Diferencijalne jednačine prvog reda

Uvod

Jednačina u kojoj figuriše nezavisna promenljiva x, funkcija y i njeni izvodi $y', y'', ..., y^{(n)}$ u obliku

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

naziva se **diferencijalna jednačina** n-tog reda. Najviši red (n) izvoda je red diferencijalne jednačine.

Problem je da se odredi nepoznata funkcija y, tj. **rešenje (funkcija $y = y(x)$) diferencijalne jednačine** koje zadovoljava polaznu jednačinu za svako x.

- Jednačina u kojima figuriše funkcija jedne nezavisne promenljive $y = f(x)$ i njeni izvodi naziva se **obična diferencijalna jednačina**.
- Jednačina u kojima figuriše funkcija više promenljivih $y = f(x_1, ..., x_n)$ i njeni parcijalni izvodi naziva se **parcijalna diferencijalna jednačina**.

Diferencijalne jednačine prvog reda

Diferencijalna jednačina prvog reda je oblika

$$F(x, y, y') = 0.$$

Pretpostavimo da se jednačina može zapisati u obliku

$$y' = f(x, y).$$

Nameću se dva pitanja:

1. Da li postoji rešenje jednačine?
2. Ako postoji rešenje, da li je jedinstveno?

Teorema

Neka je data jednačina $y' = f(x, y)$ pri čemu je $f(x, y)$ definisana i neprekidna u oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$. Za proizvoljnu tačku $(x_0, y_0) \in D$ postoji jedinstveno rešenje $y = \varphi(x)$ jednačine koje zadovoljava uslov $y = y_0$ za $x = x_0$, tj. $y(x_0) = y_0$.

Jednačina $y' = f(x, y)$ ima beskonačno mnogo rešenja. Uslov $y(x_0) = y_0$ naziva se **početni (Košijev) uslov** (Oznaka: $y(x_0) = y_0$ ili $y|_{x=x_0} = y_0$).

Definicija

Opšte rešenje DJ *$F(x, y, y') = 0$ je familija funkcija $y = \varphi(x, C)$ koje zavise od proizvoljne konstante C i koje zadovoljavaju jednačinu $F(x, y, y') = 0$ za svako x.*

Za dati početni uslov $y|_{x=x_0} = y_0$ postoji konstanta $C = C_0$ takva da $y = \varphi(x, C_0)$ zadovoljava polaznu jednačinu. Svako rešenje $y = \varphi(x, C_0)$ polazne jednačine dobijeno iz opšteg rešenja tako što se parametru C dodeljuje konkretna vrednost C_0 naziva se ***partikularno rešenje DJ****.*

Diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive

Diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive *je oblika*

$$f(x)dx + g(y)dy = 0,$$

gde su f i g neprekidne funkcije.

(Znamo da je $y' = \frac{dy}{dx}$.) Jednačina $g(y)dy = -f(x)dx$ se može posmatrati kao jednakost dva diferencijala. Tada se njihove primitivne funkcije razlikuju za konstantu:
$\int g(y)dy = -\int f(x)dx + C$.

Primer (Na času)

Rešiti diferencijalnu jednačinu $y' - 3x^2 = 0$ a zatim odrediti ono rešenje koje zadovoljava početni uslov $y(0) = 1$.

Primer (Na času)

Rešiti diferencijalnu jednačinu $xy' = y - xy \sin x$.

Homogena diferencijalna jednačina

Definicija

Funkcija $f(x,y)$ se naziva ***homogenom funkcijom*** *ako za svako $k \in \mathbb{R}$ važi $f(kx,ky) = f(x,y)$.*

Definicija

DJ $y' = f(x,y)$ je ***homogena DJ*** *ako je $f(x,y)$ homogena funkcija.*

Ako u $f(x,y) = f(kx,ky)$ izaberemo $k = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow y' = f(x,y) = f(kx,ky) = f(1, \frac{y}{x}) \equiv g(\frac{y}{x})$

$\Rightarrow y' = g(\frac{y}{x})$.

Uvedimo smenu $u = \frac{y}{x}$. Tada je:

$y' = g(\frac{y}{x}), u = \frac{y}{x}$

$$\begin{aligned} u = \frac{y}{x} &\Rightarrow y = u \cdot x \\ &\Rightarrow y'_x = u'_x \cdot x + u \cdot 1 \\ &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot x + u \\ &\Rightarrow g(u) = \frac{du}{dx} \cdot x + u \\ &\Rightarrow \frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

Dobijena je DJ sa razvojenim promenljivim po u
$\Rightarrow \int \frac{du}{g(u)-u} = \int \frac{dx}{x} + C$. Vraćanjem smene $u = \frac{y}{x}$ dobija se opšte rešenje polazne jednačine.

Primer (Na času)

(a)Rešiti diferencijalnu jednačinu $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$ *a zatim odrediti ono rešenje koje zadovoljava početni uslov* $y(1) = e$.
(b) Rešiti $y' = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

Linearna diferencijalna jednačina prvog reda

Linearna diferencijalna jednačina je oblika

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

gde su $P(x)$ i $Q(x)$ neprekidne funkcije.

Rešenje tražimo u obliku $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ gde su $u(x)$ i $v(x)$ funkcije po x. Pri tom, $v(x)$ biramo na pogodan način, a $u(x)$ na osnovu polazne jednačine.

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot v + \frac{dv}{dx} \cdot u$$

Zamenimo u polaznu jednačinu:

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad \Rightarrow \quad \overbrace{\frac{du}{dx} \cdot v + \frac{dv}{dx} \cdot u}^{y'} + P(x) \cdot \overbrace{u \cdot v}^{y} = Q(x)$$

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} \cdot v + \frac{dv}{dx} \cdot \underline{u} + P(x) \cdot \underline{u} \cdot v = Q(x)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{dv}{dx} + P(x) \cdot v\right)}\cdot u + \frac{du}{dx} \cdot v = Q(x) \qquad (\clubsuit)$$

Izaberemo $v(x)$ tako da $(\frac{dv}{dx} + P(x) \cdot v) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} + P(x) \cdot v = 0 &\Rightarrow \frac{dv}{dx} = -P(x) \cdot v \\ &\Rightarrow \frac{dv}{v} = -P(x) \cdot dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int P(x) \cdot dx \\ &\Rightarrow \ln|v| = -\int P(x) \cdot dx \\ &\Rightarrow v = e^{-\int P(x) \cdot dx} \end{aligned}$$

Vratimo se u (♣) i imamo :
$\underbrace{\left(\frac{dv}{dx} + P(x) \cdot v\right)}_{0} \cdot u + \frac{du}{dx} \cdot v = Q(x)$

$$\Rightarrow 0 \cdot u + \frac{du}{dx} \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$
$$\Rightarrow du = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \cdot dx$$
$$\Rightarrow \int du = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \cdot dx + C$$
$$\Rightarrow u = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \cdot dx + C$$

Vratimo smenu $y = u \cdot v,\ \ v = e^{-\int P(x)dx}$ i dobijamo opšte rešenje linearne DJ prvog reda:

$$\Rightarrow y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left(C + \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \cdot dx\right)$$

Primer (Na času)

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine
$y'(x^2-2x+2)-\frac{x(x^2-2x+2)}{1+x^2}y = x\sqrt{1+x^2}.$

Primer (Na času)

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'-\frac{y}{x}=x^2.$

Primer (Za domaći)

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine
$y'\cos x - y\sin x = x^3e^{x^2}.$

Diferencijalna jednačina oblika $y' = f\left(\frac{a_1x+a_2y+a_3}{b_1x+b_2y+b_3}\right)$

- **1. Slučaj** kada je $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, smenama $x = X + \alpha_1$, $y = Y + \alpha_2$, $dx = dX$, $dy = dY$, $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX} = Y'$ imamo da je početna jednačina oblika:

$$y' = f\left(\frac{a_1(X+\alpha_1) + a_2(Y+\alpha_2) + a_3}{b_1(X+\alpha_1) + b_2(Y+\alpha_2) + b_3}\right)$$

$$= f\left(\frac{a_1X + a_2Y + \overbrace{a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3}^{=0}}{b_1X + b_2Y + \underbrace{b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3}_{=0}}\right)$$

$$= f\left(\frac{a_1X + a_2Y}{b_1X + b_2Y}\right) = f\left(\frac{a_1 + a_2\frac{Y}{X}}{b_1 + b_2\frac{Y}{X}}\right) \quad \textit{homogena D.J.}$$

gde α_1 i α_2 odredjujemo iz sistema linearnih jednačina:

$$\begin{cases} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3 = 0 \\ b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3 = 0. \end{cases}$$

Diferencijalna jednačina oblika $y' = f\left(\frac{a_1x+a_2y+a_3}{b_1x+b_2y+b_3}\right)$

Primer (Na času)

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

- **2. Slučaj** kada je $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, smenom $b_1x + b_2y + b_3 = t$ gde je $t = t(x)$ data jednačina se svodi na jednačinu koja razdvaja promenljive.

Primer (Na času)

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' = \frac{4x+2y+3}{6x+3y-2}$.

Primer (Za domaći)

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' = \frac{2x+y+1}{4x+2y-3}$.

Bernulijeva diferencijalna jednačina

Razmatrao je prvi put Jakob Bernuli u svom radu 1695. godine a prvo rešenje (koje se i danas koristi) dao je Lajbnic.

Bernulijeva diferencijalna jednačina je oblika

$$y' + P(x) \cdot y = y^n \cdot Q(x)$$

gde su $P(x)$ *i* $Q(x)$ *neprekidne funkcije i* $n \in \mathbb{R}, \ n \neq 0, 1$

Za $n = 0, 1$ to je linearna DJ.

$$\begin{aligned} y' + P(x) \cdot y &= y^n \cdot Q(x) && / : y^n \\ y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} &= Q(x) && (\clubsuit) \end{aligned}$$

Uvedemo smenu:

$$u = y^{1-n} \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{du}{dx} = (1-n)y^{1-n-1}y' = (1-n)\underbrace{y^{-n}y'}$$

$$\Rightarrow y^{-n}y' = \frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{1-n}$$

Zamenimo ovo u $(\clubsuit)$:

$$\underbrace{y^{-n}y'}+P(x)\underbrace{y^{1-n}}_{u}=Q(x) \qquad (\clubsuit)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{1-n}+P(x)u=Q(x) \qquad /\cdot(1-n)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx}+\underbrace{(1-n)P(x)}_{p(x)}u=\underbrace{(1-n)Q(x)}_{q(x)} \text{ ovo je linearna DJ po } u$$

za koju znamo opšte rešenje:

$$u=e^{-\int(1-n)P(x)dx}\left(C+\int(1-n)Q(x)\cdot e^{\int(1-n)P(x)dx}\cdot dx\right)$$

Vratimo smenu $u=y^{1-n}$ i dobijamo opšte rešenje:

$$\Rightarrow y^{1-n}=e^{(n-1)\int P(x)dx}\left(C+(1-n)\int Q(x)\cdot e^{(1-n)\int P(x)dx}\cdot dx\right)$$

ili

$$y(x)=\sqrt[1-n]{e^{(n-1)\int P(x)dx}\left(C+(1-n)\int Q(x)\cdot e^{(1-n)\int P(x)dx}\cdot dx\right)}.$$

Primer (Na času)

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$.

Primer (Na času)

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $(x^2 \ln y - x)y' = y$.

Primer (Za domaći)

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $xy' + 2y = 3x^3 \sqrt[3]{y^4}$.

Primer

Diferencijalna jednačina oblika $y' = f(ax + by + c)$ *gde su* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *se smenom* $z = ax + by + c$, $z = z(x)$ *svodi na jednačinu koja razdvaja promenljive.*
Rešiti $y' = (4x - y + 1)^2$.

Rikatijeva diferencijalna jednačina

Rikatijeva diferencijalna jednačina je oblika

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

gde su $P(x), Q(x), R(x)$ *neprekidne funkcije.*

Ako je $R(x) = 0$ onda jednačina postaje Bernulijeva.

Razmatramo samo dva slučaja ukoliko je poznato jedno partikularno rešenje y_1.

- Uvođenjem smene $y = y_1 + \frac{1}{z}$ svodi se na linearnu.
- Uvođenjem smene $y = y_1 + z$ svodi se na Bernulijevu.

Svođenje Rikatijeve na linearnu diferencijalnu jednačinu:

Uvodimo smenu $y = y_1 + \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad y' = y_1' - \frac{1}{z^2} z'$

Zamenimo y i y' u polaznu jednačinu $y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$:

$$y_1' - \frac{1}{z^2} z' = P(x)(y_1 + \frac{1}{z})^2 + Q(x)(y_1 + \frac{1}{z}) + R(x)$$
$$y_1' - \frac{1}{z^2} z' = (P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x)) + \frac{2P(x)y_1}{z} + \frac{P(x)}{z^2} + \frac{Q(x)}{z}$$

Pošto je y_1 rešenje jednačine $\Rightarrow y_1' = P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x)$.

$$-\frac{1}{z^2} z' = \frac{2P(x)y_1}{z} + \frac{P(x)}{z^2} + \frac{Q(x)}{z} \qquad / \cdot z^2$$
$$-z' = 2P(x)y_1 z + P(x) + Q(x)z$$

$z' + (2P(x)y_1 + Q(x))z = -P(x) \rightarrow$ Ovo je linearna DJ po z.

Svođenje Rikatijeve na Bernulijevu diferencijalnu jednačinu:

Uvodimo smenu $y = y_1 + z \quad \Rightarrow \quad y' = y_1' + z'$

Zamenimo y i y' u polaznu jednačinu $y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$:

$$y_1' + z' = P(x)(y_1 + z)^2 + Q(x)(y_1 + z) + R(x)$$
$$y_1' + z' = (P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x)) + 2P(x)y_1z + P(x)z^2 + Q(x)z$$

Pošto je y_1 rešenje jednačine $\Rightarrow y_1' = P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x)$.

$$\begin{aligned} z' &= 2P(x)y_1z + P(x)z^2 + Q(x)z \\ &= (2P(x)y_1 + Q(x))z + P(x)z^2 \end{aligned}$$

$z' - (2P(x)y_1 + Q(x))z = P(x)z^2 \rightarrow$ Ovo je Bernulijeva DJ po z, za $n = 2$.

Diferencijalna jednačina sa totalnim diferencijalom

Razmatramo diferencijalnu jednačinnu

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \qquad (\heartsuit)$$

Definicija

Izraz

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

je totalni diferencijal neke funkcije $u(x,y)$ ako je

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Tada jednačinu $(\heartsuit)$ možemo zapisati u obliku $du = 0$ tj.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0$$

gde je

$$u(x,y) = C. \quad (C = const.)$$

Diferencijalna jednačina sa totalnim diferencijalom

Primer (Na času)

Odrediti ono rešenje diferencijalne jednačine $y' = \frac{2x+e^{-y}}{xe^{-y}-\cos y}$ *koje zadovoljava početni uslov* $y(4) = 0$.

Primer (Na času)

Odrediti opšti integral diferencijalne jednačine $(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0$.

Ako

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \qquad (\heartsuit)$$

nije jednačina sa totalnim diferencijalom (tj. $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$) onda koristimo integracioni množilac $\lambda = \lambda(x,y)$ takav da je $\frac{\partial(\lambda P)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda Q)}{\partial x}$.

Specijalno ako je izraz

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$$

funkcija koja zavisi samo od x **(ili konstanta)** onda je

$$\lambda(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx}.$$

Specijalno ako je izraz

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P}$$

funkcija koja zavisi samo od y **(ili konstanta)** onda je

$$\lambda(y) = e^{-\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} dy}.$$

Primer (Na času)

Odrediti opšti integral diferencijalne jednačine

$$(x \sin y + y \cos y)dx + (x \cos y - y \sin y)dy = 0.$$

Primer (Za domaći)

Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y' = \frac{\frac{y^3}{3} + x^2 y + 2xy}{-x^2 - y^2}.$$