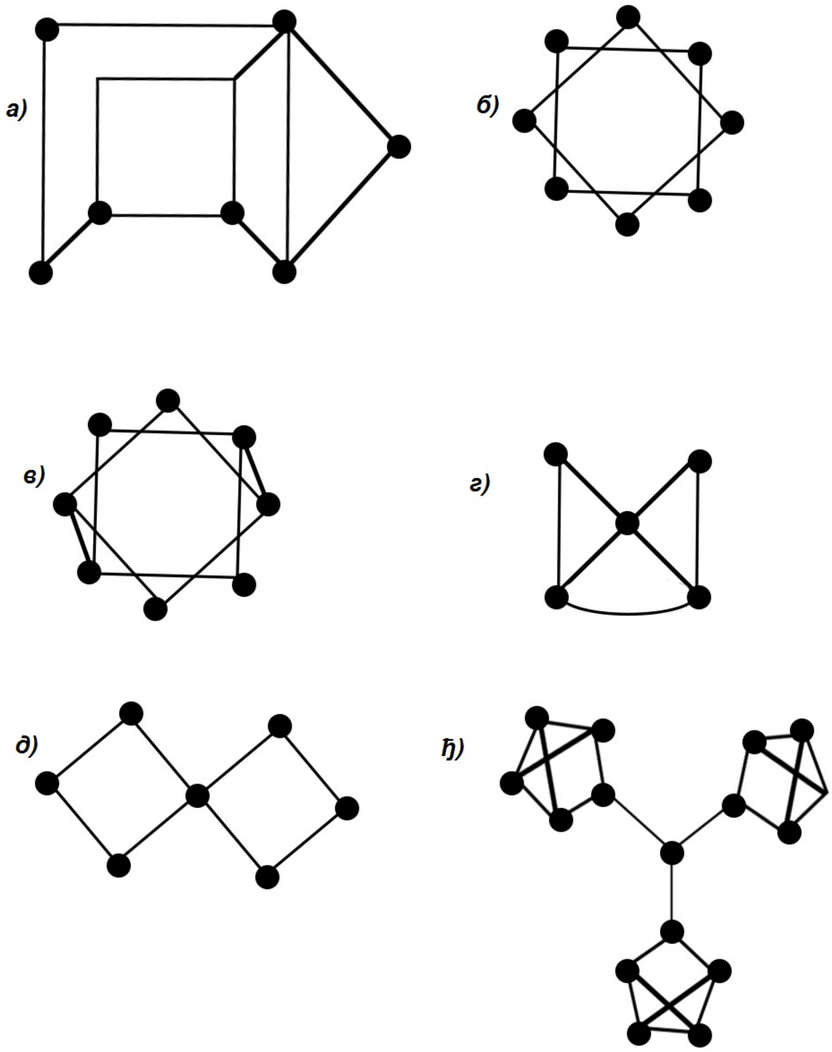


42. Петерсенов граф има Хамилтонов пут али не и Хамилтонов циклус.



43. (Диракова и Ореова теорема)

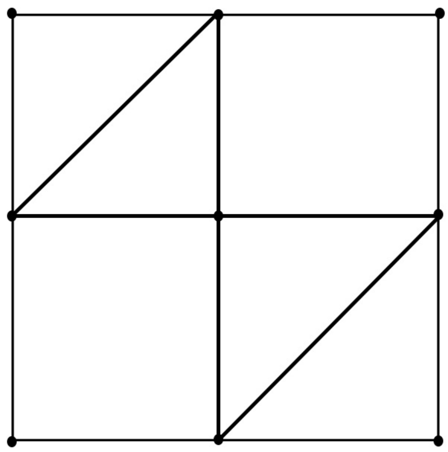
44. Одредити ако постоји Хамилтонов циклус у следећим графовима



45. Ако G има мост онда G нема Хамилтонов цикл. Ако компоненте добијене уклањањем моста имају Хамилтонове циклусе онда G има Хамитонов пут.

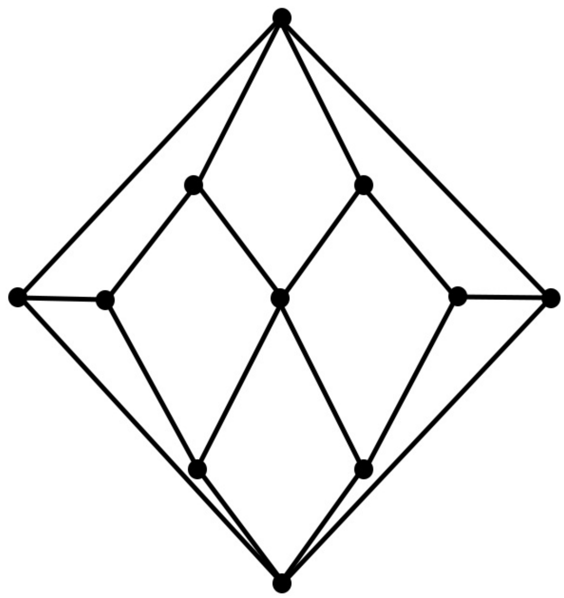
46. Ако у Хамилтоновом графу постоји чвор степена 2, тада обе гране инцидентне са њим морају бити део Хамилтоновог циклуса. Доказати.

47. Да ли је граф на слици Хамилтонов?

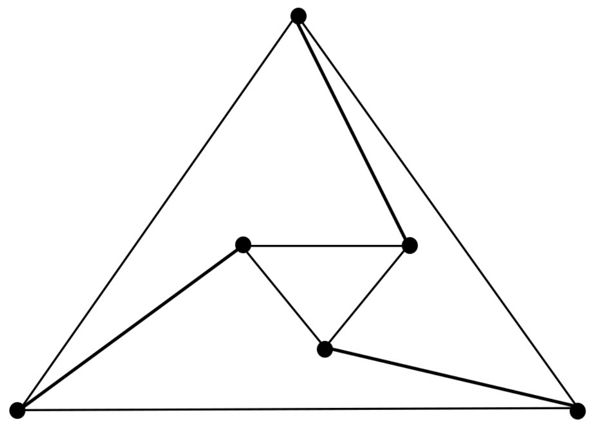


48. Нека је G бипартитан и Хамилтонов чији се скуп чворова V може партиционирати у скупове X и Y. Тада важи $|X| = |Y|$. Доказати.

49. Да ли је *Hershelov* граф Хамилтонов? (користећи претходни задатак)



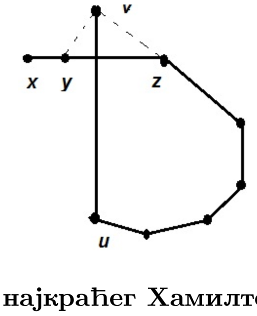
50. Да ли је граф на слици Ојлеров? Да ли је Хамилтонов?



51. Нацртати граф са 6 чворова који има Ојлеров циклус али не и Хамилтонов.

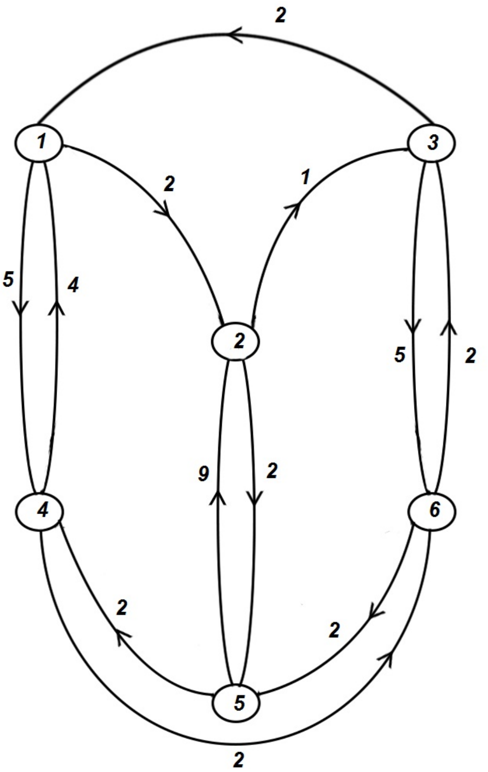
52. (Проблем трговачког путника) Дато је n градова и мрежа путева која их спаја. Трговачки путник треба да обиђе све градове и врати се у полазно место (тако да кроз сваки град прође тачно једном) а да притом пређе најмањи пут. Тразимо минималан Хамилтонов цикл. Навео сам примере како се проблем може решавати генерисањем свих пермутација скупа од n елемената (али је неефикасно), може се формулисати као задатак целобројног програмирања, може се користити алгоритам гранања и ограничавања (који има експоненцијалну сложеност) итд.

Хеуристике Хеуристика базирана на идејама прождрљивог алгоритма не даје добре резултате (конструисао сам пример зашто је то тако)



3-оптимална хеуристика. Налажење најкраћег Хамилтоновог цикла у задатом потпуном тежинском графу. Кораци. Пример

53.



54. Хала правоугаоног облика подељена је на $3x4$ квадратних соба. Из сваке собе може се прећи у суседну собу. Може ли човек да обиђе све собе тако да у свакој буде само једном и да се врати у собу одакле је кренуо?

Тежински графови и алгоритми најкраћег пута

Дрво (Стабло) - дефиниција.

Теорема1 Нека G има n чворова. G је дрво акко је повезан и има $n-1$ грану.

Теорема2 Свако дрво има бар 2 цвхора степена 1.

59. Да ли постоји дрво са 10 чворова и 12 грана?

60. Наћи сва неизоморфна стабла са 4 чвора.

61. Нацртати граф са 5 чворова и 4 гране а да није дрво.

62. Да ли наредни графови постоје?

а) Дрво са 9 чворова и 9 грана.

б) Граф без циклова са 9 чворова и 6 грана.

в) Повезан граф са 9 чворова и 9 грана.

г) Дрво са 6 чворова тоталног степена 14.

д) Дрво са 5 чворова тоталног степена 8.

ђ) Повезан граф са 6 чворова, 5 грана и има нетривијалан цикл.

е) Граф са 2 чвора једном граном а није дрво.

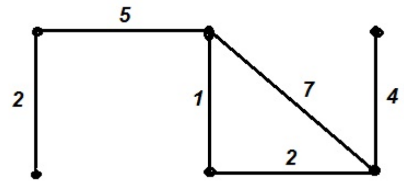
ж) Граф са 7 чворова и 4 гране а без циклова.

з) Граф са 6 чворова и 5 гране а није дрво.

и) Прост повезан граф са 6 чворова и 6 грана.

Разапињуће стабло - је подграф од G који садржи све чворове од G и уз то је још и дрво.

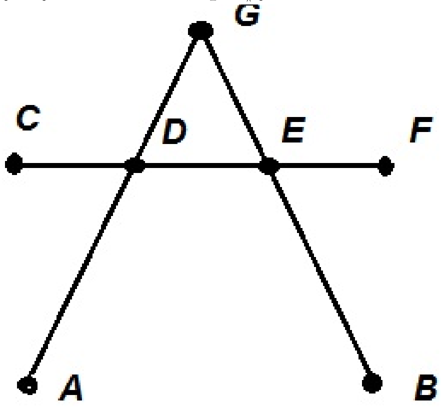
63. Одредити сва растојања разапињућег стабла следећег графа



$Minimum\ spaning\ tree\ problem$ - MST

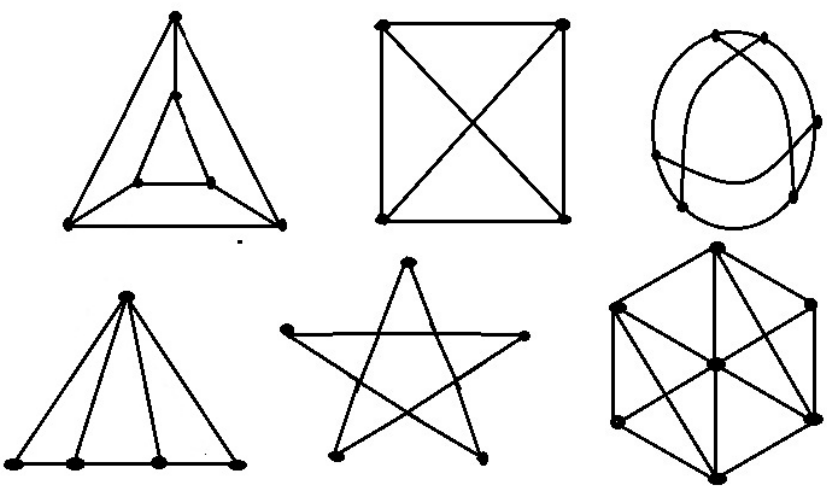
Дефиниција ексцентрицитета чвора у графу. Дефиниција дијаметра и радијуса графа.

67. Одредити дијаметар и радијус у следећем графу



Планарни графови

68. Испититати планарност следећих графова



Тврђење За сваки повезан планаран граф G са $n \geq 3$ чвора важи $3|V| - |E| \geq 6$.

Теорема G је планаран акко не садржи као подграф ни K_5 ни $K_{3,3}$ ни неку њихову потподелу.

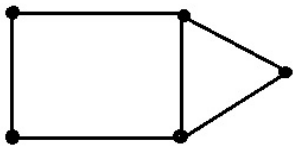
69. Доказати да K_5 није планаран.

Теорема $Vagner$

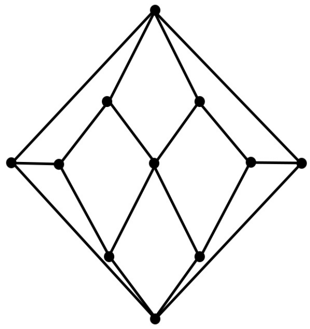
Хроматски број графа. Бојење графа. Хрома тски полином $C_G(\lambda)$, хрома тски број графа, примери

Теорема Граф је бипартитан акко не садржи непарне циклусе. (Сваки бипартитан граф је 2-обојив)

70. Пример за 3- обојив граф.



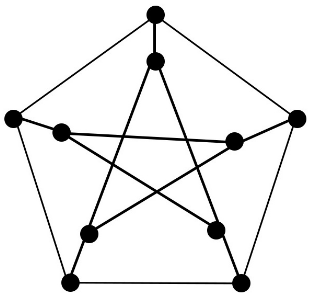
71. *Hershel*-ов граф је 2-обојив.



Тврђење За сваки граф G је $\gamma \leq \Delta + 1$.

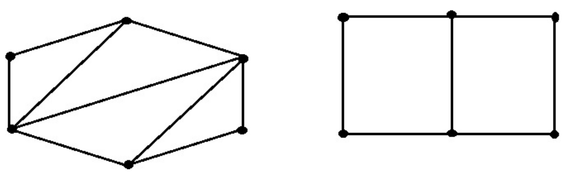
Теорема-*Brooks* Ако је G прост повезан, није потпун нити је непаран циклус, онда је $\gamma(G) \leq \Delta$.

72. Петерсенов граф је 3 - обојив.

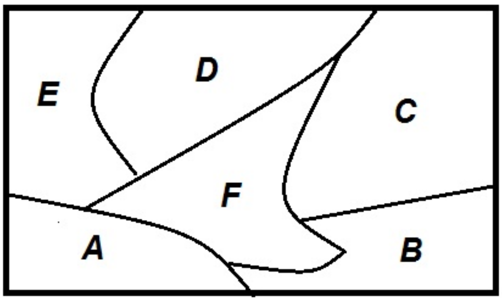


Похлепни алгоритам за бојење графова - примена у рачунарству. Пример.

73. Обојити следеће графове



74. Обојити следећу карту тако да никоје две суседне земље нису обојене истом бојом.



Представљање графова у рачунару. Матрице суседства код усмереног и неусмереног графа. Матрице инциденције код усмереног и неумсереног графа.

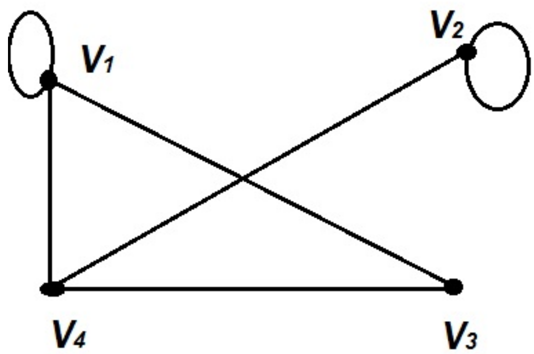
75. Нацртати граф дат матрицом суседства (матрица није симетрична)

0	1	1	0
1	1	0	2
0	0	1	1
2	1	0	0

76. Нацртати граф дат матрицом суседства (матрица је симетрична)

1	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

77. Одредити матрицу инциденције за граф

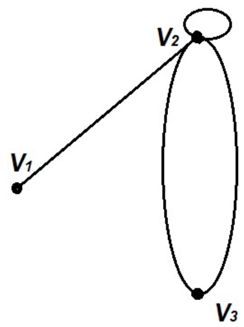


78. За дату матрицу инциденције одредити матрицу суседства.

-1	1	0	-1	0	0
0	0	1	0	1	0
0	0	-1	0	0	-1
1	-1	0	1	-1	0
0	0	0	0	0	1

Став Нека је A матрица суседства графа G. Тада је (i, j)-ти члан матрице A^k једнака броју (v_i, v_j) шетњи у G дужине k. Број свих шетњи дужине k једнак је суми свих чланова од A^k.

79. За дати граф G одредити матрицу суседства $A(G)$ и наћи све шетње дужине 2 између било која два чвора.


V_2
V_1
V_3