Matrice

October 4, 2022

Matrice

Matrica je pravougaona tablica brojeva sa m vrsta i n kolona:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Ako je $m = n$ matrica je kvadratna.
- Dimenzija matrice $m \times n$ predstavlja (broj vrsta) $\times$ (broj kolona).
- Dve matrice $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ su jednake ako su istih dimenzija $m \times n$ i ako je $a_{ij} = b_{ij}, 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$.

Definicija

Neka su $A = [a_{ij}]$ *i* $B = [b_{ij}]$ *matrice dimenzija* $m \times n$. *Njihov zbir je matrica dimenzije* $m \times n$: $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Zbir dve matrice različitih dimenzija nije definisan.

Definicija

Neka je $A = [a_{ij}]$ *matrica dimenzije* $m \times n$ *i* α *skalar. Proizvod matrice* A *i skalara* α *je matrica dimenzije* $m \times n$: $\alpha A = [\alpha a_{ij}]$.

Teorema

Neka su A, B i C matrice dimenzije $m \times n$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ skalari. Tada važi:

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
4. $1A = A$
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

Dokaz: za domaći.

Definicija

Neka je $A = [a_{ij}]$ *matrica dimenzije* $m \times n$ *i matrica* $B = [b_{ij}]$ *dimenzije* $n \times p$. *Proizvod dve matrice* A *i* B *je matrica dimenzije* $m \times p$:

$$AB = [c_{ij}],\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},\ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p.$$

Teorema

Neka su A, B *i* C *matrice dimenzija takvih da su odgovarajuća množenja definisana i neka je* $\alpha \in \mathbb{C}$ *skalar. Tada važi:*

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $A(B + C) = AB + AC$
   $(A + B)C = AC + BC$
3. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

Dokaz: za domaći.

- Ako postoji proizvod AB to ne znači da postoji i proizvod BA.
- Ako su A i B kvadratne, onda postoji i AB i BA. Međutim, množenje matrica u opštem slučaju nije komutativno tj. $AB \neq BA$.
- $AC = BC \nRightarrow A = B$.
- Neutralni element za sabiranje je nula matrica (matrica istih dimenzija kao matrica sa kojom se sabira i kojoj su svi elementi nule).
- Neutralni element za množenje je jedinična matrica (na dijagonali su jedinice, ostalo su sve nule): $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$.
- Ako je matrica A dimenzije $m \times n$ onda je neutral za množenje sa desne strane jedinična matrica dimenzije $n \times n$, dok za množenje sa leve strane je jedinična matrica dimenzije $m \times m$ tj. $A_{m\times n} \cdot I_{n\times n} = A_{m\times n}$ i $I_{m\times m} \cdot A_{m\times n} = A_{m\times n}$.

Definicija

***Transponovana matrica** matrice A dimenzije $m \times n$ je matrica A^T dimenzije $n \times m$ koja se od matrice A dobija tako što vrste matrice A zamene mesta sa odgovarajućim kolonama:*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Teorema

Neka su A i B matrice dimenzija takvih da su operacije množenja definisane i neka je $\alpha \in \mathbb{C}$ skalar. Tada važi:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

Determinanta

Determinanta kvadratne matrice reda n definiše se preko determinanti matrica reda $n-1$.

Oznake: $\det(A)$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Determinanta je broj.

Određivanje determinante matrice

$n = 1:\ A = [a_{11}] \Rightarrow \det(A) = a_{11}.$

$$n = 2:\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$n = 3:$ Sarusovo pravilo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

$n > 3:$ po definiciji.

Definicija

Determinanta koja se nalazi u preseku r proizvoljnih vrsta i r proizvoljnih kolona matrice A je ***minor reda*** *r matrice A.*

Definicija

Ako je A kvadratna matrica, ***minor*** *M_{ij}* ***elementa*** *a_{ij} je determinanta matrice koja se dobija nakon izbacivanja i-te vrste i j-te kolone matrice A.*

Definicija

Kofaktor *C_{ij} je $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.*

Napomena: Minori i kofaktori se mogu razlikovati samo u znaku.

Definicija

Ako je A matrica reda $n \geq 2$, njena determinanta se računa preko:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}C_{1j} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots + a_{1n}C_{1n}$$

Teorema

Laplasov razvoj determinante po i-toj vrsti:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}.$$

Laplasov razvoj determinante po j-toj koloni:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij} = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}.$$

Dokaz sledi iz narednih svojstava determinante.

Svojstva determinanti

1) Determinanta je aditivna po kolonama i vrstama.
2) Ako se svi elementi jedne vrste/kolone matrice A pomnože skalarom λ onda je determinanta tako dobijene matrice jednaka $\lambda \det(A)$.
3) Determinanta ne menja vrednost ako se jednoj vrsti/koloni doda neka druga vrsta/kolona pomnožena proizvoljnim brojem.
4) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
5) Ako dve vrste/kolone matrice A zamene mesta determinanta tako dobijene matrice menja znak.
6) $\det(A^T) = \det(A)$.
7) $\det(A) = 0$ ako je ispunjeno nešto od sledećeg:
   - cela vrsta ili kolona matrice A sadrži samo nule.
   - dve vrste/kolone matrice A su iste.
   - vrste/kolone matrice A su linearno zavisne.

Inverzna matrica

Definicija

Kvadratna matrica A reda n je ***invertibilna*** *ako postoji kvadratna matrica B reda n takva da je*

$$AB = BA = I.$$

Ukoliko takva matrica B postoji, nazivamo je ***inverzom*** *matrice A i označavamo sa A^{-1} (tj. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.)*

Definicija

Matrica A je ***regularna*** *ako je $\det(A) \neq 0$.*
Matrica A je ***singularna*** *ako je $\det(A) = 0$.*

Teorema

Matrica A je invertibilna akko $\det(A) \neq 0$.

Dokaz na času.
Napomena: samo regularne matrice imaju inverz.

Teorema

Ako je A invertibilna, onda je njen inverz jedinstven.

Dokaz na času.

Teorema

Ako je A invertibilna, onda je $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Dokaz na času.

Definicija

***Adjungovana matrica** matrice A reda n je matrica*

$$Adj(A) \overset{def}{=} \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

gde su C_{ij} kofaktori.

Teorema

Ako je A regularna kvadratna matrica, onda je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A).$$

Svojstva inverznih matrica

1) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
2) $(A^{-1})^{-1} = A$
3) $(A^{-1})^k = \underbrace{A^{-1} \cdot \ldots \cdot A^{-1}}_{\text{k puta}} = (A^k)^{-1},\ k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}.$
4) $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1},\ c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$
5) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
6) Ako je C invertibilna onda važi:
   a) $AC = BC \Rightarrow A = B$
   b) $CA = CB \Rightarrow A = B$

Dokazi na času.

Rang matrice

Definicija

Rang matrice je maksimalni red regularnih minora matrice.

Teorema

Rang matrice jednak je maksimalnom broju linearno nezavisnih vrsta te matrice odnosno maksimalnom broju linearno nezavisnih kolona te matrice.

Kanonski oblik matrice je $\begin{bmatrix} 1 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ \vdots & & & 0 & & \vdots \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & \dots & & 0 \end{bmatrix}$.

Rang je jednak broju jedinica na dijagonali.

Definicija

Dve matrice su ***ekvivalentne*** *ako se iz jedne može dobiti druga nizom elementarnih transformacija. Ekvivalentne matrice imaju isti rang.*

Elementarne transformacije koje ne menjaju rang matrice:

- Množenje neke vrste/kolone brojem različitim od 0.
- Dodavanje nekoj vrsti/koloni neku drugu vrstu/kolonu pomnoženu nekim brojem.
- Zamena dve vrste/kolone.