Матричне игре

"Игра" – је конфликтна ситуација у којој се појављује најмање два играча. Сваки играч, кад на њега дође ред, повлачи потез који се састоји у избору елемената из неког скупа. Притом сваки играч располаже неком информацијом о томе шта други могу да изаберу и шта им је циљ.

Питање → Како играчи треба да играју да би остварили циљ, као и шта ће бити резултат игре?
(Претпоставља се да свако игра најбоље могуће!)

• Примери → спортске игре, ратови, економски "ратови".

Нормална форма коначне (антагонистичке) матричне игре је матрица $A=(a_{ij})_{m\times n}$, где a_{ij} представља добит I играча ако он одабере своју i-ту (чисту) стратегију а II играч j-ту (чисту) стратегију.

$$A = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & \text{II} & \phantom{\dots a_{1n}} \end{array} \\
\text{I} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}
\end{array}$$

Гарантовани добитак I играча: $v_{I} = \max_i \min_j a_{ij}$

Гарантовани добитак II играча: $v_{II} = \min_j \max_i a_{ij}$

Ако $v_{I} = v_{II} = a_{\hat{i}\hat{j}}$ → игра има седласту тачку $(\hat{i},\hat{j})$ и стратегије $(\hat{i},\hat{j})$ су оптималне.

Мешовита стратегија x I играча је вероватносни вектор на скупу његових чистих стратегија:

$$x=(x_1,\dots,x_m),\ x_i \geq 0,\ i=\overline{1,m},\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

Мешовита стратегија II играча је вероватносни вектор на скупу његових чистих стратегија:

$$y=(y_1,\dots,y_n),\ y_j \geq 0,\ j=\overline{1,n},\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

Вредност игре v је број такав

$$\boxed{v = \max_{x\in X} \min_{y \in Y} x A^T y = \min_{y\in Y} \max_{x\in X} x A y^T}$$

X - скуп свих мешовитих стратегија I играча

Y - скуп свих мешовитих стратегија II играча

Мешовита стратегија $\hat{x}$ је оптимална за I играча ако

$$\hat{x} A_{\cdot j} \geq v, \quad j = \overline{1,n} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{где је } A_{\cdot j} \\ j\text{-та колона од } A\end{array}\right)$$

↳ решавамо

$$(\max)\ v$$

$$\text{п.о.} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq v \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq v \\ \vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq v \\ x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1 \\ x_1, x_2, \dots, x_m \geq 0 \end{cases}$$

Мешовита стратегија $\hat{y}$ је оптимална за II играча ако

$$A_{i,\cdot}\, \hat{y}^T \leq v, \quad i = \overline{1,m} \qquad \left(\begin{array}{l}A_{i,\cdot}\ i\text{-та} \\ \text{врста од } A\end{array}\right)$$

↳ решавамо

$$(\min)\ v$$

$$\text{п.о.} \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \leq v \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \leq v \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n \leq v \\ y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1 \\ y_1, \dots, y_n \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} & & \boxed{\mathrm{II}} \\ & & \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{array} \\ \boxed{\mathrm{I}} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

$\rightarrow$ своди се на решавање проблема линеарног програмирања

I играч жели да игра тако да вредност игре v буде што већа, II играч жели да игра тако да v буде што мање.

Из матрице:

I $\quad (\max)\ v$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq v \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq v \\ \vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq v \\ x_1, x_2, \dots, x_m \geq 0 \\ x_1 + \dots + x_m = 1 \end{cases}$$

(v морамо да направимо да буде ненегативно
$v = v' - v''$, $v', v'' \geq 0$, АКО РАДИМО СИМПЛЕКСОМ)

II $\quad (\min)\ v$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \leq v \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \leq v \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n \leq v \\ y_1, y_2, \dots, y_n \geq 0 \\ y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1 \end{cases}$$

Пример (*)

$$\begin{array}{cc} & \text{II} \\ & \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \text{I} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

I $\quad (\max)\ v$

$$\text{п.о.} \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \geq v \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 \geq v \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 \geq v \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

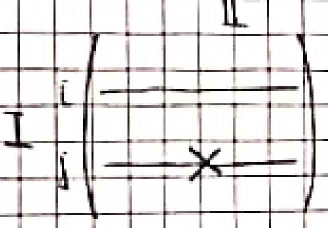
II (min) v

$$\text{s.o.}\begin{cases} y_1 - y_2 - y_3 \le v \\ -y_1 - y_2 + 3y_3 \le v \\ -y_1 - 2y_2 - y_3 \le v \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

Доминација

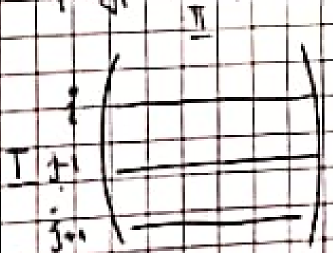
Како да сведемо проблем $m \times n$ на проблем мањих димензија

- доминација I играча



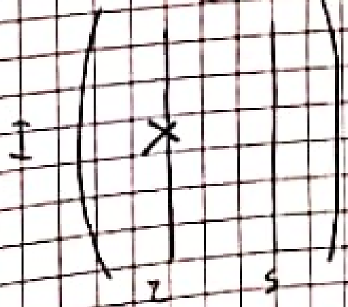
Да ли су сви елементи из j-те врсте $\le$ од свих елемената из i-те врсте? Ако јесу, j доминира i

Ако је $a_{ik} \ge a_{jk}$, $k = \overline{1,n}$, увек бирамо i-ту врсту, а j-ту прецртамо, па проблем постаје мање димензије



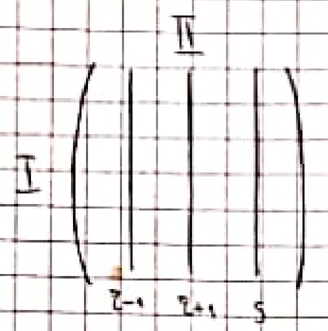
$\boxed{\hat{x}_j = 0}$

- доминација за II играча



Ако је $a_{ir} \ge a_{is}$, $i = \overline{1,m}$, онда r-та колона доминира s-ту и увек бирамо s-ту и прецртавамо r-ту, па проблем постаје мање димензије

ИЗБАЦУЈЕМО "МАЊУ" ВРСТУ А "ВЕЋУ" КОЛОНУ !



$\boxed{\hat{y}_r = 0}$

1. Решити матричну игру (одредити стратегије оба играча)

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

1. врста доминира 3. избацујемо 4.

$\boxed{\hat{x}_4 = 0}$

$$\sim \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

4 та колона доминира 3. избацујемо 4.

$\boxed{\hat{y}_4 = 0}$

$$\sim \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

1 колона доминира 3. Избацујемо 1.

$\boxed{\hat{y}_1 = 0}$

$$\sim \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{3}{2} & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

2 врста доминира 3. Избацујемо 2.

$\boxed{\hat{x}_2 = 0}$

$$\sim \begin{array}{c|cc} & y_2 & y_3 \\ x_1 & 1 & 2 \\ x_3 & 2 & 1 \end{array}$$

$(max)\ v$

$$v.o. \begin{cases} x_1 + 2x_3 \geq v \\ 2x_1 + x_3 \geq v \\ x_1 + x_3 = 1 \\ x_1, x_3 \geq 0 \end{cases} \rightarrow$$

Фурије - Моцкин
Прво елиминишемо x_1 или x_3,
на крају да нам остане v

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 \geq v - 2x_3 \\ x_1 \geq \frac{v - x_3}{2} \\ x_1 = 1 - x_3 \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 - x_3 \geq v - 2x_3 \\ 1 - x_3 \geq \frac{v - x_3}{2} \\ 1 - x_3 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_3 \geq v - 1 \\ 2 - v \geq x_3 \\ x_3 \leq 1 \\ x_3 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 - v \geq v - 1 & \rightarrow & 3 \geq 2v \\ 1 \geq v - 1 & \rightarrow & 2 \geq v \\ 2 - v \geq 0 & \rightarrow & 2 \geq v \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} v \leq \frac{3}{2} \\ v \leq 2 \\ v \leq 2 \end{array} \rightarrow \boxed{v \leq \frac{3}{2}}$$

Пошто тражимо max $\Rightarrow \hat{v} = \frac{3}{2}$ (ВРЕДНОСТ ИГРЕ)

$\hat{x}_2 = 0, \ \hat{x}_4 = 0$

$x_3 \geq \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}, \ x_3 \geq \frac{1}{2} \ \Rightarrow \hat{x}_3 = \frac{1}{2}$

$x_3 \leq 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}, \ x_3 \leq \frac{1}{2}$

$x_1 = 1 - x_3 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \hat{x}_1 = \frac{1}{2}$

$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$

Вредност игре је $\frac{3}{2}$

$(\min) \ v \qquad \hat{y}_1 = 0, \ \hat{y}_4 = 0$ из доминације

$y_2 + 2y_3 \leq v$

$2y_2 + y_3 \leq v$

$y_2 + y_3 = 1, \ y_2, y_3 \geq 0$

$\Rightarrow \hat{y}_2 = \frac{1}{2}, \ \hat{y}_3 = \frac{1}{2}$

Оптимална тачка је $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

$v = \frac{3}{2}$ - вредност је увек иста,

нашли смо до убацимо горе

2. Два предузећа која деле 1 тржиште, могу рекламирати своје производе путем тв-а и новина.

Добит првог предузећа ће бити:

a_{11} – 100 € ако оба предузећа користе TV ЗА РЕКЛАМУ

a_{12} – 0 € ако ПРВО користи TV, друго новине

a_{21} – Минус 100 € ако ПРВО користи новине, а друго TV

a_{22} – 200 € ако оба користе новине ЗА РЕКЛАМУ.

ФОРМИРАТИ МАТРИЦУ ИГРЕ И РЕШИТИ ЈЕ.

I \ II	TV	новине
TV	100€	0
новине	-100€	200€

Scanned with CamScanner

$$\begin{array}{c|cc} & TV & N \\ \hline TV & 100 & 0 \\ N & -100 & 200 \end{array}$$

Решити за домаћи!

(формирати и решити матричну игру $\{\hat{v} = 50\}$ – РЕШЕЊЕ ?)

3. Решити матричну игру

I
$$\begin{array}{c|ccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline x_1 & 1 & -1 & -1 \\ x_2 & -1 & -1 & 3 \\ x_3 & -1 & -2 & -1 \end{array} \quad \boxed{\hat{x}_3 = 0} \sim \begin{array}{c|ccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline x_1 & 1 & -1 & -1 \\ x_2 & -1 & -1 & 3 \end{array} \quad \boxed{\hat{y}_1 = 0}$$

$$\sim \begin{array}{c|cc} & y_2 & y_3 \\ \hline x_1 & -1 & -1 \\ x_2 & -1 & 3 \end{array} \quad \boxed{\hat{x}_1 = 0} \sim \begin{array}{c|cc} & y_2 & y_3 \\ \hline x_2 & -1 & 3 \end{array} \quad \boxed{\hat{y}_3 = 0} \sim \begin{array}{c|c} & y_2 \\ \hline x_2 & -1 \end{array}$$

(max) v — (max) v

$-x_2 \geq v \xrightarrow{\text{заменимо}} -1 \geq v$

$x_2 = 1$ — $v \leq -1$

$x_2 \geq 0$ — $\boxed{v = -1}$

$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = (0, 1, 0), \ v = -1$

II начин: Решити без доминације (ПРИМЕР (*))

(увођење нових v_1 и v_2 ⇒

(min) v

$$\text{п.о.} \begin{cases} y_1 - y_2 - y_3 \leq v \\ -y_1 - y_2 + 3y_3 \leq v \\ -y_1 - 2y_2 - y_3 \leq v \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

$v = v_1 - v_2, \ v_1 \geq 0, \ v_2 \geq 0$

$y_1 - y_2 - y_3 + p - v_1 + v_2 = 0$

$-y_1 - y_2 + 3y_3 + q - v_1 + v_2 = 0$

$-y_1 - 2y_2 - y_3 + r - v_1 + v_2 = 0$

$y_1 + y_2 + y_3 + w = 1$ – двофазни

$y_1, y_2, y_3 \geq 0, \ v_1, v_2 \geq 0$

(min) w

(→ Зоофазни)

$$y_1 - y_2 - y_3 + p - v_1 + v_2 = 0$$
$$-y_1 + y_2 + 3y_3 + q - v_1 + v_2 = 0$$
$$-y_1 + 2y_2 - y_3 + r - v_1 + v_2 = 0$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + w = 1$$
$$y_1, y_2, y_3, v_1, v_2, w \geq 0$$

Оптимална тачка

$(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3, \hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{p}, \hat{q}, \hat{r})$

$= (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1) \quad \Rightarrow (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3) = (0, 1, 0)$

$\hat{y}_2 = 1, \ \hat{v}_1 = 0, \ \hat{v}_2 = 1 \qquad \hat{v} = \hat{v}_1 - \hat{v}_2 = 0 - 1 = -1$

Овде је јединствена оптимална тачка!

ТЕСТ 1

INPUT: $\begin{pmatrix} 100 & 0 \\ -100 & 200 \end{pmatrix}$

OUTPUT: $\hat{x} = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$, $\hat{y} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$\hat{v} = 50$ → ВРЕДНОСТ ИГРЕ

ТЕСТ 2

INPUT: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

OUTPUT: $\hat{x} = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$, $\hat{y} = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

$\hat{v} = \frac{3}{2}$