Stepeni redovi

Stepeni redovi

Jednu od najvažnijih klasa funkcionalnih redova čine **stepeni redovi**.

Definicija

Red oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \tag{1}$$

*zove se **stepeni red** gde su $a_n \in \mathbb{R}$ koeficijenti stepenog reda.*

NAPOMENA

Red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ smenom se svodi na gornji red.

Definicija

Skup

$$OK = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergira} \right\}$$

nazivamo oblast konveregencije stepenog reda (1).

1. Skup OK je uvek neprazan jer $0 \in OK$.
2. Postoje stepeni redovi kod kojih je samo $OK = \{0\}$. Takve redove još nazivamo i svuda divergentnim redovima.

Teorema (Abel)

1. *Ako stepeni red* (1) *konvergira u tački* $x = c \neq 0$ *onda on apsolutno konvergira u svakoj tački intervala* $(-|c|, |c|)$.
2. *Ako stepeni red* (1) *divergira u tački* $x = k \neq 0$ *onda on divergira u svakoj tački intervala* $(-\infty, -|k|) \cup (|k|, +\infty)$.

Dokaz na času.

Posledica (Abel)

Za svaki stepeni red (1) *postoji nenagtivan broj* $R \in [0, +\infty]$ *sa osobinama:*

1. *Za* $R = 0$ *red* (1) *konvergira samo u tački* $x = 0$.
2. *Za* $R = +\infty$ *red* (1) *konvergira za svako* x.
3. *Za* $R > 0$*:*
   - *Red* (1) *apsolutno konvergira za* $|x| < R$ *(tj. za* $x \in (-R, R)$*)*
   - *Red* (1) *divergira za* $|x| > R$ *(tj. za* $x \in (-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$*)*

Definicija

Broj R (konačan ili beskonačan) iz prethodne teoreme i njene posledice, naziva se radijus (poluprečnik) konvergencije stepenog reda. Interval $(-R, R)$ *nazivamo oblast konvergencije stepenog reda.*

Primer (Na času.)

Teorema (**Koši-Adamar**)

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

NAPOMENA

Ako nijedan od ova dva limesa ne postoji onda se R može računati kao

$$\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

NAPOMENA (Ispitivanje konveregencije u krajevima intervala)

Vidimo da prethodne teoreme ne kažu ništa o konvergenciji reda za $|x| = R$ *tj. za* $x = \pm R$. *Medjutim, tada se red* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *svodi na brojne redove*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \quad i \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n R^n$$

pa njihovu konvergenciju treba ispitati nekim od ranije navedenih kriterijuma za brojne redove.

Primer

Na času.

Primer

Na času.

Uniformna konvergencija stepenih redova (3 važne teoreme)

Teorema

Za svaki broj $r \in (0, R)$ *stepeni red* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *konvergira uniformno na segmentu* $[-r, r]$.

Dokaz na času.

Teorema

Suma

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

stepenog reda je neprekidna funkcija na $(-R, R)$.

Teorema

Ako je R poluprečnik konvergencije i $-R < a < b < R$ *onda se stepeni red* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *na segmentu* $[a, b]$ *može integraliti i diferencirati proizvoljan broj puta. Tako dobijeni redovi imaju isti poluprečnik konvergencije R.*

Razlaganje funkcija u stepeni red

Definicija

Neka je data realna funkcija $f : D_f \to \mathbb{R}$ *beskonačno diferencijabilna na segementu* $[x_0, x_0 + h] \subseteq D_f$ *gde je* $x_0 \in D_f$ *i* $h > 0$. *Tada* $\forall n \in \mathbb{N}$ *i svako* $x \in [x_0, x_0 + h]$ *važi:*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n.$$

1. Pod kojim se uslovima unapred zadata funkcija $f : D_f \to \mathbb{R}$ može predstaviti preko sume nekog stepenog reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ (ili stepenog reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$)?
2. Stepeni red
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$
se naziva **Tejlorov red** funkcije f u tački x_0 a $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ su Tejlorovi koeficijenti pomenutog reda za $n \in \mathbb{N}_0$.

Tejlorov red funkcije i primeri

Teorema

Tejlorov red funkcije f konvergira u tački $x \in [x_0, x_0 + h]$ i važi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

Teorema

Ako postoje $C \in (0, \infty)$ i $r \in (0, \infty)$ takvi da je za svako $n \in \mathbb{N}$ i svako $x \in [-r, r]$

$$|f^{(n)(x)}| \leq C$$

onda se funkcija $f(x)$ može razviti u Tejlorov red na $[-r, r]$.

NAPOMENA

Teorema važe i kada se segment $[x_0, x_0 + h]$ zameni sa $[x_0 - h, x_0 + h]$ ili $[x_0 - h, x_0]$.

Maklorenov red funkcije i primeri

Definicija

Ako je $x_0 = 0$ *tada se funkcija razlaže u Maklorenov (stepeni) red oblika*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} x^n.$$

Primer

Na času.

Primer

Na času.

Primer

Na času.

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots,\ x \in (-\infty, +\infty)$
- $\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots,\ x \in (-\infty, +\infty)$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots,\ x \in (-\infty, +\infty)$
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots,\ x \in (-1, 1]$
- $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n,\ x \in [-1, 1)$
- $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,\ x \in (-1, 1)$, gde je $\binom{\alpha}{0} = 1$,
  $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!},\ n \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$