Elementi teorije verovatnoće

Podsetnik iz kombinatorike

Na koliko načina se mogu izabrati elementi nekog skupa?

Tri osnovna elementa kombinatorike su: permutacije, varijacije i kombinacije. Razlikuju se u odgovorima na sledeća pitanja:

(♣) Da li su izabrani svi elementi početnog skupa?

(♡) Da li je redosled izabranih elemenata bitan?

(♣)	(♡)	
DA	DA	**PERMUTACIJE** a) bez ponavljanja $P(n) = n!$ b) sa ponavljanjem $P(n, n_1, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}$
NE	DA	**VARIJACIJE** a) bez ponavljanja $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ b) sa ponavljanjem $\overline{V}_n^k = n^k$
NE	NE	**KOMBINACIJE** a) bez ponavljanja $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ b) sa ponavljanjem $\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$

Primeri za vežbanje

- Na koliko načina se mogu poredjati 7 različitih knjiga na polici?
- Koliko ima četvorocifrenih brojeva koji se zapisuju pomoću cifara $0, 1, 2, 3$?
- Koliko šestocifrenih brojeva počinju cifrom 7 a završavaju se cifrom 2?
- Koliko ima različitih načina da se popuni ”Loto” listić na kome se zaokružuje 7 od 36 brojeva?
- Koliko ima petocifrenih brojeva u čijem zapisu se ne pojavljuju cifre 0 i 2?
- Na koliko načina se na šahovskoj tabli mogu izabrati dva polja iste (različite) boje?
- Na koliko načina kasarna može napraviti stražu koja se satoji od jednog oficira i 5 vojnika ako ima na raspolaganju 40 vojnika i 3 oficira?
- U ravni je dato 10 crvenih i 8 plavih tačaka tako da nikoje tri nisu kolinearne (ne leže na istoj pravoj). Koliko ima trouglova sa temenima u datim tačkama kod kojih sva temena nisu iste boje?
- Dat je broj 62774277. Koliko možemo napraviti osmocifrenih (petocifrenih) brojeva od cifara tog broja?

Slučajni događaji

- Posmatrajmo neku pojavu ili eksperiment. Jedan određen ishod pojave ili eksperimenta naziva se **događaj**. Događaje označavamo sa velikim slovima latinice $A, B, C, \ldots$.
- Ako je događaj neminovan ishod eksperimenta on se zove **siguran događaj**. Označavamo ga sa Ω.
- Događaj je **nemoguć** ako se pri datim uslovima ne može realizovati. Označavamo ga sa $\emptyset$.
- Ako se realizacija događaja ne može predvideti onda je on **slučajni događaj**.

Primer

- *Šutiranje na gol*
- *Pogodak u cilj pri gadjanju u metu*
- *izvlačenje raznobojnih kuglica iz vreće sa crvenim i plavim kuglicama*
- *...*

- Događaji A i B su **disjunktni** ako realizacija jednog isključuje realizaciju drugog.
- **Unija** dva događaja A i B ($A \cup B$, $A + B$) je događaj čija se realizacija sastoji u realizaciji bar jednog događaja A ili B.
- **Presek/proizvod** dva događaja A i B ($A \cap B$, AB) je događaj koji se realizuje realizacijom oba događaja i A i B.
- Događaji koji se ne mogu razložiti na prostije događaje zovu se **elementarni događaji** (ishodi eksperimenta). Skup svih ishoda je $\Omega = \{w_1, \ldots, w_n\}$.
- Elementarni događaji w_1, ..., w_n čine **potpun sistem događaja** ako su međusobno disjunktni i ako pojava/eksperiment kao svoj ishod ima jedan od ovih događaja, tj. ako:
  $w_i w_k = \emptyset$, za $i \neq k$, je nemoguć događaj i
  $w_1 + ... + w_n = \Omega$ je siguran događaj.

Primer (Na času)

Bacamo kocku za igru.
A- pojava neparnog broja tačaka. B- pojava strana sa 3 *ili* 6 *tačaka.*
$A \cup B = \{1, 3, 5, 6\}$, $AB = \{3\}$

Primer (Na času)

Odrediti skup svih elementarnih dogadjaja za eskperiment:

a) *Bacanje jednog dinara* $\Omega = \{P, G\}$

b) *Bacanje dva dinara* $\Omega = \{PG, , GP, GG, PP\}$

c) *Bacanje jedne kocke* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

d) *Bacanje dve kocke* $\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),\ldots,(6,6)\}$ *ukupno 36 ishoda.*

Klasična/Laplasova definicija verovatnoće

Neka je $\{w_1, ..., w_n\}$ potpun (konačan) sistem događaja (skup svih mogućih ishoda) i neka je svaki događaj w_i ima podjednake šanse da bude realizovan.

Neka se događaj A realizuje pri realizaciji bilo kog od elementarnih događaja $w_{i1}, ..., w_{ik}$. (tj. $A \subset \Omega$, $A = w_{i1} + \ldots + w_{ik}$)

Definicija

Verovatnoća događaja A se definiše kao

$$p(A) = \frac{k}{n} = \frac{broj\ elementarnih\ dogadjaja\ povoljnih\ za\ A}{broj\ svih\ elementarnih\ dogadjaja\ potpunog\ sistema\ \Omega}.$$

- Za siguran događaj, svaki elementaran je povoljan pa je $p(\Omega) = 1$.
- Za nemoguć događaj je $k = 0$ pa je $p(\emptyset) = 0$.
- $0 \leq k \leq n$, $0 \leq P(A) \leq 1$
- Suprotan dogadjaj dogadjaja A je $\bar{A}$ i važi $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Primeri radjeni na času

Primer

Odrediti verovatnoću da bačena kocka za igru na gornjoj strani pokaže

- *Paran broj (Rešenje $P(A) = \frac{1}{2}$)*
- *Broj veći od 4 (Rešenje $P(A) = \frac{1}{3}$)*

Primer

Odrediti verovatnoću da će se na dvema bačenim kockama za igru pokazati

- *zbir 9 (Rešenje $P(A) = \frac{1}{9}$)*

Primer

Odrediti verovatnoću da će pri bacanju dva novčića pasti

- **bar** *jedan grb (Rešenje $P(A) = \frac{3}{4}$)*

Primer (Za domaći)

Odrediti verovatnoću da pri istovremenom bacanju 3 novčića padne tačno jedno pismo?

Geometrijska verovatnoća

Neka je broj mogućih ishoda neke pojave beskonačan (npr. biramo tačku neke oblasti).
Svakom ishodu dodelimo jednu tačku konačne oblasti S.

Neka povoljnim ishodima odgovaraju tačke u podoblasti $D \subset S$. Važi:

$$P(A) = \frac{\textit{mera oblasti } D}{\textit{mera oblasti } S}.$$

Primer (Na času)

U kvadrat je upisan krug. Odrediti verovatnoću da slučajno izabrana tačka u kvadratu pripada krugu. (Rešenje $P(A) = \frac{\pi}{4}$)

Primer (Na času)

Prika i Žika se dogovoraju da se nadju izmedju $20h$ i $20:30h$ "kod stadiona". Kako nisu mogli da preciziraju vreme susreta odlučili su da osoba koja prva stigne čeka $10min$ i zatim ode. Koja je verovatnoća da će se sresti? (Rešenje $P(A) = \frac{5}{9}$)

Opšta definicija verovatnoće

Definicija

Neka je Ω skup svih elementarnih događaja. Funkcija $p : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ koja slika partitivni skup $\mathcal{P}(\Omega)$ u $[0,1] \subset \mathbb{R}$ naziva se verovatnoća ako važi:

1) $p(A) \geq 0, \ \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$,

2) $p(\Omega) = 1$,

3) *Ako su* $A_1, ..., A_n$ *disjunktni,* $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ *onda je* $p(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$.

- Suprotan događaj događaju A je $\overline{A}$ koji se ostvaruje onda kada se A ne ostvaruje (Dakle $\overline{\overline{A}} = A$ i kako je $A + \overline{A} = \Omega$ onda sledi da je $p(A) + p(\overline{A}) = 1$).
- Ako je $A \subseteq B$ onda je $p(A) \leq p(B)$.
- $0 \leq p(A) \leq 1$.
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(AB)$.

Uslovna verovatnoća

Definicija

Uslovna verovatnoća *događaja B pod uslovom da se događaj A realizovao definiše se kao* $p(B|A) = \frac{p(AB)}{p(A)}$.

Iz definicije je $p(AB) = p(A) \cdot p(B|A)$.
Slično: $p(BA) = p(B) \cdot p(A|B)$.
Kako je $p(AB) = p(BA) \implies p(A) \cdot p(B|A) = p(B) \cdot p(A|B)$.

Primer (Na času)

Na slučajan način biramo kartu iz špila od 52 karte. Ako je poznato da je izabrana karta "pik" odrediti verovatnoću da je ta karta "kec". (Rešenje: A- Izabrana karta je "kec". B- izabrana karta je "pik". Tražimo $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{13}{52}} = \frac{1}{13}$*)*

Definicija

Događaj A je ***nezavisan*** *od događaja B ako je* $p(A|B) = p(A)$.

Teorema

Za događaje A i B sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

1. $p(A|B) = p(A)$
2. $p(B|A) = p(B)$
3. $p(AB) = p(A) \cdot p(B)$

Posledica

Ako su A i B nezavisni događaji onda je $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A)p(B)$.

Primer (Na času)

Odrediti verovatnoću da iz špila od 52 karte za igru izvučemo ili keca ili kralja. (Rešenje $\frac{2}{13}$)

Primer (Na času)

Odrediti verovatnoću da iz špila od 52 karte za igru izvučemo ili znak "karo" ili keca. (Rešenje $\frac{16}{52}$)

Primeri za vežbanje

- U kutiji su 3 crvene i 7 plavih kuglica. Odrediti verovatnoću da se u dva izvlačenja oba puta izvuče plava kuglica (kuglica se ne vraća posle izvlačenja).
- Odrediti verovatnoću da se na dvema bačenim kockama dobije zbir 10 ili ako se to ne dogodi da e pri ponovljenom bacanju dobije zbir 9.
- Na slučajan način se biraju brojevi $a_1, a_2 \in [0, 3]$. Odrediti verovatnoću da će kvadratna jednačina $x^2 + a_1 x + a_2 = 0$ imati realna rešenja.
- U bubnju za tombolu se nalaze kuglice sa brojevima od 1 do 20. Izvlače se na slučajan način tri kuglice, jedna za drugom bez vraćanja. Odrediti verovatnoću da su sve tri izvučene kuglice sa neparnim brojevima.

Formula totalne verovatnoće

Nameće se pitanje: Koja je verovatnoća događaja A ako su verovatnoće događaja $H_1, H_2, \ldots, H_n$, realizovanih pre A, unapred poznate?

- Neka su $H_1, ..., H_n \subset \Omega$ međusobno disjunktni. Oni čine **razbijanje** događaja Ω ako je $\bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$.
- Neka je A događaj koji se može realizovati istovremeno samo sa jednim od događaja $H_1, ..., H_n$.
- Događaji $H_1 A, ..., H_n A$ su takođe disjunktni i važi
  $A = H_1 A + ... + H_n A$
  $\Rightarrow p(A) = p(H_1 A) + ... + p(H_n A)$
  $\Rightarrow p(A) = p(H_1)p(A|H_1) + ... + p(H_n)p(A|H_n) \implies$

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i)p(A|H_i) \;\; \textit{formula totalne verovatnoce}$$

Primer na času

U prodavnicu računara stigli su novi računari:

- 300 računara kompanije *DELL*
- 150 računara kompanije *TOSHIBA*
- 170 računara kompanije *FujitsuSiemens*
- 180 računara kompanije *APPLE*.

Verovatnoća da će računari raditi više od 10 godina je

- kod *DELL*-a 0.4 (tj. $P(A|H_1) = 0.4$)
- kod *TOSHIBE* 0.3 (tj. $P(A|H_2) = 0.3$)
- kod *Fujitsu Siemens*-a (tj. $P(A|H_3) = 0.2$)
- kod *APPLE*-a 0.5. (tj. $P(A|H_4) = 0.5$)

Slučajno biramo jedan računar. Odrediti verovatnoću da će trajati duže od 10 godina.

(Rešenje:)

Neka je H_i - izabran je racunar iz i-te fabrike. A- "računar će trajati duže od 10 godina". Imamo da je $P(H_1) = \frac{300}{800}$, $P(H_2) = \frac{150}{800}$, $P(H_3) = \frac{170}{800}$, $P(H_4) = \frac{180}{800}$. Na osnovu formule totalne verovatnoće

$$p(A) = \sum_{i=1}^{4} p(H_i)p(A|H_i) = \frac{300}{800} \cdot 0.4 + \frac{150}{800} \cdot 0.3 + \frac{170}{800} \cdot 0.2 + \frac{180}{800} \cdot 0.5 = 0.36125$$

Bajesova formula

Nameće se još jedno pitanje: Koja je verovatnoća da je neki događaj H_i, $i = 1, \dots, n$ uzrokovao realizaciju događaja A?

Teorema (Bajesova formula)

Neka događaji $\{H_1, ..., H_n\}$ čine potpun sistem disjunktnih događaja. Pretpostavimo da se događaj A realizovao. Tada važi:

$$p(H_i|A) = \frac{p(H_i)p(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{n} p(H_k)p(A|H_k)}.$$

Primer (Na času)

Dva strelca gadjaju nezavisno u metu ispaljujuci po jedan metak. Verovatnoća da prvi pogodi je 0.8 a drugi 0.4. Nakon izvedenog gadjanja konstantovan je jedan pogodak. Odrediti verovatnoću da je pogodio prvi strelac (drugi strelac).

(Rešenje:)

Neka je:

- *A-meta je pogodjena,*
- *H_1 - pogodio je prvi strelac a drugi omašio,*
- *H_2 - pogodio je drugi strelac a prvi omašio.*

Tražimo koliko je $P(H_1|A)$ i $P(H_2|A)$?
Tada je

$$P(A) = \sum_{i=1}^{2} P(H_i)P(A|H_i)$$

gde je $P(H_1) = 0.8 \cdot (1 - 0.4) = 0.48$, $P(H_2) = 0.4 \cdot (1 - 0.8) = 0.08$ *pa je na osnovu prethodne formule*

$$P(A) = 0.48 \cdot 1 + 0.08 \cdot 1 = 0.56.$$

Konačno na osnovu Bajesove formule je $P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{6}{7}$, $P(H_2|A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{1}{7}$.