Diskretne strukture

Uvod

1. Ispit $100p = pismeni + usmeni$ (ispit je položen sa najmanje $51p$)
2. Pismeni ispit $50p$ (položen sa najmanje $26p$)
3. Usmeni ispit $50p$
4. Literatura
5. Predavanja i vežbe nisu obavezni ali su poželjni

Kombinatorika:

1. Skupovi. Particije brojeva i skupova. Prebrojavanja-osnovni principi.
2. Binomni koeficijenti. Binomna i polinomna teorema. Binomni identiteti.
3. Uredjeni i neuredjeni izbori elemenata.
4. Funkcije generatrise.
5. Rekurentne jednačine.

Grafovi:

1. Definicije i tipovi. Osnovne definicije i teoreme.
2. Izomorfizam grafova, šetnje, staze i putevi.
3. Stabla, minimalan razapinjuća stabla.
4. Ojlerovi grafovi, Flerijev algoritam.
5. Hamiltonovi grafovi, problem trgovačkog putnika.
6. Planaravni grafovi. Osnovne teoreme.
7. Predstavljanje grafova u računaru, matrice incidencije i susedstva.

Uvod-Skupovi

Skup je osnovni matematički pojam - Kolekcija objekata koje nazivamo elementi skupa. Oznake $A, B, C \dots$

1. $A = \{a, b, c, d \dots\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$, $a \in A$, $8 \in B$.
2. $C = \{x | x \ deljivo \ sa \ 5\}$, $\emptyset$- prazan skup.

Definicija

(Podskup $A \subseteq B$) Ako za svaki element skupa A i B važi da je istovremeno i element skupa B, kažemo da je skup A podskup skupa B i pišemo $A \subseteq B$ (Nekad kažemo da je B nadskup skupa A). Napomena: $\emptyset$ je podskup svakog skupa i svaki skup je svoj podskup.

Definicija

(Jednakost skupova $A = B$) Skupovi A i B su jednaki ako je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$. Onda pišemo $A = B$.

Definicija

(Pravi podskup $A \subset B$) Ako važi $A \subseteq B$ i $A \neq B$ onda kažemo da je A pravi podskup skupa B i pišemo $A \subset B$. (B pravi nadskup skupa A).

Skupovi-Uvod

1. Unija $A \cup B$
2. Presek $A \cap B$
3. Razlika $A \backslash B$
4. Simetrična razlika $A \Delta B$
5. Komplement skupa $\bar{A}$
6. Partitivni skup skupa A, $P(A)$ je skup svih podskupova skupa A. Koliko podskupova ima skup od n elemenata? Primer.
7. Dekartov prozivod skupova $A \times B$
8. Particija (razbijanje) skupa A je skup njenih nepraznih podskupova medju kojima su svaka dva disjunktna, dok je unija svih tih podskupova sam skup A. Primer.

Nije važno kojim redosledom navodimo elemente kao ni ako neki element navedemo više puta.

Funkcije-podsetnik

Definicija

Preslikavanje f skupa X u skup Y je podskup skupa $X \times Y$, takav da se svako $x \in X$ javalja tačno jedanput kao prva komponenta u elementima podskupa f. Pišemo $f : X \to Y$ ili $y = f(x)$. Ako je $(x, y) \in f$ kažemo da je x original a da je y slika. Skup X zovemo domen dok skup Y zovemo kodomen (f je definisana na svom domenu).

Preslikavanja f i g su jednaka ako imaju isti domen i ako je $f(x) = g(x)$ za svaki element x koji pripada domenu (Pišemo $f = g$).

1. $f : X \to Y$ je '$1-1$'(injekcija) ako važi $(\forall x, y \in X)\ f(x) = f(y) \implies x = y$.
2. $f : X \to Y$ je 'na' (surjekcija) ako važi $(\forall y \in Y, \exists x \in X)\ f(x) = y$.
3. $f : X \to Y$ je **bijekcija** ako je '$1-1$' i 'na'.

(Analiza 1) Ako je f bijekcija onda postoji njoj inverzna funkcija.

Definicija

(Beskonačan skup) Skup je beskonačan ako se može bijektivno preslikati na neki svoj pravi podskup. Skup je konačan ako nije beskonačan.

Kardinalnost

1. Skup $\mathbb{N}$.
2. (Euklidova teorema o prostim brojevima) Skup prostih brojeva je beskonačan.
3. Kardinalni broj konačnog skupa X jednak je broju elemenata tog skupa ($|X|$).
4. Za skupove A i B kažemo da imaju jednake kardinalne brojeve ako postoji bijekcija $f : A \to B$ (pišemo $|A| = |B|$).

NAPOMENA

Kardinalni brojevi različitih beskonačnih skupova nisu svi medjusobno jednaki. ($|\mathbb{N}| = \mathcal{N}_0$ alef nula, $|\mathbb{R}| = \mathcal{N}_1$ (ili c) continuum)

Definicija

(Prebrojiv skup) Skup A je **prebrojiv** *ako je iste karadinalnosti kao skup prirodnih brojeva $|A| = \mathcal{N}_0$. Za skup koji je konačan ili prebrojiv kažemo da je* **najviše prebrojiv**. *Za skup koji nije najviše prebrojiv kažemo da je* **neprebrojiv**.

Prebrojivost skupa

Beskonačana skup A je prebrojiv ako njegovi elementi mogu da da se predstave kao niz $a_1, a_2, a_3, \ldots$.

1. Skup $\mathbb{Z}$ je prebrojiv. $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$
2. Skup $\mathbb{Q}$ je prebrojiv (Kantor)
3. Skup $\mathbb{R}$ je neprebrojiv (Kantor)
4. Da li postoji skup sa karadinalnošću izmedju $\mathcal{N}_0$ i c? (Hipoteza kontinuuma, Koen 1964.)

Definicija

(Multiskup) Uredjeni par (A, f) koji čine skup A i funkcija $f : A \to \mathbb{N}$ nazivamo multiskup. To je skup kod kojeg je svakom elementu $a \in A$ pridružena njegova slika $f(a)$ koja predstavlja broj ponavaljanja elementa a.

Osnovni principi prebrojavanja

1. Princip jednakosti
2. Princip zbira
3. Princip prozivoda
4. Dirihleov princip
5. Formula uključenja i isključenja