Diferencijalne jednačine drugog i višeg reda

Uvod

Posmatramo DJ n-tog reda $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ koje se mogu zapisati u obliku $y^{(n)} = f(x, y', ..., y^{(n-1)})$ $(\bigstar)$.

Teorema

Neka su u jednačini $(\bigstar)$ *funkcija* f *i njeni parcijalni izvodi neprekidni u nekoj oblasti koja sadrži tačku određenu vrednostima* $x = x_0, y = y_0, ..., y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$. *Tada postoji jeinstveno rešenje* $y = y(x)$ *jednačine* $(\bigstar)$ *koje zadovoljava uslove* $y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y_0', ..., y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$.

Uslovi $y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y_0', ..., y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$ se nazivaju **početni uslovi**.

Definicija

Opšte rešenje DJ *($\bigstar$) je familija funkcija $y = \varphi(x, C_1, ..., C_n)$ koja zavisi od konstanti $C_1, ..., C_n$.*

Za zadate početne uslove postoje konstance $C_1 = C_1^0, ..., C_n = C_n^0$ takve da $\varphi(x, C_1, ..., C_n)$ zadovoljava te uslove. ***Partikularno rešenje*** *jednačine ($\bigstar$) je ono rešenje koje se dobija iz opšteg stavljajući $C_1 = C_1^0, ..., C_n = C_n^0$.*

Svođenje na DJ nižeg reda

1. $y^{(n)} = f(x)$ gde je $f(x)$ neprekidna funkcija. Rešenje se dobija integrisanjem n puta:
$y = \int dx \int dx ... \int f(x)dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + ... + C_{n-1}x + C_n$.
2. $y'' = f(x, y')$ - Uvodi se smena $z = y' \Rightarrow z' = y'' \Rightarrow z' = f(x, z)$ je jednačina prvog reda. Ako je njeno rešenje $z = \varphi(x, C_1)$ onda se rešavanjem $y' = \varphi(x, C_1)$ dobija opšte rešenje polazne:
$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2$.
3. $y'' = f(y, y')$ - Uvodi se smena
$y' = p(y) \Rightarrow y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot y$. Zamenom u polaznu jednačinu dobijamoDJ prvog reda: $p \cdot \frac{dp}{dy} = f(y, p)$. Ako je njeno rešenje $p = \varphi(y, C_1)$, vraćanjem smene
$y' = \frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$ dobijamo opšte rešenje polazne:
$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = \int dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$.

Linearne DJ višeg reda

Definicija

Linearna diferencijalna jednačina (LDJ) *n**-tog reda** je oblika $y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + ... + f_n(x)y = h(x)$ gde su $f_1, ..., f_n$ i h zadate funkcije.*

*Ako je $h \equiv 0$ onda je to **homogena LDJ** n**-tog reda**.*

Definicija

*Ako su $f_1, ..., f_n$ realne konstante dobija se $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = h(x)$ **LDJ** n**-tog reda sa konstantnim koeficijentima** (LDJsKK).*

Definicija

*Za funkcije $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ definisane na (a, b) se kaže da su **linearno zavisne** na (a, b) ako postoje konstante $\alpha_1, ..., \alpha_n$ od kojih je bar jedna različita od 0 takve da $\alpha_1\varphi_1(x) + ... + \alpha_n\varphi_n(x) = 0$ za svako $x \in (a, b)$.*

*Ako funkcije $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ nisu linearno zavisne onda su **linearno nezavisne**.*

Definicija

Za funkcije $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ *funkcionalna determinanta*

$$W(\varphi_1, ..., \varphi_n)(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & ... & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & ... & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & ... & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

zove se ***Vronskijeva determinanta*** *ili* ***Vronskijan****.*

Teorema

Rešenja $y_1, ..., y_n$ *homogene LDJ n-tog reda sa konstantnim koeficijentima su linearno zavisna akko je* $W(\varphi_1, ..., \varphi_n)(x) = 0, \forall x \in (a, b)$*, a linearno nezavisna akko je* $W(\varphi_1, ..., \varphi_n)(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$

Homogene LDJ drugog reda sa konstantnim koeficijentima

$$\underbrace{y'' + py' + qy}_{L(y)} = 0, \qquad p, q \in \mathbb{R} \qquad\qquad (\heartsuit)$$

Teorema

Ako su y_1 i y_2 rešenja jednačine $(\heartsuit)$ onda je $C_1 y_1 + C_2 y_2,\ C_1, C_2 = const$ takođe rešenje jednačine $(\heartsuit)$.

Dokaz na času.

Teorema

Ako su y_1 i y_2 dva linearno nezavisna rešenja jednačine $(\heartsuit)$ onda je $y = C_1 y_1 + C_2 y_2,\ C_1, C_2 = const$ njeno opšte rešenje.

Na osnovu teoreme rešavanje DJ (♡) se svodi na traženje linearno nezavisnih partikularnih rešenja.

Potražimo partikularna rešenja u obliku $y = e^{\lambda x},\ \lambda = const$
$\Rightarrow y' = \lambda e^{\lambda x},\ y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

Zamenom u (♡) $L(y) = y'' + py' + qy$:

$$\begin{aligned}\Rightarrow L(e^{\lambda x}) &= \lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x}\\ &= \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0\\ &\Rightarrow \lambda^2 + p\lambda + q = 0\end{aligned}$$

$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ se zove **karakteristična jednačina** DJ (♡).

Prema prirodi karakteristične jednačine, razlikujemo 3 slučaja:

$\boxed{1.\ slucaj}$

Koreni karakteristične jednačine su realni i različiti:
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \ \lambda_1 \neq \lambda_2$.

Tada su partikularna rešenja: $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ i $y_2 = e^{\lambda_2 x}$.

Važi da je $W(y_1, y_2) \neq 0$ pa su y_1 i y_2 linearno nezavisna partikularna rešenja (dokaz na času!).

Na osnovu teoreme,

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

je opšte rešenje diferencijalne jednačine ($\heartsuit$).

$\boxed{2.\ slucaj}$

Koreni karakteristične jednačine su realni i jednaki:
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 = \lambda_2 = s.$

Tada su partikularna rešenja: $y_1 = e^{sx}$ i $y_2 = xe^{sx}$.

Važi da je $W(y_1, y_2) \neq 0$ pa su y_1 i y_2 linearno nezavisna partikularna rešenja (dokaz na času!).

Na osnovu teoreme,

$$y = C_1 e^{sx} + C_2 x e^{sx}$$

je opšte rešenje jednačine ($\heartsuit$).

3. *slucaj*

Koreni karakteristične jednačine su kompleksni brojevi:
$\lambda_1 = \alpha + i\beta,\ \lambda_2 = \alpha - i\beta,\ \beta \neq 0.$

Tada su partikularna rešenja:
$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x}$
$y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x}.$

Primenimo Ojlerovu formulu $e^{\pm i\beta x} = \cos(\beta x) \pm i \sin(\beta x)$:
$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x) + i e^{\alpha x} \sin(\beta x)$
$y_2 = e^{\alpha x} \cos(\beta x) - i e^{\alpha x} \sin(\beta x)$
Opšte rešenje diferencijalne jednačine ($\heartsuit$) je

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Primeri

Primer (Na času)

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

- $y'' - 4y' + 3y = 0;$
- $y'' - y = 0;$
- $y'' + y = 0;$
- $y'' - 4y' + 5y = 0;$
- $y'' - 25y = 0;$
- $y'' + 2y' + y = 0.$

Nehomogene LDJ drugog reda sa konstantnim koeficijentima

Razmatrajmo nehomogenu linearnu DJ drugog reda sa konstantnim koeficijentima:

$$y'' + py' + qy = f(x). \qquad (\heartsuit)$$

Njoj odgovara homogena linearna DJ drugog reda sa konstantnim koeficijentima:

$$y'' + py' + qy = 0. \qquad (H)$$

Teorema

Ako je y_p jedno partikularno rešenje diferencijalne jednačine $(\heartsuit)$ i ako je y_h opšte rešenje diferencijalne jednačine (H) tada je

$$y = y_h + y_p$$

opšte rešenje diferencijalne jednačine $(\heartsuit)$.

Dokaz[Na času]: (1) Da li je y rešenje od $(\heartsuit)$? (2) Da li je y opšte rešenje od $(\heartsuit)$?

Nehomogene LDJ drugog reda sa konstantnim koeficijentima

Razmatrajmo nehomogenu linearnu DJ drugog reda sa konstantnim koeficijentima:

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x). \qquad (\clubsuit).$$

Teorema

Ako su y_{p1} i y_{p2} redom partikularna rešenja diferencijalnih jednačina

$$y'' + py' + qy = f_1(x), \;\; y'' + py' + qy = f_2(x)$$

i ako je y_h opšte rešenje diferencijalne jednačine (H) tada je

$$y = y_h + y_{p1} + y_{p2}$$

opšte rešenje diferencijalne jednačine $(\clubsuit)$.

- Metoda neodredjenih koeficijenata
- Lagranžov metod varijacije konstanti

Metod neodredjenih koeficijenata za DJ $y'' + py' + qy = f(x)$

Ako je

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x\right]$$

tada je

$$y_p = x^m \cdot e^{\alpha x}\left[(a_p x^p + \ldots + a_0)\cos\beta x + (b_p x^p + \ldots + b_0)\sin\beta x\right]$$

gde je $p = \max\{n, l\}$ *a broj m je:*

- $m = 0$ *ako* $\alpha + i\beta$ *nije koren karakteristične jednačine od* $y'' + py' + qy = 0$.
- $m = 1$ *ako je* $\alpha + i\beta$ *koren karakteristične jednačine od* $y'' + py' + qy = 0$ *višestrukosti* 1.
- $m = 2$ *ako je* $\alpha + i\beta$ *koren karakteristične jednačine od* $y'' + py' + qy = 0$ *višestrukosti* 2.

Primeri

Primer (Na času)

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

- $y'' - y = x^2 - x + 1;$
- $y'' + y = x \sin x;$
- $y'' - 6y' + 9y = 4xe^{5x} = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0;$
- $y'' - 2y' + 10y = \sin 3x + e^x;$
- $y'' - 7y' + 12y = e^{2x} + x^2,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1;$

Linearne DJ n-tog reda sa konstantnim koeficijentima

Lagranžov metod varijacije konstanti

Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu oblika

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + f_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + f_n(x)y = h(x) \qquad (\clubsuit)$$

gde su $f_1, f_2, \ldots, f_n, h$ zadate funkcije.

Neka je

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + f_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + f_n(x)y = 0 \qquad (H)$$

homogena diferencijalna jednačina koja odgovara jednačini ($\clubsuit$) i neka je njeno opšte rešenje $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x)$ gde su $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ i $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ linearno nezavisne funkcije. Tada je opšte rešenje diferencijalne jednačine ($\clubsuit$) dato sa

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x)$$

gde funkcije $C_1(x), \ldots, C_n(x)$ odredjujemo iz sistema:

Lagranžov metod varijacije konstanti

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0 \\ C_1'(x)y_1'' + C_2'(x)y_2'' + \ldots + C_n'(x)y_n'' = 0 \\ \vdots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = h(x) \end{cases}$$

Primer (Na času)

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}.$$

Primer (Za domaći)

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y'' + y = \tan x.$$