Транспортни проблем

$$(\min) \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{п.о.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i & , i=\overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j & , j=\overline{1,n} \\ x_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

m - продавница

n - складишта

c_{ij} - цена превоза од i-тог до j-тог складишта

x_{ij} - количина робе од i до j

a_i - количина робе на i-том складишту

b_j - потражња робе у продавници j

Ако важи $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ онда неједнакости постају једнакости па проблем може да се реши, у супротном се додају фиктивне променљиве (потрошачи)

Метода минималних цена

- за налажење почетног решења

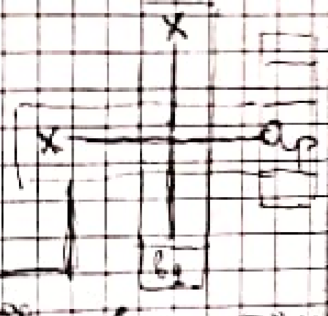
c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
		c_{ij}		a_p
		⋮		
				a_m
b_1	b_2	...	b_n	

b_q

K1) Тражимо $\min_{ij} c_{ij} = c_{pq}$

K2) Постављамо x_{pq} (количина робе) $= \min(a_p, b_q)$

$$\left.\begin{aligned} a_p^{\text{ново}} &= a_p^{\text{старо}} - \min(a_p, b_q) \\ b_q^{\text{ново}} &= b_q^{\text{старо}} - \min(a_p, b_q) \end{aligned}\right\} \text{један од ових је } 0$$



Ако је $a_p \neq b_q$ (a_p или b_q је нула)

Радимо до $m+n-1$ корака

Врсту (или колону) где је $a_p^{\text{ново}}=0$ или $b_q^{\text{ново}}=0$ (ту врсту или колону) бришемо из таблице (ПРЕЦРТАМО — X) (не може ништа у базу из те колоне или врсте!)

После тога → K1)

Добијамо корака и то је базисно решење (почетно)

(У ЈЕДНОМ ТРЕНУТКУ a_p И b_q БИЋЕ ЈЕДНАКИ ПА ИЗБАЦИМО И ТУ ВРСТУ И КОЛОНУ!).

НА КРАЈУ ИМАМО $m+n-1$ КОРАКА

ТЈ. $m+n-1$ БАЗИЧНИХ ПРОМЕНЉИВИХ.

(ОВАКО СМО ФОРМИРАЛИ ПОЧЕТНО (БАЗИСНО) РЕШЕЊЕ)

Метода потенцијала

- одређивање потенцијала

K1) Потенцијали су облика u_i, v_j, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, додељују се a_i-овима и b_j-овима. ОДРЕЂУЈЕМО ИХ ТАКО ДА ЈЕ:

$c_{ij}^{B} - u_i - v_j = 0$ (B → базисно)

$m+n-1$ једначина од $m+n$ променљивих (ЛИНЕАРНИ СИСТЕМ КОЈИ МОЖЕМО ДА РЕШИМО)

Узима се потенцијал у чијој врсти или колони има највише базисних променљивих и тај потенцијал је $=0$.

K2) Да ли је $c_{ij}^{N} - u_i - v_j \geq 0$ за свако i,j? (N → небазисно)

Ако је то тачно → K7), у супротном → K3)

K3) Имамо $c_{rs}^{N} - u_r - v_s < 0$ → узимамо најнегативнији од таквих и доделимо том пољу „θ" (повећавање, додавање)

→ ПРАВИМО ЦИКЛ ПРЕКО СВИХ ПОЉА ГДЕ СУ БАЗИСНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

K4) x_r улази у базу (а неко излази)

$\theta = \min\{x_{ij}^{0} \mid x_{ij}$ - убачен у цикл "$-\theta$" $\}$ → (ЗНАК МИНУС)

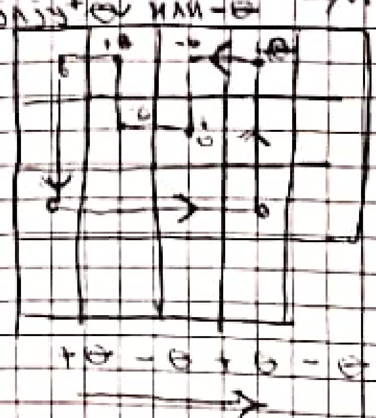
K5) x_{ij}^{B} - где је постигнут min, ИЗЛАЗИ ИЗ БАЗЕ

K6) Ажурирање базе

$x_{rs} = \theta$, А ОСТАЛИ ИЗ ЦИКЛА ДОБИЈАЈУ $+\theta$ ИЛИ $-\theta$

(мора бити $m+n-1$ копија, ОПЕТ) → ИЂИ НА K1)

"ЦИКЛ"



K7) СТОП - оптимално решење

$\boxed{1.}$ Решити транспортни проблем

20	11	15	13	2
17	14	12	13	6
15	12	18	18	7
3	3	4	5	

20	[2] 11	15	13	2	0/ предратован
17	14	[4] 12	[2] 13	6	2/0/ предратован
[3] 15	[1] 12	18	[3] 18	7	6/3/0/ предратован
3	3	4	5	$\sum a_i = \sum b_j$?	
0/ предратован	1/0/ –"–	0/ –"–	3/0/ –"–	15 = 15 ✓	

ако није, онда немамо решење, биће ...

(додаје се вештачко)

4 + 3 − 1 = 6 копија

Ми имамо 6 копија, ред

[illegible]

20	[2−θ] 11	15	[θ] 13	[−1] 2
17	14	[4] 12	[2] 13	[−5] 6
[3] 15	[1+θ] 12	18	[3−θ] 18	[0] 7
[15] 3	[12] 3	[17] 4	[18] 5	

$c_{ij}'' - u_i - v_j \geq 0, \ \forall i,j$?

$20 - 15 + 1 = 6 \geq 0$ ✓

$15 - 17 + 1 = -1 \geq 0$ ↯

$13 - 18 + 1 = -4 \geq 0$ ↯

$17 - 15 + 5 = 7 \geq 0$ ✓

$14 - 12 + 5 = 7 \geq 0$ ✓

$18 - 17 - 0 = 1 \geq 0$ ✓

$\theta = \min\{2, 3\} = 2$

следи се оно што иде је $-\theta$

Scanned with CamScanner

изашло из базе

20	$\boxed{4}$ 11	15	$\boxed{2}$ 13	$\boxed{-5}$ 2
17	14	$\boxed{4}$ 12	$\boxed{2}$ 13	$\boxed{5}$ 6
$\boxed{3}$ 15	$\boxed{3}$ 12	18	$\boxed{1}$ 18	$\boxed{0}$ 7
$\boxed{15}$ 3	$\boxed{12}$ 3	$\boxed{17}$ 4	$\boxed{15}$ 5	

^могло је и ту 0, јер. их има тачно 3

$c_{ij}^N - u_i - v_j \geq 0, \forall i,j$?

$20 - 15 + 1 = 6 \geq 0$ ✓

$11 - 12 + 1 = 0 \geq 0$ ✓

$15 - 17 + 5 = 3 \geq 0$ ✓

$17 - 15 + 5 = 7 \geq 0$ ✓

$14 - 12 + 5 = 7 \geq 0$ ✓

$18 - 17 - 0 = 1 \geq 0$

=> имамо оптимално решење

$2 \cdot 13 + 4 \cdot 12 + 2 \cdot 13 + 3 \cdot 15 + 3 \cdot 12 + 1 \cdot 18 = 199$

2. Количина муниције као и потражња муниције и време транспорта од базе до положаја дати су следећом таблицом

	1	2	3	4	5	
I	3	9	8	10	4	28
II	6	10	3	2	3	13
III	3	2	7	10	3	19
IV	3	2	3	2	8	18
	24	16	10	20	22	

$\Sigma = 78$

$\Sigma = 92$

$78 \neq 92$ - проблем!

Морамо додати фиктивну пету врсту F

	1	2	3	4	5		
I	[24] 3	9	8	10	[4] 4	28	4/0/x
II	6	10	3	[13] 2	3	13	0/x
III	3	[16] 2	7	10	[3] 3	19	3/0/x
IV	3	2	[10] 3	[7] 2	[1] 8	18	11/1/0/x
F	50	50	50	50	[14] 50	14	
	24	16	10	20	22		
	0/x	0/x	0/x	7/0/x	19/15/14/0/x		

5 + 5 - 1 = 9 попуња треба да има ✓

	1	2	3	4	5		
I	[24] 3	9	8	10	[4] 4	[4]	28
II	6	10	3	[13-θ] 2	[θ] 3	[3]	13
III	3	[16] 2	7	10	[3] 3	[3]	19
IV	3	2	[10] 3	[7+θ] 2	[1-θ] 8	[8]	18
V	50	50	50	50	[14] 50	[59]	14
	[-1] 24	[-1] 16	[-5] 10	[-4] 20	[0] 22		

Scanned with CamScanner

$c_{ij}^N - u_i - v_j \geq 0, \forall i,j$: ?

$9-4+1 \geq 0$ ✓	$8+5-4 \geq 0$ ✓	$10+6-4 \geq 0$ ✓
$6+1-8=-1$ ×	$10+1-8 \geq 0$ ✓	$3+0-8=-5$ ×
$3+1-3 \geq 0$ ✓	$7+5-3 \geq 0$ ✓	$10+6-3 \geq 0$ ✓
$3+1-8=-4$ ×	$2+1-8=-5$ ×	$50+5-50 \geq 0$ ✓
$50+1-50 \geq 0$ ✓	$50+1-50 \geq 0$ ✓	$50+6-50 \geq 0$ ✓

$\theta = \min\{13,14\} = 1$

	1	2	3	4	5	
I	$\boxed{24}$ 3	9	8	10	$\boxed{4}$ 4	$\boxed{4}$ 28
II	6	10	3	$\boxed{12}$ 2	$\boxed{1}$ 3	$\boxed{3}$ 13
III	3	$\boxed{16}$ 2	7	10	$\boxed{3}$ 3	$\boxed{3}$ 19
IV	3	2	$\boxed{10}$ 3	$\boxed{8}$ 2	8	$\boxed{3}$ 18
V	50	50	50	50	$\boxed{14}$ 50	$\boxed{5}$ 14
	$\boxed{-1}$ 24	$\boxed{-1}$ 16	$\boxed{0}$ 10	$\boxed{-1}$ 20	$\boxed{0}$ 22	

$c_{ij}^N - u_i - v_j \geq 0, \forall i,j$: ?

$9+1-4 \geq 0$ ✓	$8-0-4 \geq 0$ ✓	$10+1-4 \geq 0$ ✓
$6+1-3 \geq 0$ ✓	$10+1-3 \geq 0$ ✓	$3-3-0 \geq 0$ ✓
$3+1-3 \geq 0$ ✓	$7-3+0 \geq 0$ ✓	$10+1-3 \geq 0$
$3+1-3 \geq 0$ ✓	$8-3+0 \geq 0$ ✓	$50+1-50 \geq 0$
$50+1-50 \geq 0$ ✓	$50-0-50 \geq 0$ ✓	$50+1-50 \geq 0$

⇒ оптимално решење

⇒ $3\cdot 24 + 4\cdot 4 + 2\cdot 12 + 3\cdot 1 + 2\cdot 16 + 3\cdot 3 + 3\cdot 10 + 2\cdot 8 = \boxed{202}$

(14·50 није решење, јер је у фиктивној бази, то се не рачуна!)

3. Нека је задат проблем (транспортни) са параметром

5+2t	4-t	8	3+t	100
4	7	4+2t	t+5	200
5	3	6	1+3t	100
80	120	150	50	

а) Решити за $t=0$.

б) За које t ће решење из а) још увек бити оптимално?

а)

$\boxed{30}$ 5	$\boxed{70}$ 4	8	3	$\boxed{0}$ 100	30/0/x
$\boxed{50}$ 4	7	$\boxed{150}$ 4	5	$\boxed{-1}$ 200	50/0/x
5	$\boxed{50}$ 3	6	$\boxed{50}$ 1	$\boxed{-1}$ 100	50/0/x
$\boxed{5}$ 80	$\boxed{4}$ 120	$\boxed{5}$ 150	$\boxed{2}$ 50	→ 400=400	
30/0/x	70/0/x	0/x	0/x		

$c_{ij}'' - u_i - v_j \geq 0, \ \forall i,j$?

$8-5-0 \geq 0$ ✓ $\quad 3-2-0 \geq 0$ ✓

$7-4+1 \geq 0$ ✓ $\quad 5-2+1 \geq 0$ ✓

$5-5+1 \geq 0$ ✓ $\quad 6-5+1 \geq 0$ ✓

$\Rightarrow$ оптимално решење

б)

$\boxed{30}$ 5+2t	$\boxed{70}$ 4-t	8	3+t	$\boxed{0}$ 100
$\boxed{50}$ 4	7	$\boxed{150}$ 4+2t	t+5	$\boxed{-1+2t}$ 200
5	$\boxed{50}$ 3	6	$\boxed{50}$ 1+3t	$\boxed{t-1}$ 100
$\boxed{5+2t}$ 80	$\boxed{4-t}$ 120	$\boxed{4t+5}$ 150	$\boxed{2t+2}$ 50	

$c_{ij}^{N} - u_i - v_j \geq 0, \ \forall ij \ ?$

$8 - 0 - 4t - 5 \geq 0 \Rightarrow -4t \geq -3 \Rightarrow t \leq \frac{3}{4}$

$3 + t - 0 - 2t - 2 \geq 0 \Rightarrow -t \geq -1 \Rightarrow t \leq 1$

$7 + 1 + 2t + t - 4 \geq 0 \Rightarrow 3t \geq -4 \Rightarrow t \geq -\frac{4}{3}$

$t + 5 + 1 + 2t - 2t - 2 \geq 0 \Rightarrow t \geq -4$

$5 - 5 - 2t + 1 - t \geq 0 \Rightarrow -3t \geq -1 \Rightarrow t \leq \frac{1}{3}$

$6 + 1 - t - 5 - 4t \geq 0 \Rightarrow -5t \geq -2 \Rightarrow t \leq \frac{2}{5}$

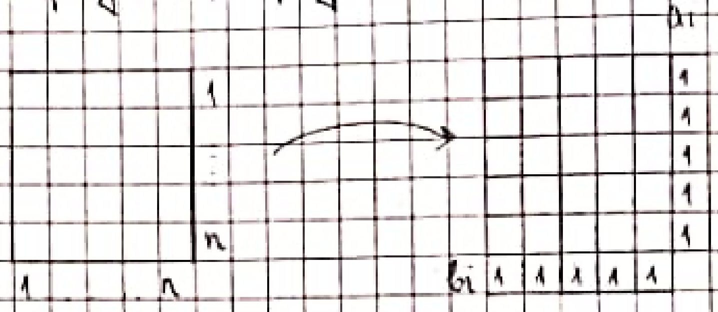
$\Rightarrow t \in \left[-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right]$ - решење

4. Из три складишта треба превести робу до пет потрошача. Цене су дате у следећој табели. Решити дати транспортни проблем.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
S_1	2	3	3	2	2	5
S_2	2	1	2	2	4	5
S_3	4	3	1	2	2	6
	2	2	4	4	4	

Assignment problem (Проблем распоређивања)

n радника, n радних места



капацитети и потражње су 1

- све исто као транспортни проблем
- некад неједнак број радника и места

⇒ додајемо фиктивно место

1. Од 6 пливача чији су резултати (у секундама) пливања одговарајућим стилом, дати табелом, изабрати најбољу мешовиту штафету на 4x100m.

стилови на 100 m →

пливачи ↑	леђни	прсни	лептир	делфин	
A	65	73	63	57	1
B	67	70	65	58	1
C	68	72	69	55	1
D	67	75	70	59	1
E	71	69	75	57	1
F	69	71	66	59	1
	1	1	1	1	

$\underset{6}{\sum a_i} \neq \underset{4}{\sum b_j}$ ⇒ уводимо два фиктивна стила (увешћемо их као прве две колоне иако је свеједно где их сместимо)

	F_1	F_2	I	II	III	IV		
A	500	500	65	73	[1] 63	57	[-2] 1	0/x
B	500	500	[1-θ] 67	[θ] 70	[0] 65	58	[0] 1	1/0/x
C	500	500	68	72	69	[1] 55	[-4] 1	0/x
D	[1-θ] 500	500	[0+θ] 67	75	70	59	[0] 1	1/0/x
E	500	500	71	[1] 69	75	[2] 57	[-2] 1	1/0/x
F	[0+θ] 500	[0] 500	69	[0-θ] 71	66	59	[0] 1	1/1/0/x
	[500] 1	[500] 1	[67] 1	[71] 1	[65] 1	[59] 1		
	0/x	0/x	0/x	0/x	0/x	0/x		

6+6−1 = 11 кућица

Не затварамо одмах обе, већ остављамо једну отворену

$c_{ij}^N - u_i - v_j \geq 0 \quad , \forall i,j \ ?$

$500 - (500 - 2) \geq 0$ ✓

✓

$70 - (71 - 0) = -1$ X

$58 - (59 - 0) = -1$ X

$59 - (59 - 0) \geq 0$ ✓

$\theta = \min\{0, 1, 1\} = 0$

	F_1	F_2	I	II	III	IV	
A	500	500	65	73	[1] 63	57	[-2] 1
B	500	500	[1] 67	[0] 70	[0] 65	58	[0] 1
C	500	500	68	72	69	[1] 55	[-3] 1
D	[1] 500	500	[0] 67	75	70	59	[0] 1
E	500	500	71	[1] 69	75	[0] 57	[-1] 1
F	[0] 500	[1] 500	69	71	66	59	[0] 1
	[500] 1	[500] 1	[67] 1	[70] 1	[65] 1	[58] 1	

$c_{ij}^N - u_i - v_j \geq 0, \forall_{ij}$?

⋮ ✓

⇒ оптимално решење

A - лептир : 63
B - леђни : 67
C - делфин : 55
E - прсни : 69

$\sum = 254$

(D и F не улазе у разматрање)

2. 4 посла, 6 машина, ангажовати 4 машине, 2 издвојити за друге послове. Време дато у табели. Како распоредити послове по машинама тако да решење буде минимално?

	P_1	P_2	P_3	P_4
M_1	9	12	7	12
M_2	14	10	9	11
M_3	8	15	11	15
M_4	12	13	8	14
M_5	10	11	10	10
M_6	11	14	12	9

(30 домаћи)

Scanned with CamScanner

Пребацивање проблема линеарног програмирања у транспортни проблем

$$
(*)\begin{cases}
(\min)\ 6x_1+4x_2+x_3+3x_4+5x_5+2x_6 \\
\text{п.о.}\quad x_1+x_2+x_3=6 \\
x_4+x_5+x_6=4 \\
x_1+x_4=2 \\
x_2+x_5=3 \\
x_3+x_6=5 \\
x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\geq 0
\end{cases}
$$

„Преведимо" (*) на транспортни проблем →

x_1 c_{11}	x_2 c_{12}	x_3 c_{13}	a_1
x_4 c_{21}	x_5 c_{22}	x_6 c_{23}	a_2
b_1	b_2	b_3	

→

6	4	1	6
3	5	2	4
2	3	5	

→

Метод мин. цена

6	$\boxed{1}$ 4	$\boxed{5}$ 1	$\boxed{4}$ 6
$\boxed{2}$ 3	$\boxed{2}$ 5	2	$\boxed{5}$ 4
$\boxed{-2}$ 2	$\boxed{0}$ 3	$\boxed{-3}$ 5	

→ потенцијали $\begin{cases}4,5\\-2,0,-3\end{cases}$ → проверавамо $c_{ij}^{N}-u_i-v_j\geq 0 \quad \forall i,j$

$6-4+2\geq 0$ ✓

$2-5+3\geq 0$ ✓

$\Rightarrow$ STOP. Имамо оптимално решење

$$(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3,\hat{x}_4,\hat{x}_5,\hat{x}_6)=(0,1,5,2,2,0)$$

$$f_{\min}=0\cdot 6+4\cdot 1+1\cdot 5+3\cdot 2+5\cdot 2+2\cdot 0=25$$

[illegible] треба да обави пет послова.

Сваки радник је оспособљен за извршавање свих послова али у датом периоду један радник може бити ангажован само на једном послу.

Времена обављања послова од стране радника у часовима дати су у табели.

P_i, $i=\overline{1,5}$ послови, R_i, $i=\overline{1,5}$ радници

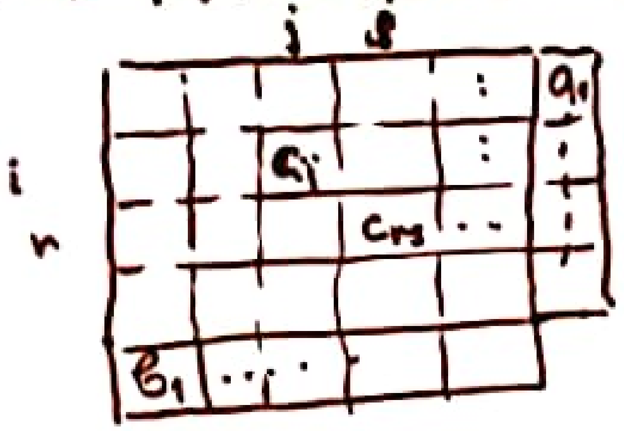
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
R_1	3	18	19	7	10
R_2	9	25	1	5	5
R_3	27	25	14	2	8
R_4	5	20	19	11	13
R_5	10	17	12	14	16

Извршити расподелу радника на пословима да би укупно време извршења посла било минимално.

$\longrightarrow$ Решење

мин време 35h

imput: → ТРАНСПОРТНА ТАБЛИЦА



a_i
b_j
c_{ij}

output: 1. ОПТИМАЛНО РЕШЕЊЕ
2. f_{min} (МИНИМАЛНА ЦЕНА)

TECT 1: imput:

20	11	15	13	2
17	14	12	13	6
15	12	18	18	7
3	3	4	5	

output:

			3 • 13	
		1 12 •	2 13 •	
3 15 •	3 12 •		1 • 18	

$f_{min} = 199$

TECT 2 : (Assignment problem)

input:

65	73	63	57
67	70	65	58
68	72	69	55
67	75	70	59
71	69	75	57
69	71	66	59

$a_i = 1, \; i = \overline{1,6}$

$b_j = 1, \; j = \overline{1,4}$

output:

		$\boxed{1}$ 63	
$\boxed{1}$ 67			
			$\boxed{1}$ 55
$\boxed{1}$ 69			

$$f_{min} = 63 + 67 + 55 + 69 = 254$$