

Sistemi linearnih jednačina

October 18, 2022

Sistemi linearnih jednačina

Sistem od m linearnih jednačina sa n nepoznatih:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}$$

gde su $a_{ij} \in \mathbb{R}$ **koeficijenti**, x_i **promenljive** (nepoznate) i $b_i \in \mathbb{R}$.

Rešenje sistema linearnih jednačina je n -torka (x_1, \dots, x_n) koja zadovoljava sve jednačine.

Sistem linearnih jednačina može da bude:

- 1 **Određen** - sistem ima jedno rešenje.
- 2 **Neodređen** - sistem ima više rešenja (beskonačno mnogo).
- 3 **Nemoguć** - sistem nema rešenja.

Definicija

*Dva sistema linearnih jednačina su **ekvivalentna** ako imaju isti skup rešenja.*

Transformacije sistema linearnih jednačina nakon kojih se dobija ekvivalentan sistem (sa istim rešenjem):

- 1 Zamena dve jednačine.
- 2 Množenje neke jednačine brojem različitim od nula.
- 3 Množenje neke jednačine brojem i dodavanjem drugoj jednačini.

Definicija

Sistem linearnih jednačina je **homogen** ako su na desnoj strani jednačina svi slobodni članovi ($b_i, i = 1, \dots, m$) jednaki nula.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Homogen sistem ima sigurno bar jedno (trivijalno) rešenje, tj.
 $x_1 = \dots = x_n = 0$.

Sistem linearnih jednačina se može izraziti i matricno u obliku $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gde je:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Teorema

Ako je A invertibilna matrica, onda sistem linearnih jednačina $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ima jedinstveno rešenje $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Dokaz na času.

Gausova metoda eliminacije

Gausovom metodom eliminacije se sistem linearnih jednačina $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, gde je A regularna kvadratna matrica

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

transformiše u konačno mnogo koraka u ekvivalentan sistem sa gornje trougaonom matricom $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ gde je

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Prvi korak Gausove metode eliminacije:

$a_{11} \neq 0$: Prvu jednačinu množimo odgovarajućim množiteljima i oduzimamo je od svih ostalih jednačina. Množitelji se određuju tako da se anulira promenljiva x_1 u svim jednačinama osim u prvoj, tj. pri oduzimanju od i -te jednačine množitelj bi bio $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$, $i = 2, \dots, n$.

$a_{11} = 0$: Permutujemo jednačine tako što na mesto prve dovodimo jednačinu za koju je $a_{p1} \neq 0$. Taj element sigurno postoji jer je A regularna.

Nakon prvog koraka, dobijen je ekvivalentan sistem $A_1 \mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ gde je

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

j -ti korak Gausove metode eliminacije:

$a_{jj}^{(j-1)} \neq 0$: j -tu jednačinu množimo odgovarajućim množiteljima i oduzimamo je od svih ostalih jednačina "ispod" nje. Množitelji se određuju tako da se anulira promenljiva x_j u svim jednačinama od $(j+1)$ -ve do n -te, tj. pri oduzimanju od i -te jednačine množitelj bi bio $\frac{a_{ij}^{(j-1)}}{a_{jj}^{(j-1)}}$, $i = j+1, \dots, n$.

$a_{jj}^{(j-1)} = 0$: Permutujemo jednačine tako što na mesto j -te jednačine dovodimo jednačinu za koju je $a_{pj}^{(j-1)} \neq 0$.

Nakon j -tog koraka, dobijen je ekvivalentan sistem $A_j \mathbf{x} = \mathbf{b}_j$ gde je

$$A_j = \begin{bmatrix} * & \dots & * & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \end{bmatrix}$$

Nakon $n - 1$ koraka dobijena matrica A_{n-1} je tražena gornje trougaona matrica U , a vektor \mathbf{b}_{n-1} je vektor \mathbf{c} .

Ovako dobijen sistem $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$, uz pretpostavku da je $u_{ii} \neq 0$ se direktno može rešiti:

$$x_n = \frac{c_n}{u_{nn}}, \quad x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(c_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j \right), \quad i = n - 1, \dots, 1.$$

- Ukoliko se prilikom ovih transformacija desi da dobijemo jednačinu oblika $0 = t$, $t \neq 0$ onda sistem nema rešenje.
- Ukoliko se prilikom ovih transformacija desi da dobijemo jednačinu oblika $0 = 0$ onda sistem ima beskonačno mnogo rešenja.
- U j -tom koraku element $a_{jj}^{(j-1)}$ nazivamo **glavnim elementom** ili **pivotom**.

Kramerovo pravilo

Kramerovo pravilo koristi determinante za rešavanje sistema linearnih jednačina $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sa kvadratnom matricom sistema $A = [a_{ij}]_{n \times n}$.

Oznake:

$$D = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$D_j, j = 1, \dots, n$ se formiraju tako što se u determinanti sistema j -ta kolona zameni kolonom koju čine slobodni članovi.

Teorema

Neka je $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sistem n jednačina sa n nepoznatih. Ako je $D \neq 0$ onda sistem ima jedinstveno rešenje:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

- Ako je $D = 0$ i postoji bar jedno $D_j \neq 0$ onda sistem nema rešenja.
- Ako je $D = 0$ i $D_j = 0$ za svako j onda sistem ili nema rešenja ili ima beskonačno mnogo rešenja.

Kroneker-Kapelijeva teorema

Neka je $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sistem m linearnih jednačina sa n nepoznatih, sa matricom koeficijenata

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Formirajmo matricu A^p dimenzije $m \times (n + 1)$ dodajući vektor \mathbf{b} matrici A kao poslednju, $(n + 1)$ -vu kolonu, tj.

$$A^p = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Za matricu A^p kažemo da je **proširena matrica** sistema.

Teorema

Sistem od m linearnih jednačina sa n nepoznatih ima rešenje akko je rang njegove matrice koeficijenata jednak rangu njegove proširene matrice, tj. $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^p)$.

Posledica

- 1 *Ako je $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^p) = n$ onda postoji jedinstveno rešenje sistema.*
- 2 *Ako je $\text{rang}(A) < \text{rang}(A^p)$ onda sistem nema rešenja.*
- 3 *Ako je $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^p) < n$ onda postoji beskonačno mnogo rešenja sistema.*

Teorema

Neka je $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistem m linearnih jednačina sa n nepoznatih gde je $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrica koeficijenata.

- 1 Ako je $\text{rang}(A) = n$ tada je trivijalno rešenje jedino rešenje homogenog sistema.*
- 2 Homogeni sistem ima i netrivialno rešenje akko je $\text{rang}(A) < n$.*

Sopstvene vrednosti i spektar kvadratne matrice $A_{n \times n}$

- 1 Karakteristični sistem $Ax = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.
- 2 $A - \lambda I$ je karakteristična matrica matrice A .
- 3 $P_n(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ je karakteristični polinom matrice A .
- 4 $P_n(\lambda) = 0$ je karakteristična jednačina matrice A .
- 5 Skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ se naziva karakteristična (sopstvena) vrednost matrice A ako za taj skalar karakteristični sistem ima netrivialno rešenje $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.
- 6 Tada kažemo da je x sopstveni vektor matrice A koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ .
- 7 Neophodan i dovoljan uslov da karakteristični sistem ima netrivialno rešenje je

$$P_n(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0.$$

Rešavanjem jednačine $P_n(\lambda) = 0$ dobijamo (korene) sopstvene vrednosti matrice A .

- 8 Skup svih takvih korena (sopstvenih vrednosti) određuje **spektar** matrice A .