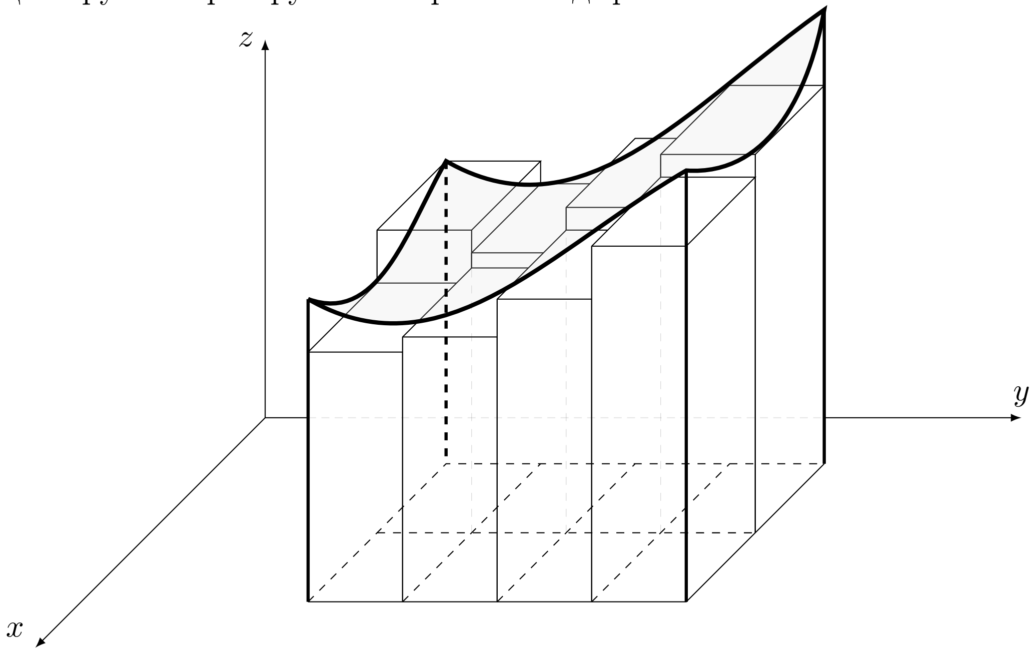
7 Вишеструки интеграли

На курсу Математика 1 смо дефинисали интеграле функција на интервалу $[a, b]$ као граничну вредност збира површина малих правоугаоника код којих је једна страница била $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ а друга вредност $f(\eta_j)$ функције f у некој тачки $\eta_j \in [x_{j-1}, x_j]$. Двоструки и троструки интеграл ћемо дефинисати слично.



7.1 Двоструки интеграли (на правоугаонику)

Нека је дат правоугаоник

$$A = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Нека су интервали $[a, b]$ и $[c, d]$ подељени на следећи начин:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_m = b,$$

$$c = y_0 < y_1 < ... < y_n = d.$$

Правоугаоник A је издељен на $m \cdot n$ правоугаоника облика:

$$A_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) | x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\},\ i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n.$$

Нека је дужина i-тог интервала $[x_{i-1}, x_i]$ означена са Δx_i и дужина j-тог интервала $[y_{j-1}, y_j]$ означена са Δy_j.

Површину правоугаоника A_{ij} означавамо са $P(A_{ij})$ али овде ћемо користити и ознаку $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$.

Дефиниција 7.1. ***Риманова интегрална сума*** *функције* $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^2$ *за поделу* $\mathcal{P}$ *је*

$$\mathcal{R}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j, \;\; (x_i^*, y_j^*) \in A_{ij}.$$

Нека је $||P||$ дужина дијагонале правоугаоника P_{ij}. Када $||P|| \to 0$ подела $\mathcal{P}$ је све финија (више мањих правоугаоника са мањим дијагоналама).

Дефиниција 7.2. ***Двоструки интеграл*** *функције* $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^2$ *над правоугаоником* A *је*

$$\lim_{||P|| \to 0} \mathcal{R}(f, \mathcal{P}) \stackrel{def}{=} \iint\limits_A f(x, y) dx dy.$$

Ако овај лимес постоји онда се каже да је функција f **интеграбилна** на A.

7.2 Троструки интеграли (на квадру)

Нека је дат квадар $A = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}$.

Нека су интервали $[a, b]$, $[c, d]$ и $[e, f]$ подељени на следећи начин:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_m = b$$

$$c = y_0 < y_1 < ... < y_n = d$$

$$e = z_0 < z_1 < ... < z_s = f$$

Квадар A је издељен на $m \cdot n \cdot s$ квадара облика:

$$\begin{aligned} A_{ijk} &= [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k] \\ &= \{(x, y, z) | x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j, z_{k-1} \leq z \leq z_k\}, \\ & i = 1, ..., m, j = 1, ..., n, k = 1, ..., s. \end{aligned}$$

Означимо **поделу** квадра A са:

$$\mathcal{P}_{[a,b] \times [c,d] \times [e,f]} = \{A_{ijk} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq s\}.$$

Нека су редом дужине i-тог $[x_{i-1}, x_i]$, j-тог $[y_{j-1}, y_j]$ и k-тог интервала $[z_{k-1}, z_k]$ означене редом са Δx_i, Δy_j и Δz_k.

Запремина квадра A_{ijk} једнака је: $\Delta A_{ijk} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j \cdot \Delta z_k$.

Риманова интегрална сума функције $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^3$ за поделу $\mathcal{P}$ је:

$\mathcal{R}(f,\mathcal{P})=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{s}f(x_i^*,y_j^*,z_k^*)\cdot\Delta x_i\cdot\Delta y_j\cdot\Delta z_k,\ (x_i^*,y_j^*,z_k^*)\in A_{ijk}$. Нека је $||P||$ дужина дијагонале квадра P_{ijk}. Када $||P||\to 0$ подела $\mathcal{P}$ је све финија (више мањих квадара са мањим дијагоналама).

Дефиниција 7.3. ***Троструки (тројни) интеграл*** *функције $f:A\to\mathbb{R}, A\subseteq\mathbb{R}^3$ над квадром A је*

$$\iiint\limits_A f(x,y,z)dxdydz=\lim_{||P||\to 0}\mathcal{R}(f,\mathcal{P}).$$

7.3 n-тоструки интеграл над правуглим n-паралелопипедом

Нека је дат правоугли n-паралелопипед $A=[a_1,b_1]\times...\times[a_n,b_n]=\{(x_1,...,x_n)|a_i\le x_i\le b_i\}$.

Дефиниција 7.4. ***n-тоструки интеграл*** *функције $f:A\to\mathbb{R}, A\subseteq\mathbb{R}^n$ над n-паралелопипедом A је*

$$\overbrace{\int...\int\limits_A}^{n} f(x_1,...,x_n)dx_1...dx_n=\lim_{||P||\to 0}\mathcal{R}(f,\mathcal{P}).$$

7.4 Егзистенција и својства вишеструких интеграла

Нека је A сегмент из $\mathbb{R}^n$ и $f:A\to\mathbb{R},\ A\subseteq\mathbb{R}^n$.

Теорема 7.1. *Ако је функција f интеграбилна на A онда је она ограничена на A.*

Теорема 7.2. *Ако је функција f непрекидна на A онда је она интеграбилна на A.*

Теорема 7.3. *Ако је функција f интеграбилна на A и ако је B подсегмент од A ($B\subseteq A$) онда је f интеграбилна и на B.*

7.5 Својства

Теорема 7.4. *Нека је A сегмент из $\mathbb{R}^n$ и $A=\bigcup\limits_{i=1}^{p}A_i$ једна подела сегмента A. Ако је $f:A\to\mathbb{R}$ интеграбилна на сваком подсегменту $A_i,\ i=1,...p$, онда је она интеграбилна и на A и важи:*

$$\overbrace{\int...\int\limits_A}^{n} f(x)dx=\sum_{i=1}^{p}\overbrace{\int...\int\limits_{A_i}}^{n} f(x)dx.$$

Теорема 7.5. *Нека је A сегмент из $\mathbb{R}^n$ и нека су $f,g:A\to\mathbb{R}$ интеграбилне на A. Тада важе следећа тврђења:*

- *Функција $\lambda \cdot f,\ \lambda \in \mathbb{R}$ је интеграбилна на A и важи:*

$$\int\limits_A \lambda f(x)dx = \lambda \int\limits_A f(x)dx.$$

- *Функција $f \pm g$ је интеграбилна на A и важи:*

$$\int\limits_A (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_A f(x)dx \pm \int\limits_A g(x)dx.$$

- *Ако је $f(x) \geq 0$ на A онда је $\int\limits_A f(x)dx \geq 0$.*

- *Ако је $f(x) \leq g(x)$ за свако $x \in A$ онда је $\int\limits_A f(x)dx \leq \int\limits_A g(x)dx$.*

- *Функција $|f(x)|$ је интеграбилна на A и важи:*

$$\left|\int\limits_A f(x)dx\right| \leq \int\limits_A |f(x)|dx.$$

Теорема 7.6. ***Фубинијева теорема*** *(за функцију $f(x,y)$ две променљиве)*
Нека је $f : A \to \mathbb{R},\ A = [a,b] \times [c,d]$ непрекидна функција. Онда је:

$$\iint\limits_A f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right) dy.$$

Напомена 7.7. *Користимо запис:*

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy.$$

Пример 7.8. *Израчунати*

$$\iint\limits_A (1 - 2x^2y)dxdy$$

где је $A = [0,1] \times [-2,2]$.

Решење. Имамо да је

$$\iint\limits_A (1-2x^2y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_{-2}^2 \left(1 - 2x^2y\right) dy\right) dx = \int_0^1 \left[y - x^2y^2\right]\Big|_{-2}^2 dx = \int_0^1 4dx = 4x\Big|_0^1 = 4.$$

Ако израчунамо интеграл у другом поретку, имамо да је:

$$\iint_A (1-2x^2y)dxdy = \int_{-2}^{2}\left(\int_0^1 \left(1-2x^2y\right)dx\right)dy = \int_{-2}^{2}\left[x-\frac{2}{3}x^3y\right]\Big|_0^1 dy = \int_{-2}^{2}\left(1-\frac{2}{3}y\right)dy = y\Big|_{-2}^{2} = 4.$$

□

Теорема 7.9. ***Фубинијева теорема*** *(за функцију $f(x,y,z)$ три променљиве)*
Нека је $f : A \to \mathbb{R}$, $A = [a,b]\times[c,d]\times[r,s]$ непрекидна функција. Онда је:

$$\iiint_A f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_r^s f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx = \int_a^b \left(\int_r^s \left(\int_c^d f(x,y,z)dy\right)dz\right)dx = \dots$$

Пример 7.10. *Израчунати*

$$\iiint_A (x^2y^3z^4)dxdydz$$

где је A дат квадар са $A = [0,1]\times[0,1]\times[0,2]$.

Решење. Очигледно је

$$\iiint_A x^2y^3z^4dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^2 x^2y^3z^4dz\right)dy\right)dx = \int_0^1 x^2dx\int_0^1 y^3dy\int_0^2 z^4dz = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1\cdot\frac{y^4}{4}\Big|_0^1\cdot\frac{z^5}{5}\Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2^5}{5} = \frac{8}{15}.$$

□

7.6 Двоструки интеграл на произвољном скупу

Из Математика 1 смо научили да су све непрекидне функције интеграбилне. Интеграбилне су и оне које "немају много тачака прекида" и чији су прекиди само прве врсте [1] Слично важи и код двоструког интеграла. Ограничена функција је интеграбилна ако и само ако је њен скуп тачака прекида (мере) површине нула.

Ако је D ограничен скуп. Хоћемо да дефинишемо интеграл дате функције f по скупу D. Карактеристична функција скупа D је

-
$$\chi_D(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D. \end{cases} \tag{7.1}$$

[1] Обновити прекиде прве и друге врсте функције једне променљиве.

Нека је $f : D \to \mathbb{R}$.

Прекиди функције χ су тачно тачке које припадају ∂D. Нису само непрекидне функције интеграбилне већ и оне које имају "мало" тачака прекида. Зато, ако је ∂D површине нула и ако припада неком правоугаонику A, χ ће бити интеграбилна на A.

Напомена 7.11. *Овакве скупове, из претходног параграфа, обично зовемо мерљивим скуповима.*

Пример 7.12. *Скупови* $D_1 = \{(x,y) : x^2 + (y-4)^2 < 10\}$, $D_2 = \{(x,y) : \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{3} \leq 9\}$ *и* $D_3 = \{(x,y) : |x| + |y| \leq 3\}$ *су мерљиви.*

Пример 7.13. Пример скупа који није мерљив *је* $D = \{(x,y) : [0,1] \cap \mathbb{Q}\}$. *За домаћи испитати* ∂D*?*

Нека је функција $f : D \to \mathbb{R}$ непрекидна на правоугаонику $A \subseteq \mathbb{R}^2$ и нека је скуп $D \subset A$ мерљив. Тада је скуп тачака прекида функције $\bar{f} = f \cdot \chi_D$ садржан у ∂D (тј. површине нула), па је функција $\bar{f}$ интеграбилна на A. Видимо да је:

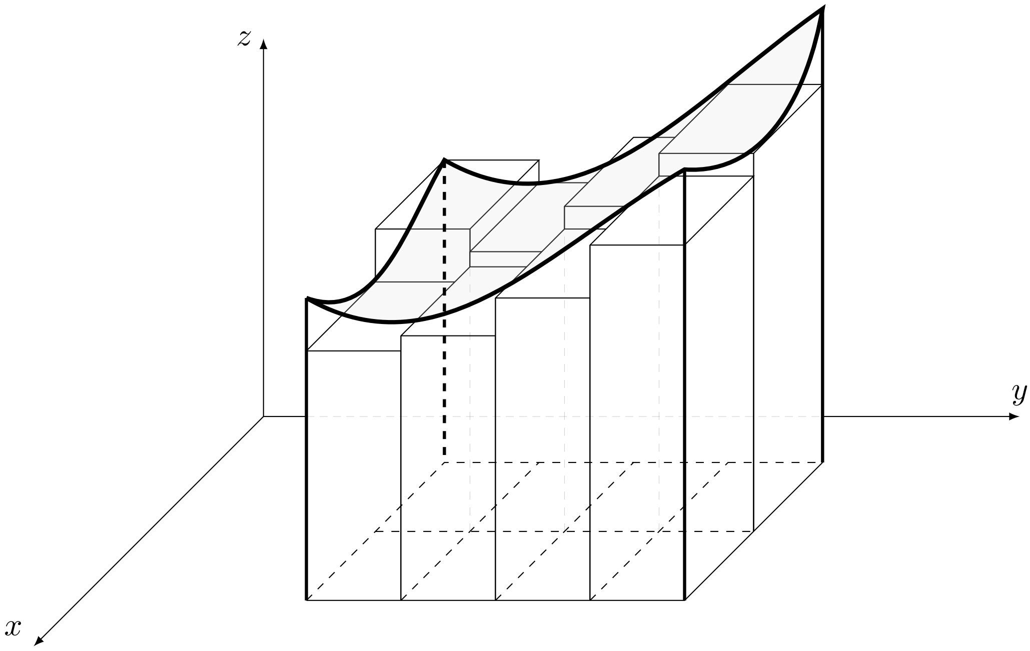
- $$\bar{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{cases} \tag{7.2}$$

Заправо је функција $\bar{f}$ непрекидно продужење функције f. Одавде и добијамо дефиницију двоструког интеграла функције f на скупу D.

Дефиниција 7.5. *Двоструки интеграл непрекидне функције* f *на мерљивом скупу* $D \subset A$ *је дефинисан на следећи начин:*

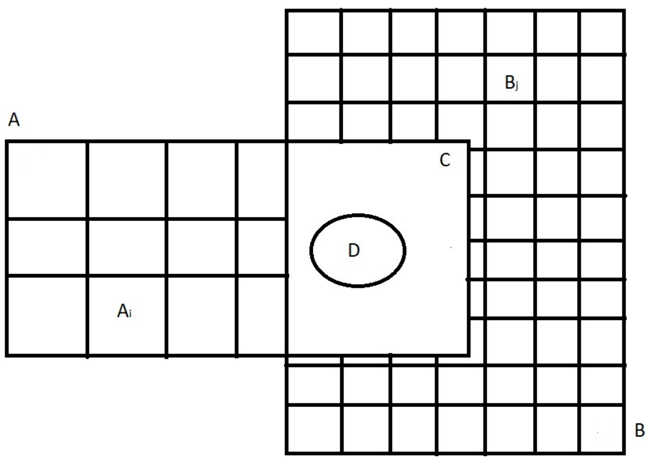
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_A \bar{f}(x,y)dxdy$$

где је A *произвољан правоугаоник који садржи скуп* D.



Напомена 7.14.

- *Пошто је D ограничен скуп, увек ће постојати правоугаоник који га садржи. (Ово директно следи из дефиниције ограниченог скупа.)*
- *Претходна дефиниција не зависи од избора правоугаоника.*



Дефиниција не зависи од избора правоугаоника који садржи D.

Видимо да је

$$C = A \cap B,\ A = C \cup A_1 \cup \ldots \cup A_p,\ B = C \cup B_1 \cup \ldots \cup B_q.$$

Како на скуповима $A_1, \ldots, A_p, B_1, \ldots, B_q$ функција $\bar{f}$ има вредност 0 имамо да је:

$$\iint\limits_A \bar{f}dxdy = \iint\limits_C \bar{f}dxdy + \overbrace{\iint\limits_{A_1} \bar{f}dxdy + \ldots + \iint\limits_{A_p} \bar{f}dxdy}^{=0} = \iint\limits_C \bar{f}dxdy,$$

$$\iint\limits_B \bar{f} dxdy = \iint\limits_C \bar{f} dxdy + \overbrace{\iint\limits_{B_1} \bar{f} dxdy + \ldots + \iint\limits_{B_q} \bar{f} dxdy}^{=0} = \iint\limits_C \bar{f} dxdy.$$

Одавде очигледно закључујемо да мора бити

$$\iint\limits_A \bar{f} dxdy = \iint\limits_B \bar{f} dxdy = \iint\limits_C \bar{f} dxdy$$

па је заправо интеграл функције $\bar{f}$ на скупу A једнак интегралу функције $\bar{f}$ на скупу B тј.

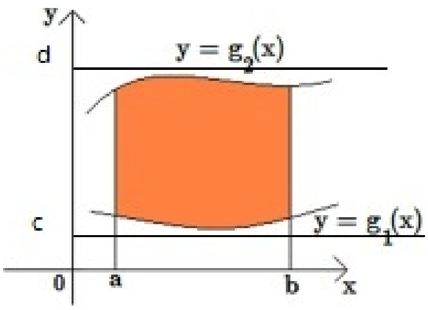
$$\iint\limits_A \bar{f} dxdy = \iint\limits_B \bar{f} dxdy.$$

Теорема 7.15. Фубинијева теорема *Нека је област $D \subset \mathbb{R}^2$ дефинисана на следећи начин:*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$

Тада је

$$\iint\limits_D f(x, y) dxdy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$



Идеја доказа. Како је

$$\bar{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\} \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases} \tag{7.3}$$

имамо да је

$$\iint\limits_D f(x, y) dxdy \overset{def}{=} \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} \bar{f}(x, y) dxdy$$
$$= \int_a^b \left(\int_c^d \bar{f}(x, y) dy \right) dx$$

$$= \int_a^b \left(\overbrace{\int_c^{g_1(x)} \bar{f}(x,y)dy}^{=0} + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \bar{f}(x,y)dy + \overbrace{\int_{g_2(x)}^{d} \bar{f}(x,y)dy}^{=0} \right) dx$$

$$= \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

□

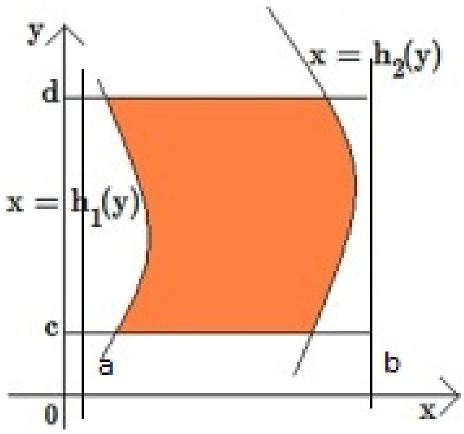
Ако се област D може описати на другачији начин онда исто важи:

Теорема 7.16. Фубинијева теорема *Нека је област $D \subset \mathbb{R}^2$ дефинисана на следећи начин:*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d, h_1(y) \le x \le h_2(y)\}.$$

Тада је

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$



Идеја доказа. Како је

$$\bar{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d, h_1(y) \le x \le h_2(y)\} \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{cases} \tag{7.4}$$

имамо да је

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \stackrel{def}{=} \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} \bar{f}(x,y)dxdy$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b \bar{f}(x,y)dx \right) dy$$

$$= \int_c^d \left(\overbrace{\int_a^{h_1(y)} \bar{f}(x,y)dx}^{=0} + \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \bar{f}(x,y)dx + \overbrace{\int_{h_2(x)}^{b} \bar{f}(x,y)dx}^{=0} \right) dy$$

$$= \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

□

Напомена 7.17. *Ако је област D могуће написати на два начина:*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d, h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

тада важи

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Напомена 7.18. *Уместо ознаке*

$$\int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

обично користимо нотацију

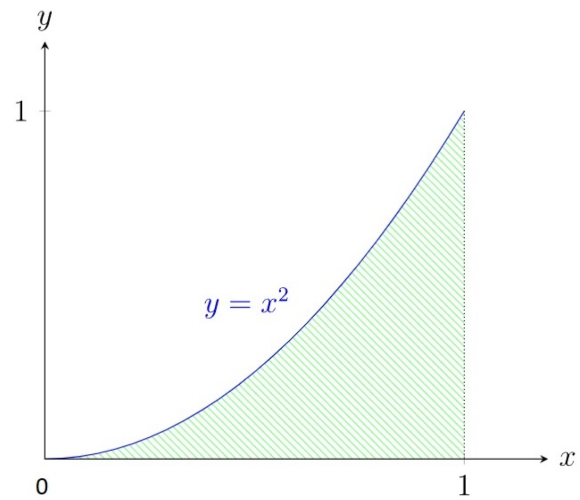
$$\int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy$$

и слично за други поредак.

Пример 7.19. *Израчунати*

$$\iint\limits_D (2x + y^3)dxdy$$

ако је $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}$.



Решење. На основу Фубинијеве теореме је

$$\iint_D (2x+y^3)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (2x+y^3)dy \right) dx = \int_0^1 \left(2x \cdot y \Big|_0^{x^2} + \frac{y^4}{4} \Big|_0^{x^2} \right) dx = \int_0^1 \left(2x^3 + \frac{x^8}{4} \right) dx$$

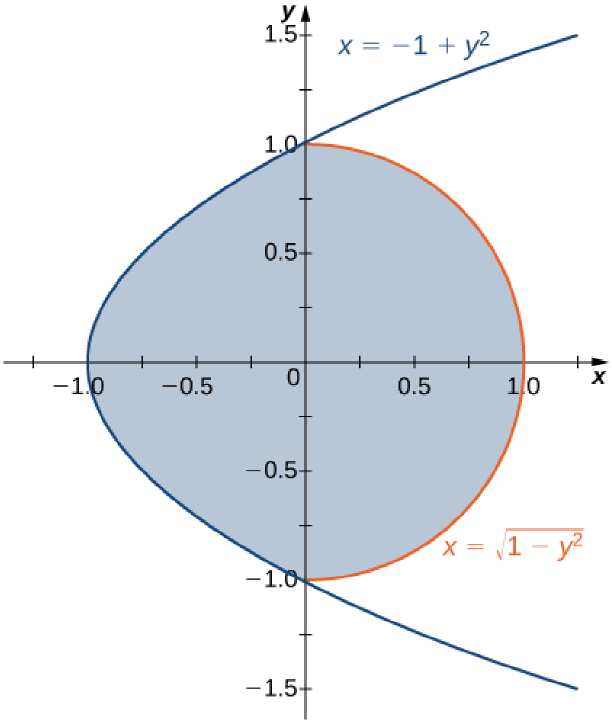
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{36} = \frac{19}{36}.$$

□

Пример 7.20. *Израчунати*

$$\iint_D 2xdxdy$$

ако је област D настала у пресеку круга $x^2+y^2=1$ и параболе $x=y^2-1$.



Решење. Како се скуп D може записати на следећи начин

$$D = \{(x,y) : -1 \le y \le 1,\ y^2-1 \le x \le \sqrt{1-y^2}\}$$

овде можемо применити другу верзију Фубинијеве Теореме 7.16, па имамо да је

$$\iint_D 2xdxdy = \int_{-1}^1 \left(\int_{y^2-1}^{\sqrt{1-y^2}} 2xdx \right) dy = \int_{-1}^1 \left[x^2 \Big|_{y^2-1}^{\sqrt{1-y^2}} \right] dy$$

$$= \int_{-1}^1 \left(1-y^2-(y^2-1)^2\right) dy = \int_{-1}^1 (1-y^2-y^4+2y^2-1)dy = \int_{-1}^1 (y^2-y^4)dy = \frac{2}{3} - \frac{2}{5}.$$

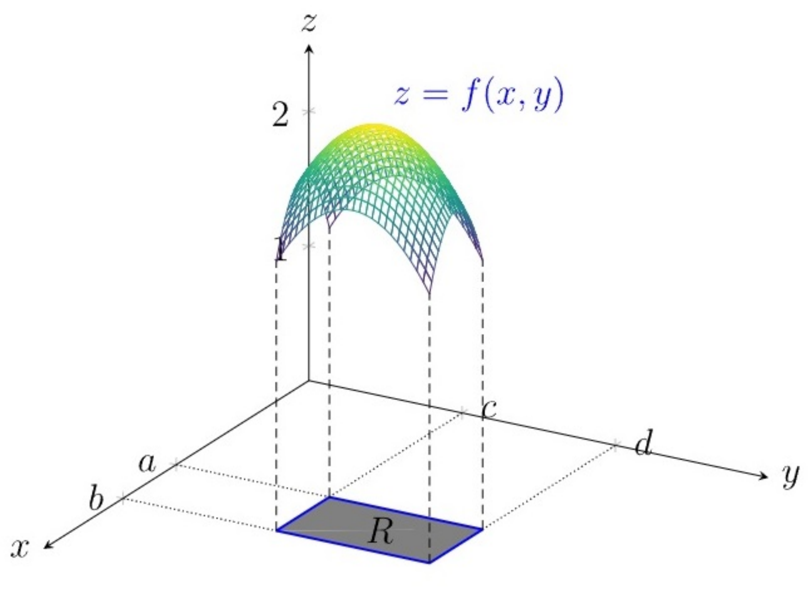
□

Теорема 7.21. *[Својства]* *Нека су функције f и g интеграбилне на A и $D, D_1, D_2 \subset A$ мерљиви. Тада важи:*

1. $\iint\limits_D (f+g)dxdy = \iint\limits_D f dxdy + \iint\limits_D g dxdy;$
2. $\iint\limits_D \lambda f dxdy = \lambda \iint\limits_D f dxdy;$
3. $f(x,y) \leq g(x,y) \ \forall (x,y) \in D \implies \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_D g(x,y)dxdy;$
4. *Површина области D (означаваћемо надаље $P(D)$) се рачуна преко двоструког интеграла:*
$$\iint\limits_D dxdy = P(D);$$
5. *Ако је $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ или $P(D_1 \cap D_2) = 0 \implies \iint\limits_{D_1 \cup D_2} f dxdy = \iint\limits_{D_1} f dxdy + \iint\limits_{D_2} f dxdy;$*

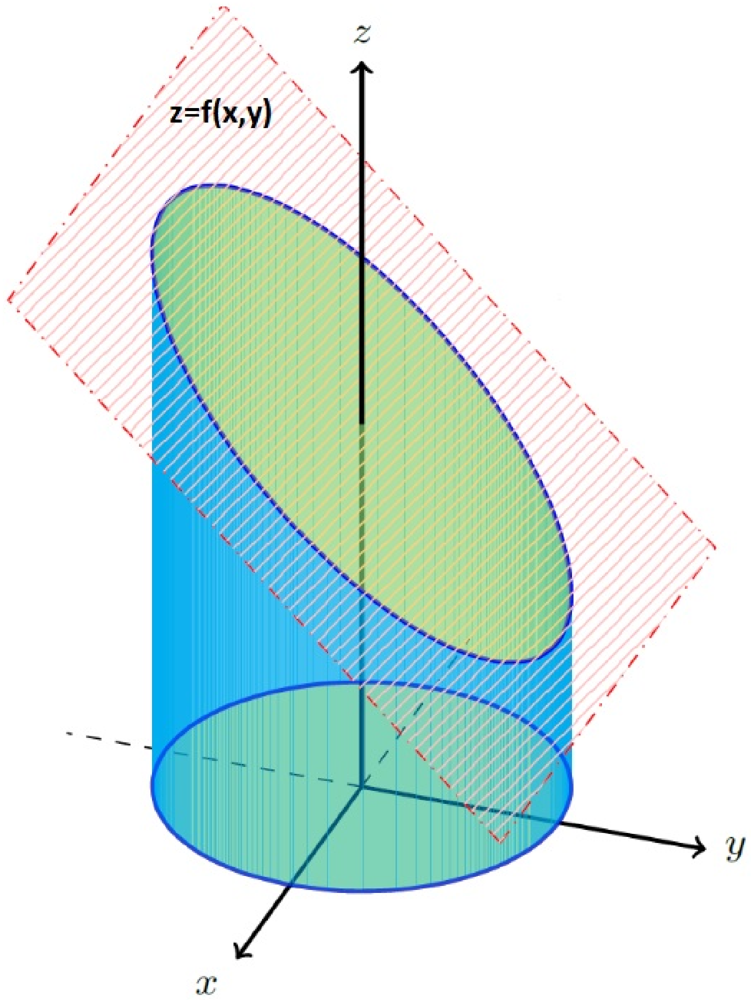
Напомена 7.22 **(Геометријска интерпретација двоструког интеграла).**

- *Ако је $z = f(x,y)$ позитивна функција, тада је двоструки интеграл једнак запремини области изнад Oxy- равни и испод графика функције $z = f(x,y)$ дефинисане на правоугаонику A (слика доле).*



- *Преко двоструког интеграла можемо израчунати запремину цилиндричног тела ограниченог одозго са $z = f(x,y)$ и одоздо са $z = 0$ чије изводнице у равни Oxy чине област D (слика доле), тј.*

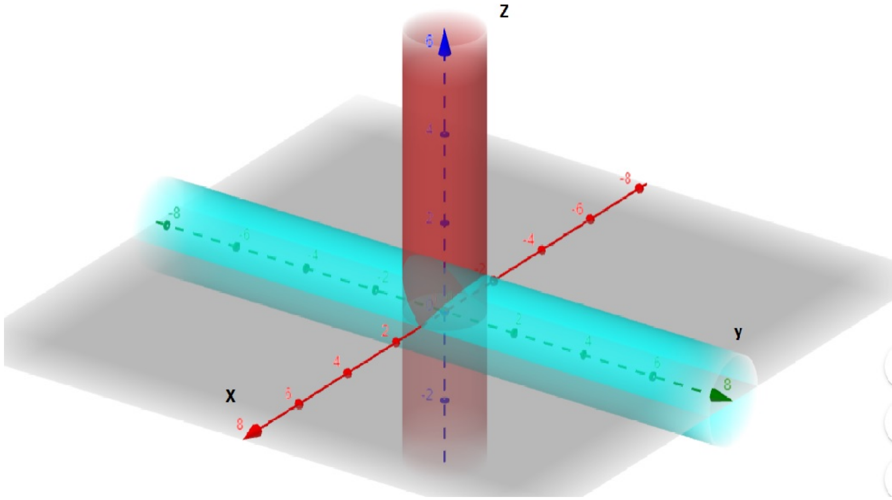
$$V(T) = \iint_D f(x,y)dxdy.$$



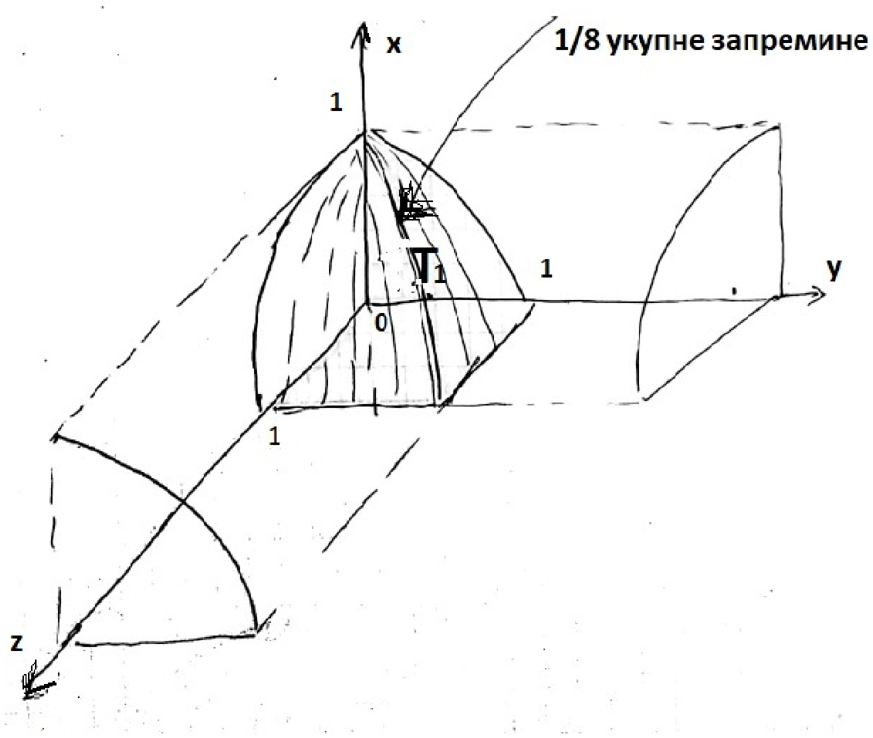
- *Применом двоструког интеграла можемо израчунати површину површи* S *коју изводнице одсецају на* $z = f(x, y)$. *Заправо је*

$$P(S) = \iint\limits_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy.$$

Пример 7.23. *Израчунати запремину тела које настаје у пресеку два цилиндра* $x^2 + y^2 = 1$ *и* $x^2 + z^2 = 1$.



Решење. Видимо на основу слике да је лакше израчунати $V(T_1)$ која представља $\frac{1}{8}$ укупне запремине $V(T)$ која се тражи.



Како је $z = \sqrt{1-x^2}$, имамо да је

$$V(T) = 8V(T_1) = 8 \iint\limits_D f(x,y)dxdy = 8 \iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2}dxdy$$

где је $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$.

Даље добијамо да је

$$V(T) = 8V(T_1) = 8\iint\limits_D f(x,y)dxdy = 8\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2}dxdy = 8\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy$$

$$= 8\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}dx = 8\int_0^1 (1-x^2)dx = \frac{16}{3}.$$

□

Пример 7.24 (За домаћи). *Израчунати површину тела које настаје у пресеку два цилиндра $x^2+y^2=1$ и $x^2+z^2=1$.*

7.7 Троструки интеграл на произвољном скупу

Троструки интеграл на квадру K смо дефинисали у претходном поглављу. Сада дефинишемо мерљив скуп као ограничен скуп чија граница има запремину нула и интеграл по мерљивом скупу $T \subset K$ као

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_K \chi_D(x,y,z)f(x,y,z)dxdydz.$$

Својства која важе код двоструког важе и код троструког интеграла.

Напомена 7.25. *Запремина тела T (означаваћемо са $V(T)$) се рачуна преко троструког интеграла*

$$\iiint\limits_T dxdydz = V(T).$$

Теорема 7.26. Фубинијева *Нека је област $T \subset \mathbb{R}^3$ дефинисана на следећи начин*

$$T = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : a \le x \le b,\ \alpha(x)\le y\le\beta(x),\ \varphi(x,y)\le z\le\psi(x,y)\}.$$

Тада је

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx$$

Пример 7.27. *Израчунати*

$$\iiint\limits_T zdxdydz$$

ако је

$$T = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\in[0,\frac{1}{2}],\ x\le y\le 2x,\ 0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}\}.$$

Решење. На основу Фубинијеве теореме, мамо да је

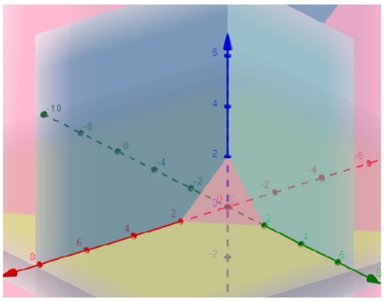
$$\iiint\limits_T z dx dy dz = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{2x} dy \int_0^{1-x^2-y^2} z dz = \frac{1}{2} = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{2x} (1 - x^2 - y^2) dy = \ldots = \frac{7}{192}.$$

□

Пример 7.28. *Израчунати запремину тела T које ограничавају коордниатне равни Oxy, Oxz, Oyz и раван $x + y + z = 2$.*

Решење. Како је $T = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2 - x,\ 0 \leq z \leq 2 - x - y\}$ (види слику доле) имамо на основу Фубинијеве теореме да је

$$V(T) = \iiint\limits_T dx dy dz = \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} \left(\int_0^{2-x-y} dz \right) dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} (2 - x - y) dy \right) dx = \frac{4}{3}.$$



□

8 Смена промењливих у вишеструким интегралима

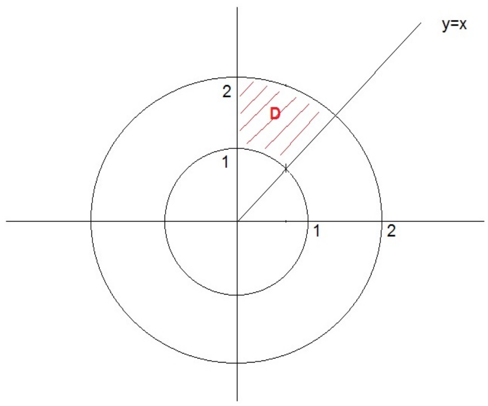
На курсу Математика 1, код једноструког интеграла научили како се ради смена промењливе. Ако је функције $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрекидна а функција φ:$[\alpha,\ \beta]$$\to$ $[a, b]$ има непрекидан извод и још је $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ тада важи:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

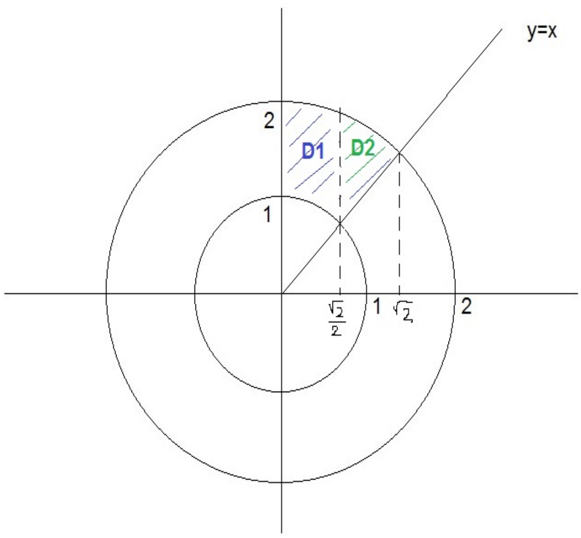
8.1 Смена промењливих у двоструком интегралу

Код функција више промењливих, извод φ' замениће Јакобијан (подсетити се Јакобијана).

Пример 8.1. *Нека је D област ограничена кружницама са центром у координатном почетку, полупречника $r_1 = 1$ и $r_2 = 2$ и правама $y = x$ и $x = 0$. Намеће се питање како можемо описати област D?*



- **1. начин:** Поделимо област D на унију две области D_1 и D_2 тако да је D=$D1 \cup D2$



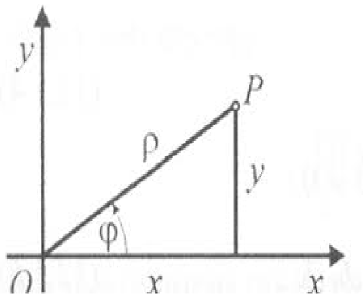
- Сада D_1 и D_2 можемо описати на следећи начин:
- $D1 = \{(x,y)|x \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}], y \in [\sqrt{1-x^2}, \sqrt{4-x^2}]\}$ и $D2 = \{(x,y)|x \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}], y \in [x, \sqrt{4-x^2}]\}$
- Одавде, примењујући ставку 5 Теореме 7.21, важи:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D2} f(x,y)dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_x^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy.$$

Други начин да опишемо област D је помоћу поларних координата.

8.2 Поларне координате



Поларне координате у равни одредјује једна полуправа и њен почетак (центар O). Свака тачка P осим центра О се на једниствен начин описује једним паром (ρ, ϕ) где ρ представаља растојање од тачке P до координатног почетка O а угао (азимут) $\phi \in [0, 2\pi]$ је усмерен између поларне осе и полуправе OP.

Даље, имамо да је

$$\sin(\varphi) = \frac{naspramna\ kateta}{hipotenuza} = \frac{y}{\rho} \Rightarrow y = \rho \sin(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{nalegla\ kateta}{hipotenuza} = \frac{x}{\rho} \Rightarrow x = \rho \cos(\varphi).$$

Очигледно је

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \rho^2 \cos^2(\varphi) + \rho^2 \sin^2(\varphi) \\ &= \rho^2(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) \\ &= \rho^2 \\ &\Rightarrow \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \frac{\rho \sin(\varphi)}{\rho \cos(\varphi)} \\ &= tg(\varphi) \\ &\Rightarrow \varphi = arctg(\frac{y}{x}). \end{aligned}$$

Вратимо се на Пример 8.1. Видимо да важи:

- Све тачке које се налазе између две кружнице су на удаљености од координаног почетка за $\rho \in [1, 2]$.
- Угао између праве $y = x$ и x-осе је $\frac{\pi}{4}$, а угао између праве $x = 0$ и x-осе је $\frac{\pi}{2}$. За све тачке између ове две праве важи да је азимут $\varphi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

Одавде, видимо да се област D може приказати на другачији начин:

$$D^* = \{(\rho, \varphi) : \rho \in [1, 2], \varphi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]\}.$$

Теорема 8.2. Смена промењљивих у двоструком интегралу *Ако је* $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$ *и* $|J| \neq 0$, *тада важи*

$$\iint\limits_{D} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D*} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J|dudv.$$

Последица 8.3. *Нека је функција* $f(x, y)$ *непрекидна на* $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *који се помоћу* ***поларних координата*** *може трансформисати у* $D^* = \{(\rho, \varphi) : \rho \in [a, b], \varphi \in [\alpha, \beta]\}$. *Тада је:*

$$\iint\limits_{D} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D*} f(x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi)) \cdot \rho d\rho d\varphi$$

Поларне координате:

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\varphi) \\ y = \rho\sin(\varphi) \\ \rho \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi], \\ |J| = \rho. \end{cases}$$

Сменом: $x = \rho\cos(\varphi)$, $y = \rho\sin(\varphi)$ посматрамо пресликавање чија је Јакобијева матрица

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\rho\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \rho\cos(\varphi) \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} |J| &= \cos(\varphi) \cdot \rho\cos(\varphi) + \rho\sin(\varphi) \cdot \sin(\varphi) \\ &= \rho(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) \\ &= \rho \end{aligned}$$

У наставку, израчунајмо двоструки интеграл функције $f(x, y) = x^2 + y^2$ у области D из Примера 8.1. Како је

$$D^* = \left\{(\rho, \varphi) : \rho \in [1, 2], \varphi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]\right\}$$

и $|J| = \rho$ имамо да је

$$\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy = \iint\limits_{D^*}(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\phi)|J|d\rho d\varphi = \iint\limits_{D^*}\overbrace{\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}^{=\rho^2}\overbrace{|J|}^{=\rho}d\rho d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{1}^{2}\rho^3 d\rho d\varphi$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{1}^{2}\rho^3 d\rho = \left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\frac{2^4}{4}-\frac{1}{4}\right).$$

Елиптичке координате:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos(\varphi) \\ y = b\rho\sin(\varphi) \\ \rho \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi], \\ |J| = ab\rho, \\ a, b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Сменом: $x = a\rho\cos(\varphi)$, $y = b\rho\sin(\varphi)$ посматрамо пресликавање чија је Јакобијева матрица

$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\cos(\varphi) & -a\rho\sin(\varphi) \\ b\sin(\varphi) & b\rho\cos(\varphi) \end{bmatrix}$. Одавде добијамо да је

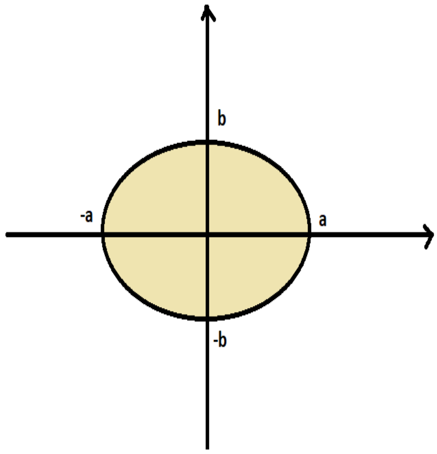
$$\begin{aligned} |J| = \det(J) &= ab\cos(\varphi)\cdot\rho\cos(\varphi) + ab\rho\sin(\varphi)\cdot\sin(\varphi) \\ &= ab\rho(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)) \\ &= ab\rho. \end{aligned}$$

Пример 8.4. *Одредити површину елипсе*

$$\epsilon : \ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Решење. Површину елипсе можемо израчунати применом двоструког интеграла

$$P(\epsilon) = \iint\limits_{\epsilon} dxdy.$$



Увођењем елиптичких координата

$$\begin{cases} x = a\rho\cos(\varphi) \\ y = b\rho\sin(\varphi) \\ \rho \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi], \\ |J| = ab\rho, \end{cases}$$

имамо да је

$$0 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

тј.

$$0 \leq \frac{a^2\rho^2\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{b^2\rho^2\sin^2\varphi}{b^2} \leq 1$$

односно

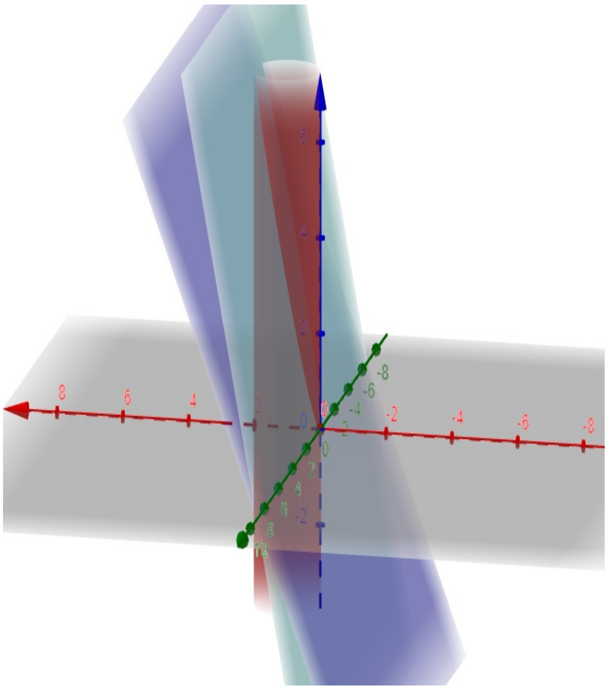
$$\rho \in [0, 1].$$

Угао видимо на основу слике да је $\varphi \in [0, 2\pi]$. Даље је

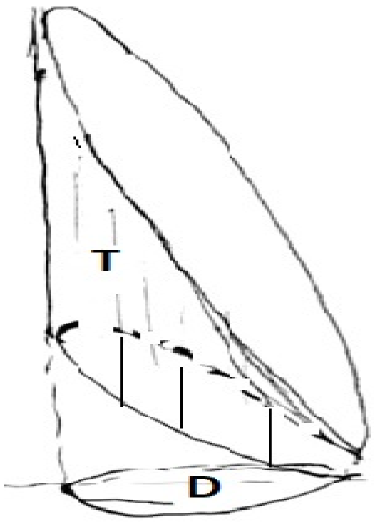
$$P(\epsilon) = \iint\limits_{\epsilon} dxdy = \iint_{D^*} ab\rho d\rho d\varphi = ab\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho = ab \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = ab\pi.$$

□

Пример 8.5. *Одредити запремину цилиндра* $x^2 + y^2 = 2x$ *ограниченог равнима* $z = 2x$ *и* $z = 4x$.



Решење.

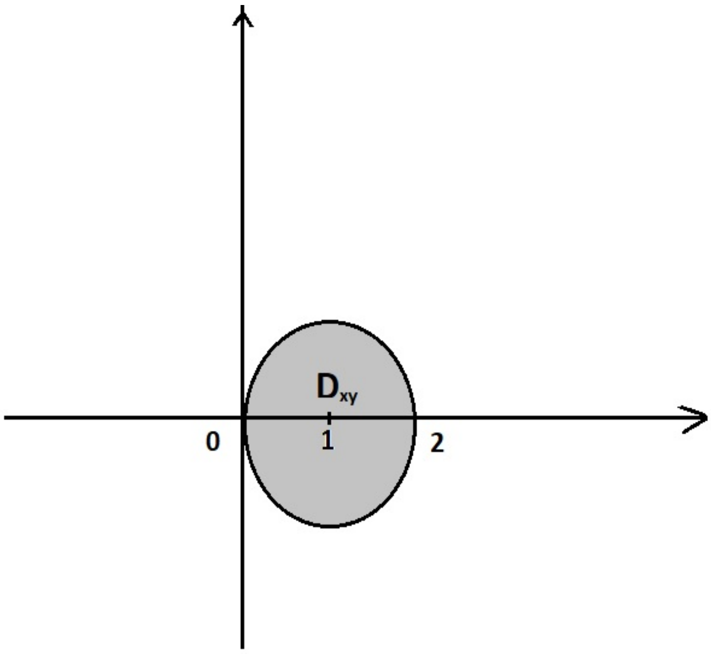


Видимо да запремину $V(T)$ тела T можемо израчунати тако што од целе запремине тела T_1 можемо одузети запремину тела T_2 па имамо да је

$$V(T) = V(T_1) - V(T_2) = \iint_D 4x dx dy - \iint_D 2x dx dy = \iint_D 2x dx dy.$$

Остаје нам да израчунамо још

$$\iint_D 2x dx dy.$$



Увођењем поларних координата (из $0 \leq \overbrace{x^2 + y^2}^{=\rho^2} \leq \overbrace{2x}^{=2\rho\cos\varphi}$) имамо да је

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\varphi) \\ y = \rho\sin(\varphi) \\ \rho \in [0, 2\cos\varphi], \varphi \in [-\pi, \pi], \\ |J| = \rho. \end{cases}$$

па је коначно

$$\iint_D 2x dx dy = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\varphi} \rho^2 \cos\varphi d\rho\right) d\varphi$$

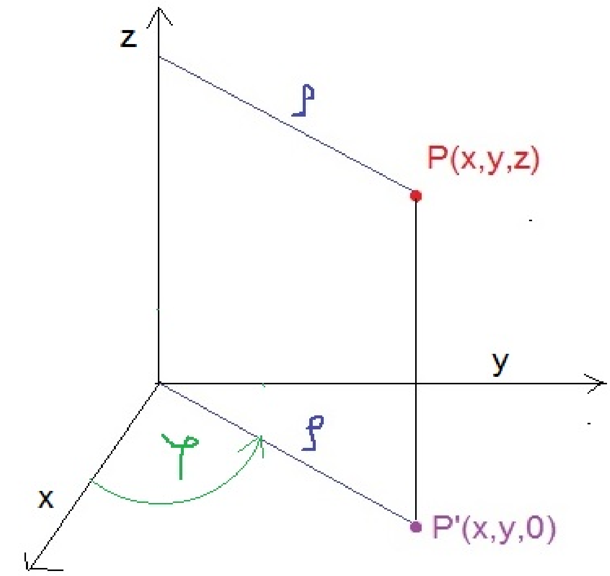
$$= \frac{16}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi = 2 \cdot \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi = 2\pi.$$

Овде смо користили својство парности подинтегралне функције на симетричном интервалу.

$\square$

8.3 Смена промењљивих у троструком интегралу

8.4 Цилиндричне координате



- $P(x, y, z)$ - тачка
- $P'(x, y, 0)$ - пројекција тачке P на Oxy раван
- ρ - растојање тачке P' од координатног почетка, $\rho \geq 0$
- φ - угао између x-осе и вектора одређеног тачком P', $\varphi \in [0, 2\pi]$

За запис пројекције тачака цилиндра на Oxy раван користе се поларне координате. Трећа промењљива z остаје непромењена.

Цилиндричне координате:

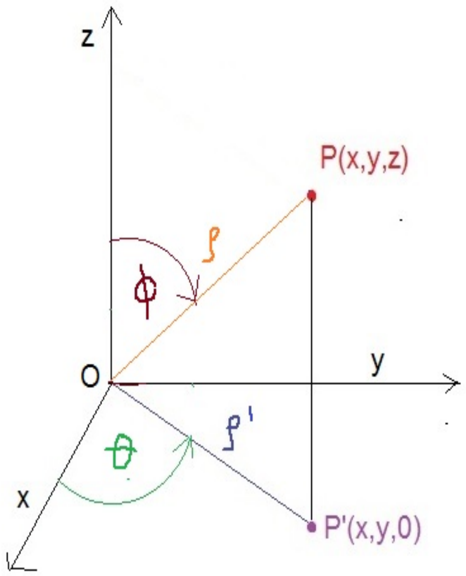
$$\begin{cases} x = \rho\cos(\varphi) \\ y = \rho\sin(\varphi) \\ z = z \\ \rho \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi], z \in \mathbb{R} \\ |J| = \rho. \end{cases}$$

Видимо да је очигледно Јакобијан

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -\rho\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & -\rho\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -\rho\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\rho\cos(\varphi) \end{vmatrix} = \rho.$$

8.5 Сферне координате



$P(x, y, z)$ - тачка

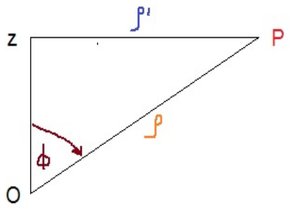
$P'(x, y, 0)$ - пројекција тачке P на Oxy раван

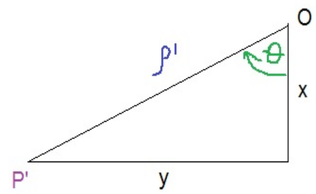
ρ - растојање тачке P од координатног почетка, $\rho \geq 0$

ρ' - растојање тачке P' од координатног почетка, $\rho' \geq 0$

θ - угао између x-осе и OP', $\theta \in [0, 2\pi]$

ϕ - угао између z-осе и OP, $\phi \in [0, \pi]$





$\sin(\phi) = \frac{\rho'}{\rho} \Rightarrow \rho' = \rho\sin(\phi)$
$\cos(\phi) = \frac{z}{\rho} \Rightarrow z = \rho\cos(\phi)$

$\sin(\theta) = \frac{y}{\rho'} \Rightarrow y = \rho'\sin(\theta)$
$\cos(\theta) = \frac{x}{\rho'} \Rightarrow x = \rho'\cos(\theta)$

Хиперболичке координате:

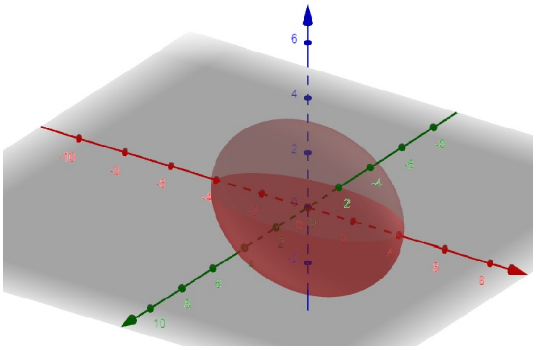
$$\begin{cases} x = a\rho\sin(\phi)\cos(\theta) \\ y = b\rho\sin(\phi)\sin(\theta) \\ z = c\rho\cos(\phi) \\ a, b, c \in \mathbb{R}, \rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \pi] \\ |J| = abc\rho^2\sin(\phi). \end{cases}$$

Проверити за домаћи да је

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = abc\rho^2\sin(\phi)$$

Пример 8.6. *Одредити запремину елипсоида*

$$E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Решење. На основу хиперболичких координата имамо да је

$$V(E) = \iiint\limits_{E} dxdydz = abc \overbrace{\int_0^1 \rho^2 d\rho}^{=\frac{1}{3}} \overbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}^{=2\pi} \overbrace{\int_0^{\pi} \sin\phi d\phi}^{=2} = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{4\pi}{3} abc.$$

□

Специјалан случај хиперболичких координата (за $a = b = c = 1$) су сферне координате.

Сферне координате:

$$\begin{cases} x = \rho \sin(\phi)\cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\phi)\sin(\theta) \\ z = \rho\cos(\phi) \\ \rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \pi] \\ |J| = \rho^2 \sin(\phi). \end{cases}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \rho^2 \sin(\phi).$$

8.6 Задаци за самосталан рад

9 Криволинијски и површински интеграли

У овој глави нећемо више иннтегралити на подскуповима реалне осе или равни већ по одређеним ”кривама”, односно кривим површима.

9.1 Криволинијски интеграли I и II врсте

Дефиниција 9.1. *Крива у простору $\mathbb{R}^n$ је непрекидно пресликавање $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ где је $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$ (Крива у равни $\mathbb{R}^2$ је $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$).*

Нека се тачка M креће у простору $\mathbb{R}^n$. Нека је у моменту t положај тачке M одређен координатама $x_1(t), ..., x_n(t)$. Вектор $(x_1(t), ..., x_n(t))$ се назива вектором положаја тачке M. Једначине $x_1 = x_1(t), ..., x_n = x_n(t)$ су параметарске једначине криве. Параметар t је параметар криве (може да се интерпретира као време, угао, итд.). Интервал $[a, b]$ је **домен параметра** t.

Параметризација криве

:

- У равни: $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j},\ \vec{i} = [1, 0]^T, \vec{j} = [0, 1]^T$
- У простору: $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k},\ \vec{i} = [1, 0, 0]^T, \vec{j} = [0, 1, 0]^T, \vec{k} = [0, 0, 1]^T$

Напомена 9.1 (На часу смо показивали)**.** *Параметризација криве није јединствена.*

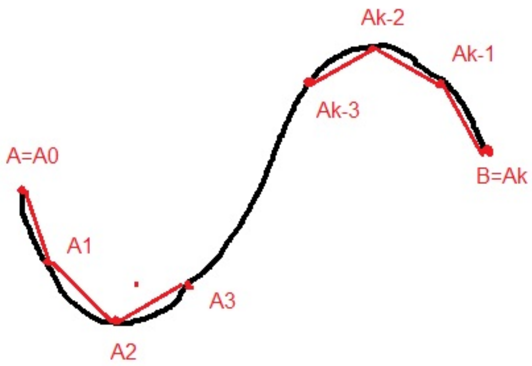
За свако $t_1, t_2 \in [a, b], t_1 < t_2$ крива C је оријентисана од тачке $\vec{r}(t_1)$ ка тачки $\vec{r}(t_2)$. Специјално, $\vec{r}(a)$ је почетак, а $\vec{r}(b)$ је крај криве C. Ако је $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ (почетак и крај се поклапају) онда је C затворена крива. У случају затворене криве користимо појмове позитивно и негативно оријентисана крива.

Намеће се питање:”Шта је позитивно оријентисана затворена крива?” Обилазимо криву, тако што се крецемо по кривој а унутрашња област остаје са леве стране (смер супротан од казаљке на сату).

Намеће се питање:”Шта је негативно оријентисана затворена крива?” Обилазимо криву, тако што се крећемо по кривој а унутрашња област остаје са десне стране (смер казаљке на сату).

Ако постоје тачке такве да за $t_1 \neq t_2$ важи $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2) = T$ онда је T **самопресечна тачка** криве (осим у случају $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$). Ако крива нема самопресека онда је она проста крива.

9.2 Дужина криве



Нека је

$$P : a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$$

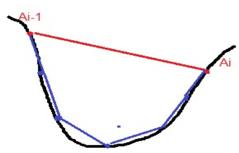
подела сегмента $[a, b]$, $A_0 = \vec{r}(t_0), ..., A_k = \vec{r}(t_k)$ и r_P полигонална линија чија су темена $A_0 = \vec{r}(t_0), ..., A_k = \vec{r}(t_k)$. Каже се да је полигонална линија уписана у криву.

Дужина дужи одређене тачкама A_{i-1} и A_i је

$$||\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})||.$$

Дужина полигоналне линије r_P је

$$\ell(r_P) = \sum_{i=1}^{k} ||\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})||.$$



Ако сваки део криве $\widehat{A_{i-1}Ai}$ изделимо на још тачака, добијамо финију поделу P'. Њој одговара полигонална линија $r_{P'}$ чија је дужина $\ell(r_{P'})$. На основу неједнакости троугла је

$$\ell(r_P) \leq \ell(r_{P'}).$$

Заправо, финије поделе резултирају полигоналним линијама веће дужине (Крива може имати коначну или бесконачну дужину).

Крива која има коначну дужину је ректифицијабилна крива.

Дефиниција 9.2. *Крива је* ***ректифицијабилна*** *(има коначну дужину) ако постоји* M, $(0 < M < \infty)$, *такво да*

$$\sum_{i=1}^{k} ||\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})|| < M$$

за сваку поделу $P : a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$ *сегмента* $[a, b]$.

Ако је крива C ректифицијабилна онда је дужина криве C једнака

$$\ell(C) = \sup_{P} \sum_{i=1}^{k} ||\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})||.$$

Крива је диференцијабилна акко су све координатне функције диференцијабилне. За диференцијабилну векторску функцију $\vec{r}(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ вектор $(x'_1(t), ..., x'_n(t))$ зовемо њеним **првим изводом** и означавамо $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}' = (x'_1(t), ..., x'_n(t))$. Крива је **непрекидно диференцијабилна** акко $\exists \vec{r}'$ и $\vec{r}'$ је непрекидна функција.
Еквивалентно, $\vec{r}$ је непрекидно диференцијабилна ако су јој све координатне функције непрекидно диференцијабилне.

Тачка криве C је сингуларна тачка криве ако је $\vec{r}'(t) = \vec{0}$ (у тој тачки постоји две или више тангенти на криву).

Ако је $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ за неко $t \in [a, b]$ онда је са $\vec{r}'(t)$ одређена тангента криве у тачки $\vec{r}(t)$. Тангента је права која пролази кроз $\vec{r}(t)$ и чији је вектор правца $\vec{r}'(t)$. Кажемо да је крива глатка ако постоји $\vec{r}'(t)$, ако је $\vec{r}'(t)$ непрекидна на $[a, b]$ и $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in [a, b]$ (нема сингуларних тачака). Крива је глатка ако се у свакој тачки те криве може одредити јединствена тангента.

Теорема 9.2. *Нека је* $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *глатка крива. Тада је* r *ректифицијабилна крива и њена дужина је дата са:*

$$\ell(r) = \int_a^b ||\vec{r}'(t)||dt = \int_a^b \sqrt{(x'_1(t))^2 + ... + (x'_n(t))^2}dt.$$

Дефиниција 9.3. *Крива је део-по-део глатка ако постоји подела* $P : a = S_0 < S_1 < ... < S_m = b$ *сегмента* $[a, b]$ *таква да је крива глатка на сваком од сегмената* $[S_{i-1}, S_i]$, $i = 1, ..., m$.

Једине тачке које ремете непрекидност "кретања" тангенте су коначно много тачака $S_1, ..., S_{m-1}$.

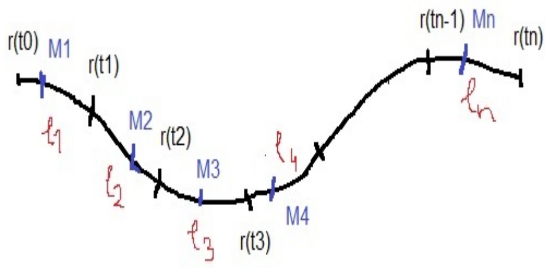
Теорема 9.3. *Нека је* $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *део-по-део глатка крива. Тада је* r *ректифицијабилна* *крива и њена дужина је дата са:*

$$\ell(r) = \int_a^b ||\vec{r}'(t)||dt = \int_a^b \sqrt{(x_1'(t))^2 + ... + (x_n'(t))^2}dt$$

при чему занемарујемо коначно много тачака S_i *у којима не постоји први извод* $\vec{r}'(S_i)$.

9.3 Криволинијски интеграл прве врсте

Нека је $P: a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ произвољна подела сегмента $[a, b]$ којом је глатка крива C са параметризацијом $\vec{r}(t),\ t \in [a, b]$ подељена на n лукова l_i.



Нека је Δl_i - дужина лука l_i и $f : C \to \mathbb{R}$ (домен је крива). На сваком луку l_i изаберемо произвољну тачку M_i.

Криволинијски интеграл функције f дуж глатке криве C дефинише се преко Риманових интегралних сума на следећи начин:

$$\int_C f \cdot ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \Delta l_i.$$

Теорема 9.4. Израчунавање криволинијског интеграла I **врсте** *Ако крива* C *има део-по-део глатку параметризацију* $\vec{r}(t)$ *на* $[a, b]$ *и ако је* $\vec{r}$ *непрекидна, онда криволинијски интеграл прве врсте непрекидне функције* $f(x, y, z)$ *дуж криве* C *постоји и он је једнак:*

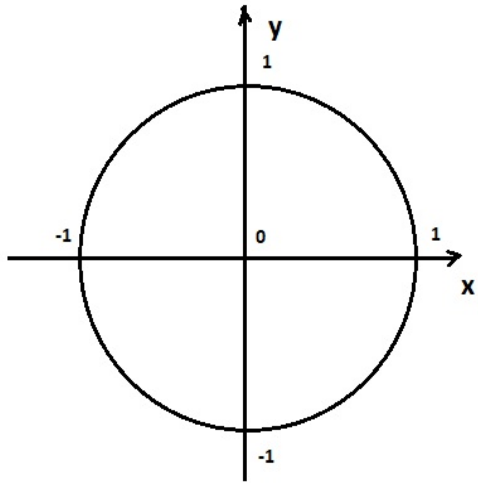
$$\int_C f(x, y, z)ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \cdot ||\vec{r}'(t)||dt = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt$$

Специјално: Ако је $f \equiv 1$ на $[a, b]$ онда је дужина криве

$$\ell(C) = \int_C ds.$$

Пример 9.5. *Израчунати*

$$\int_{\mathcal{C}\,:x^2+y^2=1} (x + y^2 - 1)ds.$$



Решење. Како су параметарске једначине кружнице $x^2 + y^2 = 1$ дате са

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ t \in [0, 2\pi]$$

и $x'(t) = -\sin t$, $y'(t) = \cos t$, имамо, на основу претходне две Теореме, да је

$$\int_{\mathcal{C}\,:x^2+y^2=1} (x+y^2-1)ds = \int_0^{2\pi} (\cos t + \sin^2 t - 1) \cdot \overbrace{\sqrt{sin^2 t + cos^2 t}}^{=1}\, dt = \int_0^{2\pi} (\cos t + \sin^2 t - 1)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos t dt + \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt - \int_0^{2\pi} dt = -\pi.$$

$\square$

Теорема 9.6 (Својства). *Нека је $\mathcal{C}$ лук криве између тачака A и B, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и нека су f и g функције дефинисане на луку $\mathcal{C}$ и интеграли $\int\limits_{\mathcal{C}} f(x, y, z)ds$ и $\int\limits_{\mathcal{C}} g(x, y, z)ds$ постоје. Тада:*

- $\int\limits_{\mathcal{C}} (\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z))ds = \alpha \int\limits_{\mathcal{C}} f(x, y, z)ds + \beta \int\limits_{\mathcal{C}} g(x, y, z)ds.$
- $\int\limits_{\mathcal{C}} ds = \ell(\mathcal{C})$ *где је* $\ell(\mathcal{C})$ *дужина лука криве* $\mathcal{C}$.

- $\int\limits_{AB} f(x,y,z)ds = \int\limits_{AC} f(x,y,z)ds + \int\limits_{CB} f(x,y,z)ds$
  где је $C \in \mathcal{C}$ *тачка између* A *и* B.

- $|\int\limits_{\mathcal{C}} f(x,y,z)ds| \leq \int\limits_{\mathcal{C}} |f(x,y,z)|ds.$

- *Ако* $f(x,y,z) \leq g(x,y,z) \implies \int\limits_{\mathcal{C}} f(x,y,z)ds \leq \int\limits_{\mathcal{C}} g(x,y,z)ds.$

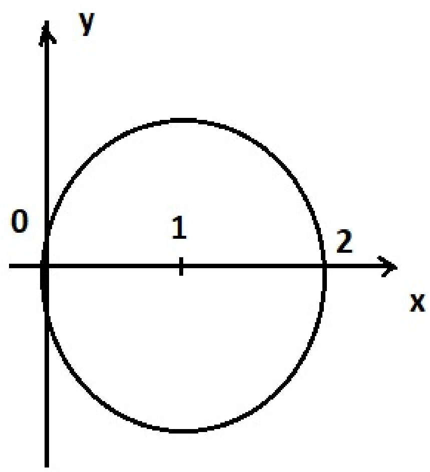
- $\int\limits_{AB} f(x,y,z)ds = \int\limits_{BA} f(x,y,z)ds$

- $\int\limits_{\mathcal{C}} f(x,y,z)ds = f(x_0,y_0,z_0) \cdot \ell(\mathcal{C})$ *за неку* $(x_0,y_0,z_0) \in \mathcal{C}$.

Пример 9.7 (Рађен на часу). *Израчунати*

$$\oint_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2+y^2}ds$$

ако је $\mathcal{C} : x^2+y^2 = 2x$.



Пример 9.8. *Израчунати*

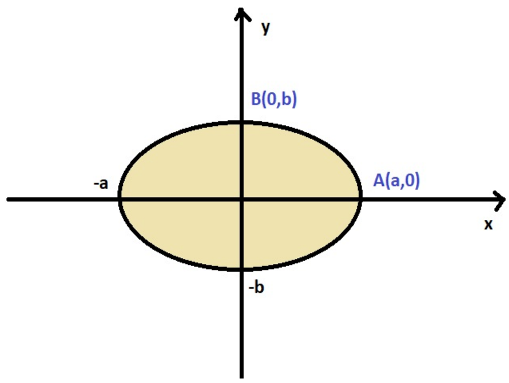
$$\int_{\widehat{AB}} \frac{ds}{\sqrt{x^2+4y^2}}$$

по луку $\widehat{AB}$ *праве која пролази кроз тачке* $A(2,0)$ *и* $B(4,1)$.

Пример 9.9. *Израчунати*

$$\int_{\widehat{AB}} xyds$$

ако је $\widehat{AB}$ *део лука елипсе* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *од тачке* $A(a,0)$ *до тачке* $B(0,b)$.



Решење. После параметризације елипсе имамо да је

$$x(t) = a\cos t,\ y(t) = b\sin t,\ \ t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Даље је[2]

$$\int_{\widehat{AB}} xyds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\cos t\sin t\sqrt{\underbrace{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}_{=u^2}}dt$$

$$= ab\int_b^a \frac{u^2du}{a^2-b^2} = \frac{(a^3-b^3)ab}{3(a^2-b^2)}.$$

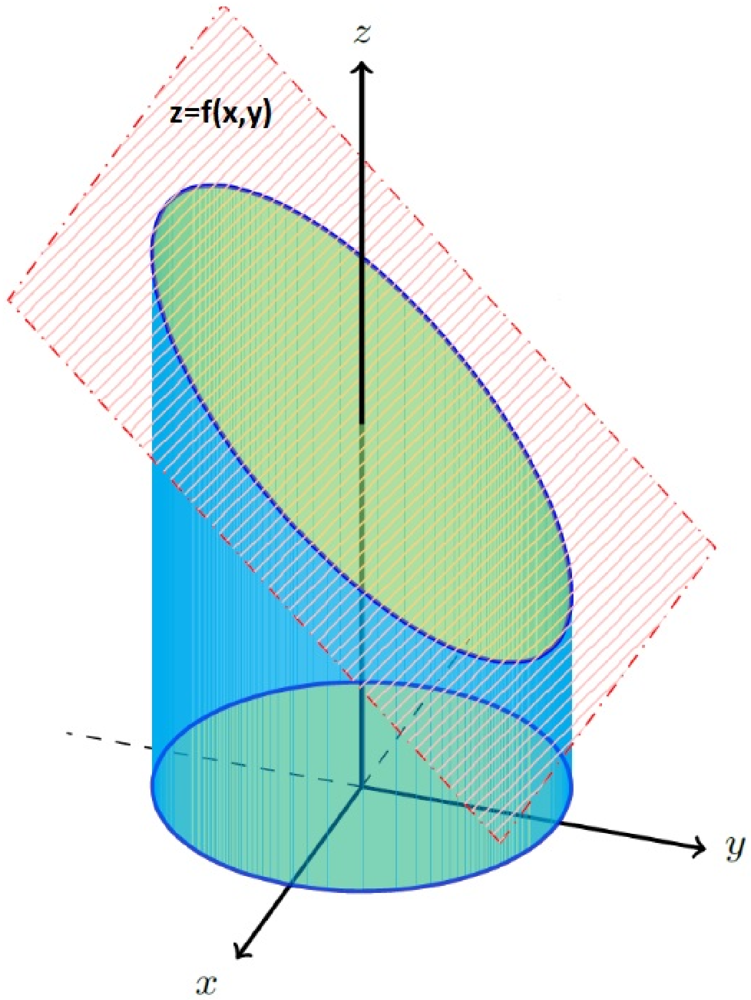
□

9.4 Примена криволинијског интеграла I врсте, геометријско тумачење

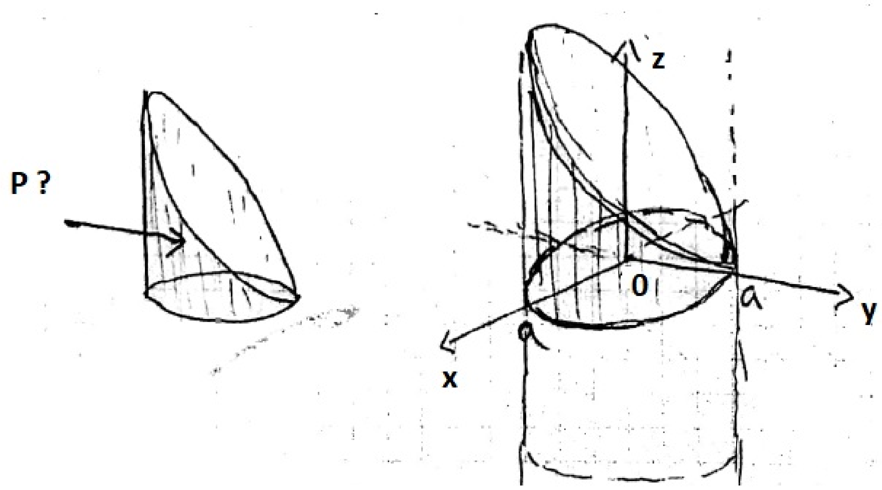
Ако крива $\mathcal{C}$ припада некој код координатних равни (нпр. $\mathcal{C} \in 0xy$) тада се функција $f(x,y,z)$ своди на функцију две променљиве $f(x,y,0)$.

- Криволинијски интеграл $\int_{\mathcal{C}} f(x,y)ds$ представља површину цилиндричне површи чије су изводнице паралелне z-оси. Доњи базис је ограничава крива $\mathcal{C}$ а горњи базис се налази у пресеку те површи и површи $z = f(x,y)$.

[2] Овде је урађена смена променљиве $u^2 = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t$, $udu = (a^2-b^2)\sin t\cos tdt$



Пример 9.10. *Израчунати површину оног дела цилиндричне површи* $x^2 + y^2 = a^2$ *који се налази између равни* $z = 0$ *и* $z + y = a$.



Решење. На основу претходног геометријског тумачења видимо да је тражена површина

$$P = \int_{\gamma} f(x, y) ds$$

где је $z = f(x, y) = a - y$ и параметризација криве γ: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Па даље имамо да је

$$P = \int_{\gamma} (a - y)ds = \int_0^{2\pi} (a - a\sin t) \overbrace{\sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t}}^{=a} dt = a^2 \overbrace{\int_0^{2\pi} (1 - \sin t)dt}^{=2\pi} = 2a^2\pi.$$

$\square$

Пример 9.11. *Израчунати површину цилиндричне површи $x^2 + y^2 = 2x$ која се налази у сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.*

9.5 Криволинијски интеграл II врсте

Нека је крива C дата параметризацијом $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ и нека су $P(x, y, z), Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ функције дефинисане и ограничене на C. Нека је

$$P : a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$$

подела сегмента $[a, b]$. Изаберимо вредности $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Нека су тачке на кривој: $A_i(x(t_i), y(t_i), z(t_i)) = \vec{r}(t_i)$ и $M_i(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) = \vec{r}(\tau_i)$. Користићемо следеће ознаке:

- $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}, \quad x_i = x(t_i), x_{i-1} = x(t_{i-1})$
- $\triangle y_i = y_i - y_{i-1}, \quad y_i = y(t_i), y_{i-1} = y(t_{i-1})$
- $\triangle z_i = z_i - z_{i-1}, \quad z_i = z(t_i), z_{i-1} = z(t_{i-1})$

Саставимо кореспондирајуће Риманове интегралне суме:

- $\mathcal{R}_1(P, C) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(M_i)\triangle x_i$
- $\mathcal{R}_2(Q, C) = \sum\limits_{i=1}^{n} Q(M_i)\triangle y_i$
- $\mathcal{R}_3(R, C) = \sum\limits_{i=1}^{n} R(M_i)\triangle z_i$

Дефиниција 9.4. *Ако за функцију $P(x, y, z)$ (односно $Q(x, y, z), R(x, y, z)$) дефинисану и ограничену на кривој C, постоји*

$$\lim_{\triangle \ell_i \to 0} \mathcal{R}_1(P, C)(odnosno \lim_{\triangle \ell_i \to 0} \mathcal{R}_2(Q, C),\ \lim_{\triangle \ell_i \to 0} \mathcal{R}_3(R, C))$$

*онда се он назива **криволинијски интеграл друге врсте** фукције P (односно Q, R)*

по кривој C и означава са

$$\int\limits_C P(x,y,z)dx(odnosno \int\limits_C Q(x,y,z)dy, \int\limits_C R(x,y,z)dz).$$

Дефиниција 9.5. *Збир*

$$\int\limits_C P(x,y,z)dx + \int\limits_C Q(x,y,z)dy + \int\limits_C R(x,y,z)dz$$

обично се пише у облику:

$$\int\limits_C (P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz)$$

и назива се ***општи криволинијски интеграл друге врсте****.*

Теорема 9.12. Рачунање криволинијског интеграла друге врсте *Ако крива C има део-по-део глатку параметризацију $\vec{r}(t)$ на $[a,b]$ и $P(x,y,z)$ је непрекидна, тада важи:*

$$\int\limits_C P(x,y,z)dx = \int\limits_a^b P(x(t),y(t),z(t)) \cdot x'(t)dt.$$

Аналогно важи:

$$\int\limits_C Q(x,y,z)dy = \int\limits_a^b Q(x(t),y(t),z(t)) \cdot y'(t)dt.$$

$$\int\limits_C R(x,y,z)dz = \int\limits_a^b R(x(t),y(t),z(t)) \cdot z'(t)dt.$$

Коначно је

$$\int\limits_C (P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz)$$

$$= \int\limits_a^b \big(P(x(t),y(t),z(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t)) \cdot y'(t) + R(x(t),y(t),z(t)) \cdot z'(t)\big)dt.$$

Пример 9.13. *Израчунати криволинијски интеграл друге врсте*

$$\int_{\widehat{AB}} \frac{dx}{y} + \frac{dy}{z} + \frac{dz}{x}$$

ако је $\widehat{AB}$ дуж која спаја $A(1,1,1)$ и $B(2,4,8)$ (оријентисана од A до B).

Решење. Конструкцијом праве p кроз две тачке A и B добијамо

$$p:\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{7}=t,\ t\in\mathbb{R}.$$

Одавде добијамо параметарске једначине праве p:

$$x(t)=t+1,\ y(t)=3t+1,\ z(t)=7t+1,\ t\in[0,1].$$

Видимо да је $x'(t)=1$, $y'(t)=3$ и $z'(t)=7$. Користећи претходну Теорему коначно добијамо да је

$$\int_{\widehat{AB}}\frac{dx}{y}+\frac{dy}{z}+\frac{dz}{x}=\int_0^1\left(\frac{1}{3t+1}+\frac{3}{7t+1}+\frac{7}{t+1}\right)dt=\ln 4+3\ln 8+7\ln 2=18\ln 2.$$

□

Пример 9.14. *Израчунати*

$$\int_\gamma (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$$

ако је γ део криве $y=1-|1-x|$ од тачке $O(0,0)$ то тачке $A(2,0)$.

Пример 9.15. *Израчунати*

$$\oint_{\mathcal{C}} xdy+xdz$$

ако је $\mathcal{C}$ крива која настаје у пресеку цилиндра $x^2+y^2=2x$ и равни $x-z=0$ позитивно оријентисана ако се гледа из тачке $(0,0,1)$.

9.6 Својства криволинијског интеграла II врсте

Теорема 9.16. *Нека је C криве између тачака A и B, нека су P_1 и P_2 функције дефинисане на C и постоје интеграли $\int\limits_C P_1(x,y,z)dx$ и $\int\limits_C P_2(x,y,z)dx$ постоје. Тада важи:*

- $\int\limits_C(\alpha P_1(x,y,z)+\beta P_2(x,y,z))dx=\alpha\int\limits_C P_1(x,y,z)dx+\beta\int\limits_C P_2(x,y,z)dx,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$
- $\int\limits_{AB} P_1(x,y,z)dx=\int\limits_{AM} P_1(x,y,z)dx+\int\limits_{MB} P_1(x,y,z)dx$
  где је $M\in C$ тачка између A и B.

Теорема 9.17. *(Ово својство нема криволинијски интеграл прве врсте)*

Ако постоји $\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx$ *онда је*

$$\int\limits_{BA} P(x,y,z)dx = -\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx.$$

Сматрамо да је лук AB оријентисан и користимо ознаке:

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx = \int\limits_{C} P(x,y,z)dx, \quad \int\limits_{BA} P(x,y,z)dx = \int\limits_{C-} P(x,y,z)dx$$

Напомена 9.18. *Ако је* C *затворена крива користићемо ознаку*

$$\oint\limits_{C} Pdx + Qdy + Rdz.$$

9.7 Независност интеграције од путање

Криволинијски интеграл $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$ у општем случају зависи од путање по којој се врши интеграција (Међутим, некад то није тако). Ако израз

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

представља тотални диференцијал неке функције, онда криволинијски интеграл по луку AB зависи само од тачака A и B, а не од лука AB.

Теорема 9.19. *Следећа тврђења су међусобно еквивалентна:*

1. *Постоји функција* $u(x,y,z)$ *са непрекидним парцијалним изводима таква да важи:* $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$ *и* $\frac{\partial u}{\partial z} = R$.
2. *Криволинијски интеграл* $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$ *по путањи* AB *не зависи од облика путање, него само од тачака* A *и* B.
   Ако су $A = (a_1, a_2, a_3)$ *и* $B = (b_1, b_2, b_3)$ *онда је вредност интеграла*
   $$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = u(b_1, b_2, b_3) - u(a_1, a_2, a_3).$$
3. *Криволинијски интеграл* $\oint\limits_{C} Pdx + Qdy + Rdz$ *по произвољној затвореној путањи* C *једнак је 0.*

Још један критеријум за распознавање да ли је подинтегрална функција $Pdx + Qdy + Rdz$ градијент неке функције $u(x,y,z)$:

Дефиниција 9.6. *Област $D \subset \mathbb{R}^3$ је **просто (једноструко) повезана** ако се свака затворена део-по-део глатка крива $C \subset D$ може "стегнути" у произвољну тачку $M \in C$ остајући при томе у D.*

Пример 9.20 (Рађен на предавањима).

Теорема 9.21. *Нека је $D \subset \mathbb{R}^3$ просто повезана област и нека непрекидна функција $u(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,z,y))$ има непрекидне парцијалне изводе $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial z}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial y}$. Потребан и довољан услов да интеграл $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$ не зависи од путање AB је да су испуњене једнакости:*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

9.8 Гринова теорема

Гринова теорема представља везу између двоструког интеграла по некој области и криволинијског интеграла по граници те области.

Теорема 9.22. *Нека је $D \subset \mathbb{R}^2$ област ограничена део-по-део глатком кривом C. Ако су функције $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрекидне, заједно са својим парцијалним изводима $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ на затвореној области D онда важи:*

$$\oint\limits_{C+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\int\limits_{D} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy.$$

Ознака $\oint\limits_{C+}$ значи да се интеграција врши у позитивно оријентисаном смеру.

Пример 9.23. *Израчунати*

$$\oint_{C^+} (\overbrace{e^x - 5y^2 - 7\sin x^2}^{P})dx + (\overbrace{\sin y^2 + 2x^2 - \sqrt[3]{1+2y^2}}^{Q})dy$$

ако је C^+ крива која ограничава област $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1\, 0 \le y \le x^2\}$.

Решење. Нацртати слику! На основу Гринове теореме имамо да је

$$\oint\limits_{C+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\int\limits_{D} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \iint\limits_{D} (4x + 10y)dxdy.$$

Како је

$$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}$$

имамо да је

$$\iint\limits_D (4x+10y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (4x+10y)dy \right) dx = \int_0^1 (4x^3+5x^4)dx = 1+1 = 2.$$

□

Пример 9.24. *Израчунати*

$$\oint_C (3xy^2-4x^2)dx + (2x^2y-2y^2)dy$$

ако γ *настаје у пресеку кривих* $y = x^5$ *и* $y = \sqrt[5]{x}$ *у првом квадранту.*

Последица 9.25. *Ако је* D *просто повезана област у равни и* C *њена контура,* $P(x,y) = -y$ *и* $Q(x,y) = x$*. Тада је*

$$\oint\limits_{C^+} xdy - ydx = 2\iint\limits_D dxdy \implies P(D) = \frac{1}{2}\oint\limits_{C^+} xdy - ydx.$$

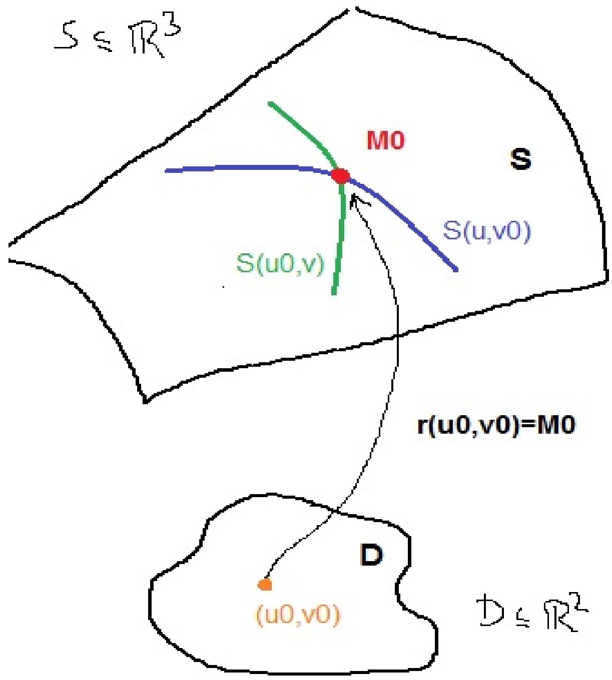
9.9 Површински интеграли

Дефиниција 9.7. *Površ у* $\mathbb{R}^3$ *је непрекидно пресликавање* $S : D \in \mathbb{R}$ *где је* D *ограничена област у* $\mathbb{R}^2$*.*

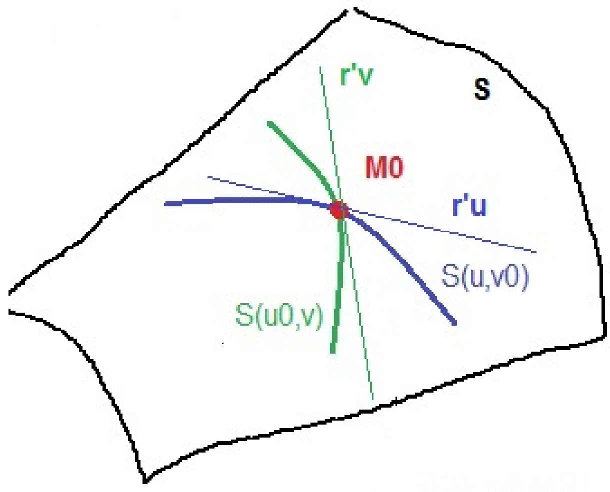
Параметризација површи у $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{r} = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),\ \vec{r}(u,v) = x(u,v)\cdot\vec{i} + y(u,v)\cdot\vec{j} + z(u,v)\cdot\vec{k},$$

где су u и v су **параметри** површи, $(u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$.



Нека је D ограничена област у $\mathbb{R}^2$ и $S : D \to \mathbb{R}^3$ и $(u_0, v_0) \in D$ произвољна тачка. Област D се слика у S. Тачка $(u_0, v_0) \in D$ се слика у $M_0 \in S$. Ако фиксирамо једну координату $v = v_0$ тада функција $S(u, v_0)$ представља криву на површи S. Ако фиксирамо другу координату $u = u_0$ тада функција $S(u_0, v)$ представља криву на површи S. Обе ове криве "пролазе" кроз тачку M_0 и зову се координатне линије површи.



Тангентни вектори ових кривих у тачки $M_0 = \vec{r}(u_0, v_0)$ су $\vec{r_u}'(u_0, v_0)$ и $\vec{r_v}'(u_0, v_0)$.

Дефиниција 9.8. *Раван T кроз тачку $M_0 \in S$ је тангентна раван површи S ако тангентни вектор сваке криве те површи која пролази кроз M_0 припада T.*

Дефиниција 9.9. *Права L која пролази кроз $M_0 \in S$ и при ом је нормална на тангентну раван површи у M_0 је* ***нормала површи*** *S у тачки M_0.*

Нормала на раван T је векторски производ тангентних вектора координатних линија $\vec{r_u}' \times \vec{r_v}'$. Нека је за

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\cdot\vec{i} + y(u,v)\cdot\vec{j} + z(u,v)\cdot\vec{k}$$

$$J = \vec{r_u}' \times \vec{r_v}' = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Означимо са A, B, C кофакторе од J:

$$A(u,v) = \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$B(u,v) = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}$$

$$C(u,v) = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}$$

Знамо да је једначина тангентне равни у тачки $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ дата је са:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

а једначина нормале на површ у тачки $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ дата је са:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}.$$

9.10 Површински интеграл I врсте

Нека је на $S : D \to \mathbb{R}^3$ задата непрекидна функција $F : S \to \mathbb{R}$ и $P = \{\Delta_i | i = 1, ..., p\}$ произвољна подела области D. Подела P индукује поделу $P' = \{S_i | i = 1, ..., p\}$ на површи S.

У сваком делу S_i поделе P' изаберемо произвољну тачку $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Разматрајмо интегралну суму

$$\sum_{i=1}^{p} F(x_i, y_i, z_i)\cdot\mu S_i$$

, где је са μS_i означена мера површи S_i.

Дефиниција 9.10. *Ако за функцију f постоји коначан лимес*

$$\lim_{\delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{p} F(x_i, y_i, z_i)\cdot\mu S_i$$

где је са δS_i је означен дијаметар скупа S_i, онда се он назива површинским интегралом *прве врсте функције f по површи S и означава са*

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS.$$

9.11 Израчунавање површинског интеграла I врсте

Израчунавање површинског интеграла I врсте своди се на израчунавање двоструког интеграла.

Теорема 9.26. *Ако је површ S непрекидна и задата део-по-део глатком параметризацијом и ако је на њој дефинисана непрекидна функција $F(x,y,z)$, онда важи једнакост*

$$\int\int\limits_S F(x,y,z)dS = \int\int\limits_D F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{A^2(u,v)+B^2(u,v)+C^2(u,v)}dudv.$$

Последица 9.27. *Специјално ако је $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = z(x,y),\ (x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2\}$ онда је*

$$\iint\limits_S F(x,y,z)dS = \iint\limits_D F(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}dxdy.$$

Ако је $F(x,y,z) = 1$ онда је $P(S) = \iint\limits_S dS$ површина те површи.

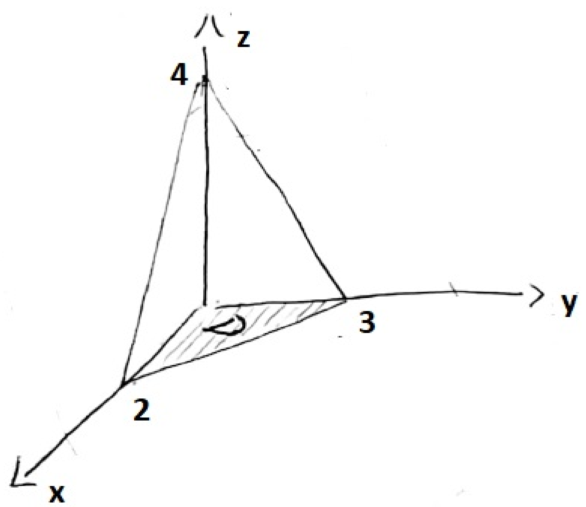
Пример 9.28. *Израчунати*

$$\iint_S (z+2x+\frac{4}{3}y)ds$$

где је S део равни

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4} = 1$$

у I октанту.



Решење.

Како је $z = 4 - 2x - \frac{4}{3}y$ и $z'_x = -2$, $z'_y = -\frac{4}{3}$, на основу претходне Теореме имамо да је

$$\iint_S (z+2x+\frac{4}{3}y)ds = \iint_D (4-2x-\frac{4}{3}y+2x+\frac{4}{3}y)\cdot\sqrt{1+(-2)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}dxdy = \frac{4\sqrt{61}}{3}\iint_D dxdy$$

$$= \frac{4\sqrt{61}}{3}\cdot P(D) = \frac{4\sqrt{61}}{3}\cdot 3 = 4\sqrt{61}$$

јер $P(D) = 3$ је у ствари површина правоуглог троугла са катетама 2 и 3.

$\square$

Пример 9.29. *Израчунати*

$$\iint_S \frac{x^2+y+2z}{\sqrt{1+4x^2}}ds$$

где је S део цилиндричне површи $y = x^2 - 4$ одсечен равнима $z = -2y$ и $z = 0$.

Пример 9.30. *Израчунати површину дела површи $z = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ који се налази у I октанту између два цилиндра $x^2+y^2 = 1$ и $x^2+y^2 = 2$.*

9.12 Површински интеграл II врсте

Површински интеграл II врсте:

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

где су P, Q, R функције дефинисане и непрекидне функције на S представља и флукс векторског поља $\vec{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ кроз оријентисану површ S. Рачунање:

- $= \pm\iint\limits_{Dxy} \vec{F}\cdot\vec{N}\,dxdy,\ \vec{N} = (-z'_x, -z'_y, 1),\ z = z(x,y)$
- $= \pm\iint\limits_{Dxz} \vec{F}\cdot\vec{N}\,dxdz,\ \vec{N} = (-y'_x, 1, -y'_z),\ y = y(x,z)$
- $= \pm\iint\limits_{Dyz} \vec{F}\cdot\vec{N}\,dydz,\ \vec{N} = (1, -x'_y, -x'_z),\ x = x(y,z)$

9.13 Стоксова формула

Стоксова формула представља везу између криволинијског интеграла II врсте и површинског интеграла

Теорема 9.31. *Нека је S ограничена, глатка, двострана површ са део-по-део глатком границом $\mathcal{C}$. Нека су $P, Q, R : S \to \mathbb{R}$ непрекидне и имају непрекидне парцијалне изводе. Тада важи:*

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz$$

$$= \iint_S (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dzdx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy.$$

9.14 Формула Гаус-Остроградског

Формула Гаус-Остроградског представља везу између површинског интеграла II врсте и тростуког интеграла.

Теорема 9.32. *Нека је B компактан и повезан скуп у $\mathbb{R}^3$ чији је руб део-по-део глатка површ S. Нека су $P, Q, R : V \to \mathbb{R}$ непрекидно-диференцијабилне функције (довољно је да буду непрекидни парцијални изводи који су дати у формули.) Тада важи формула Гаус-Остроградског:*

$$\iint_{S^+} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_V (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dxdydz.$$

Пример 9.33. *Израчунати*

$$\iint_E (yz + x)dydz + (x^3 e^{xz} + y)dxdz + (z + y^2 \sin x)dxdy$$

ако је спољна страна елипсоида $E : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1}$.

Решење. На основу Г-О видимо да је

$$\iint_{E^+} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_T (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dxdydz = \iiint_T 3dxdydz$$

$$= 3\iiint_T dxdydz = 3V(T) = 3\frac{4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1}{3}\pi = 32\pi.$$

Овде смо користили познату чињеницу да је запремина елипсоида (коју смо рачунали у претходном поглављу)

$$V(T) = \iiint_T dxdydz = \frac{4abc\pi}{3}.$$

□

Пример 9.34.

9.15 Задаци за самосталан рад

10 Диференцијалне једначине

Једначина у којој фигурише независна променљива x, функција y и њени изводи $y', y'', ..., y^{(n)}$ у облику

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

назива се диференцијална једначина n-тог реда. Највиши ред (n) извода је ред диференцијалне једначине.

Проблем је да се одреди непозната функција y, тј. решење (функција $y = y(x)$) диференцијалне једначине које задовољава полазну једначину за свако x.

- Једначина у којима фигурише функција једне независне променљиве $y = f(x)$ и њени изводи назива се обична диференцијална једначина.
- Једначина у којима фигурише функција више променљивих $y = f(x_1, ..., x_n)$ и њени парцијални изводи назива се парцијална диференцијална једначина.

10.1 Диференцијалне једначине првог реда

Диференцијална једначина првог реда је облика

$$F(x, y, y') = 0.$$

Претпоставимо да се једначина може записати у облику

$$y' = f(x, y).$$

Намећу се два питања:

1. Да ли постоји решење једначине?
2. Ако постоји решење, да ли је јединствено?

Теорема 10.1. *Нека је дата једначина $y' = f(x, y)$ при чему је $f(x, y)$ дефинисана и непрекидна у области $D \subset \mathbb{R}^2$. За произвољну тачку $(x_0, y_0) \in D$ постоји јединствено решење $y = \varphi(x)$ једначине које задовољава услов $y = y_0$ за $x = x_0$, тј. $y(x_0) = y_0$.*

Једначина $y' = f(x, y)$ има бесконачно много решења. Услов $y(x_0) = y_0$ назива се **почетни (Кошијев) услов** (Ознака: $y(x_0) = y_0$ или $y|_{x=x_0} = y_0$).

Дефиниција 10.1. ***Опште решење ДЈ*** *$F(x, y, y') = 0$ је фамилија функција $y = \varphi(x, C)$ које зависе од произвољне константе C и које задовољавају једначину $F(x, y, y') = 0$ за свако x.*

За дати почетни услов $y|_{x=x_0} = y_0$ постоји константа $C = C_0$ таква да $y = \varphi(x, C_0)$ задовољава полазну једначину. Свако решење $y = \varphi(x, C_0)$ полазне једначине добијено из општег решења тако што се параметру C додељује конкретна вредност C_0 назива се ***партикуларно решење ДЈ****.*

10.2 Диференцијална једначина која раздваја променљиве

Диференцијална једначина која раздваја променљиве је облика

$$f(x)dx + g(y)dy = 0,$$

где су f и g непрекидне функције.

(Знамо да је $y' = \frac{dy}{dx}$.) Једначина $g(y)dy = -f(x)dx$ се може посматрати као једнакост два диференцијала. Тада се њихове примитивне функције разликују за константу:

$$\int g(y)dy = -\int f(x)dx + C.$$

Пример 10.2 (На часу)**.** *Решити диференцијалну једначину $y' - 3x^2 = 0$ а затим одредити оно решење које задовољава почетни услов $y(0) = 1$.*

Решење. Како је

$$y' = \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

видимо да је ово једначина која раздваја променљиве јер се може написати у облику

$$dy = 3x^2 dx.$$

После интеграљења леве и десне стране имамо да је

$$\int dy = \int 3x^2 dx + C \implies y(x) = x^3 + C.$$

Заправо је функција $y(x) = x^3 + C$ опште решење наше диференцијалне једначине.

Сад треба наћи оно решење које задовољава почетни услов $y(0) = 1$. Њега ћемо одредити из општег решења. Имамо да је

$$y(0) = 0^3 + C = 1 \implies C = 1$$

па је решење које задовољава почетни услов дато са

$$y = x^3 + 1.$$

$\square$

Пример 10.3 (На часу)**.** *Решити диференцијалну једначину* $xy' = y - xy\sin x$.

Решење. $y = Cxe^{\cos x}$. $\square$

10.3 Хомогена диференцијална једначина

Дефиниција 10.2. *Функција* $f(x, y)$ *се назива* ***хомогеном функцијом*** *ако за свако* $k \in \mathbb{R}$ *важи* $f(kx, ky) = f(x, y)$.

Дефиниција 10.3. *Диференцијална једначина* $y' = f(x, y)$ *је* ***хомогена*** *Диференцијална једначина ако је* $f(x, y)$ *хомогена функција.*

Ако у $f(x, y) = f(kx, ky)$ изаберемо $k = \frac{1}{x}$ имамо да је

$$y' = f(x, y) = f(kx, ky) = f(1, \frac{y}{x}) \equiv g(\frac{y}{x}) \Rightarrow y' = g(\frac{y}{x}).$$

Уводјењем смене $u = \frac{y}{x}$ имамо да је $y' = g(\frac{y}{x}), u = \frac{y}{x}$. Даље је

$$\begin{aligned} u = \frac{y}{x} &\Rightarrow y = u \cdot x \\ &\Rightarrow y'_x = u'_x \cdot x + u \cdot 1 \\ &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot x + u \\ &\Rightarrow g(u) = \frac{du}{dx} \cdot x + u \\ &\Rightarrow \frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

Добијена претходна диференцијална једначина је са развојеним променљивим по u па следи

$$\int \frac{du}{g(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Враћањем смене $u = \frac{y}{x}$ добија се опште решење полазне једначине.

Пример 10.4 (На часу)**.** *Решити диференцијалну једначину* $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$ *а затим одредити оно решење које задовољава почетни услов* $y(1) = e$.

Решење. Дата једначина се може трансформисати у

$$y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$$

која је заправо хомогена диференцијална једначина па се увођењем смене

$$u = \frac{y}{x} \implies y = ux \implies y' = u'x + u$$

трансформише у једначину

$$u'x + u = u(1 + \ln u) = u + u \ln u \implies u'x = u \ln u.$$

Једначина

$$u'x = u \ln u$$

је једначина која раздваја промењљиве u и x па имамо да је

$$\frac{du}{u \ln u} = \frac{dx}{x} \implies \int \frac{du}{u \ln u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Увођењем смене $\ln u = t$ имамо $\ln |t| = \ln |C_1 x|$ (где смо ставили да је $e^C = C_1$) па је

$$\ln u = C_1 x$$

а одавде после враћања смене, имамо да је

$$\ln \frac{y}{x} = C_1 x \implies \frac{y}{x} = e^{C_1 x}.$$

Коначно, добијамо опште решење

$$y = x e^{C_1 x}.$$

Из услова $y(1) = e$ имамо да је

$$y(1) = e^{C_1} = e \implies C_1 = 1$$

па је решење које задовољава почетни услов

$$y = x e^x.$$

□

Пример 10.5. *Решити* $y' = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

10.4 Линеарна диференцијална једначина првог реда

Линеарна диференцијална једначина је облика

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

где су $P(x)$ и $Q(x)$ непрекидне функције.

Решење тражимо у облику $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ где су $u(x)$ и $v(x)$ функције по x. При том, $v(x)$ бирамо на погодан начин, а $u(x)$ на основу полазне једначине.

$$\begin{aligned} y = u \cdot v &\Rightarrow y' = u' \cdot v + u \cdot v' \\ &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot v + \frac{dv}{dx} \cdot u. \end{aligned}$$

Заменимо у полазну једначину:

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad \Rightarrow \quad \overbrace{\frac{du}{dx} \cdot v + \frac{dv}{dx} \cdot u}^{y'} + P(x) \cdot \overbrace{u \cdot v}^{y} = Q(x)$$

Даље, имамо да је

$$\begin{aligned} y' + P(x)y = Q(x) \quad &\Rightarrow \quad \frac{du}{dx} \cdot v + \frac{dv}{dx} \cdot \underline{u} + P(x) \cdot \underline{u} \cdot v = Q(x) \\ &\Rightarrow \underbrace{(\frac{dv}{dx} + P(x) \cdot v)}\cdot u + \frac{du}{dx} \cdot v = Q(x) \qquad (\clubsuit). \end{aligned}$$

Изаберемо $v(x)$ тако да је $\left(\frac{dv}{dx} + P(x) \cdot v\right) = 0$. Тада је

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} + P(x) \cdot v = 0 &\Rightarrow \frac{dv}{dx} = -P(x) \cdot v \\ &\Rightarrow \frac{dv}{v} = -P(x) \cdot dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int P(x) \cdot dx \\ &\Rightarrow \ln|v| = -\int P(x) \cdot dx \\ &\Rightarrow v = e^{-\int P(x) \cdot dx}. \end{aligned}$$

Вратимо се у ($\clubsuit$) и имамо да је

$$\underbrace{(\frac{dv}{dx} + P(x) \cdot v)}_{0}\cdot u + \frac{du}{dx} \cdot v = Q(x)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 0 \cdot u + \frac{du}{dx} \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \\ &\Rightarrow du = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \cdot dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int du = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \cdot dx + C$$
$$\Rightarrow u = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \cdot dx + C.$$

Вратимо смену $y = u \cdot v,\ v = e^{-\int P(x)dx}$ и добијамо опште решење линеарне диференцијалне једначине првог реда:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}(C + \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \cdot dx).$$

Пример 10.6 (На часу)**.** *Одредити опште решење диференцијалне једначине* $y' - \frac{y}{x} = x^2$.

Решење. Видимо да је $P = -\frac{1}{x}$ и $Q = x^2$ па је на основу претходне формуле

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}(C + \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \cdot dx) = e^{\int \frac{1}{x}dx}(C + \int x^2 \cdot e^{\int -\frac{1}{x}dx} \cdot dx)$$

$$= e^{\ln|x|}(C + \int x^2 e^{\ln x^{-1}} dx) = x(C + \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx) = x(C + \int x dx)$$

а одавде је

$$y = Cx + \frac{x^3}{2}$$

што је ипште решење почетне диференцијалне једначине. □

Пример 10.7 (На часу)**.** *Одредити опште решење диференцијалне једначине*

$$y'(x^2 - 2x + 2) - \frac{x(x^2 - 2x + 2)}{1 + x^2} y = x\sqrt{1 + x^2}.$$

Опште решење:

$$y = \sqrt{1 + x^2}\left(C + \frac{1}{2}\ln(x^2 - 2x + 2) + \arctan(x - 1)\right).$$

□

Пример 10.8 (За домаћи)**.** *Одредити опште решење диференцијалне једначине* $y' \cos x - y \sin x = x^3 e^{x^2}$.

10.5 Диференцијална једначина облика $y' = f\left(\frac{a_1x + a_2y + a_3}{b_1x + b_2y + b_3}\right)$

- **1. Случај** када је $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, сменама $x = X + \alpha_1,\ y = Y + \alpha_2,\ dx = dX$,

$dy = dY$, $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX} = Y'$ имамо да је почетна једначина облика:

$$
\begin{aligned}
y' &= f\left(\frac{a_1(X+\alpha_1) + a_2(Y+\alpha_2) + a_3}{b_1(X+\alpha_1) + b_2(Y+\alpha_2) + b_3}\right) \\
&= f\left(\frac{a_1X + a_2Y + \overbrace{a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3}^{=0}}{b_1X + b_2Y + \underbrace{b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3}_{=0}}\right) \\
&= f\left(\frac{a_1X + a_2Y}{b_1X + b_2Y}\right) = f\left(\frac{a_1 + a_2\frac{Y}{X}}{b_1 + b_2\frac{Y}{X}}\right)
\end{aligned}
$$

што је хомогена диференцијална једначина, где α_1 и α_2 одређујемо из система линеарних једначина:

$$
\begin{cases}
a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3 = 0 \\
b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3 = 0.
\end{cases}
$$

Пример 10.9 (На часу)**.** *Одредити опште решење диференцијалне једначине* $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

Решење. Видимо да се ради о првом случају јер је $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = -1$ па је $a_1b_2 - a_2b_1 = -1 \neq 0$. Уводимо смене $x = X + \alpha_1$ и $y = Y + \alpha_2$, $\frac{Y}{X} = U$, $Y' = y'$ и решавамо систем

$$
\begin{cases}
\alpha_2 + 2 = 0 \\
\alpha_1 + \alpha_2 - 1 = 0
\end{cases}
$$

и добијамо $\alpha_1 = 3$ и $\alpha_2 = -2$. Дата једначина се трансформише у

$$Y' = U'X + U = 2\left(\frac{U}{U+1}\right)^2$$

а ово је једначина која раздваја променљиве, која се после трансформације своди на

$$\frac{(1+U)^2 dU}{U(1+U^2)} = -\frac{dx}{x}.$$

Претходна једначина се после интеграљења (средити за домаћи) своди на

$$\ln|u| + 2\arctan u = -\ln|x| + C.$$

Враћањем смене добијамо да је

$$\ln|y+2| + 2\arctan\left(\frac{y+2}{x-3}\right) = C.$$

□

- **2. Случај** када је $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, сменом $b_1x + b_2y + b_3 = t$ где је $t = t(x)$ дата једначина се своди на једначину која раздваја променљиве.

Пример 10.10 (На часу)**.** *Одредити опште решење диференцијалне једначине* $y' = \frac{4x+2y+3}{6x+3y-2}$.

Пример 10.11 (За домаћи)**.** *Одредити опште решење диференцијалне једначине* $y' = \frac{2x+y+1}{4x+2y-3}$.

10.6 Бернулијева диференцијална једначина

Разматрао је први пут Јакоб Бернули у свом раду 1695. године а прво решење (које се и данас користи) дао је Лајбниц. Бернулијева диференцијална једначина је облика

$$y' + P(x) \cdot y = y^n \cdot Q(x)$$

где су $P(x)$ и $Q(x)$ непрекидне функције и $n \in \mathbb{R},\ n \neq 0, 1$. За $n = 0, 1$ то је линеарна диференцијална једначина. Ако почетну једначину поделимо са y^n

$$y' + P(x) \cdot y = y^n \cdot Q(x) \qquad\qquad / : y^n$$

добијамо једначину

$$y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x) \qquad\qquad (\clubsuit).$$

Увођењем смене

$$\begin{aligned} u = y^{1-n} \quad &\Rightarrow \quad u' = \frac{du}{dx} = (1-n)y^{1-n-1}y' = (1-n)\underbrace{y^{-n}y'} \\ &\Rightarrow y^{-n}y' = \frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{1-n} \end{aligned}$$

и заменом у ($\clubsuit$) следи

$$\underbrace{y^{-n}y'} + P(x)\underbrace{y^{1-n}}_{u} = Q(x) \qquad\qquad (\clubsuit)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{1-n} + P(x)u = Q(x) \qquad / \cdot (1-n)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} + \underbrace{(1-n)P(x)}_{p(x)}u = \underbrace{(1-n)Q(x)}_{q(x)},$$

а ово је линеарна диференцијална једначина по u за коју знамо опште решење

$$u = e^{-\int(1-n)P(x)dx}(C + \int (1-n)Q(x) \cdot e^{\int(1-n)P(x)dx} \cdot dx).$$

Враћањем смене $u = y^{1-n}$, добијамо опште решење почетнер једначине:

$$\Rightarrow y^{1-n} = e^{(n-1)\int P(x)dx}\big(C + (1-n)\int Q(x) \cdot e^{(1-n)\int P(x)dx} \cdot dx\big)$$

или

$$y(x) = \sqrt[1-n]{e^{(n-1)\int P(x)dx}\big(C + (1-n)\int Q(x) \cdot e^{(1-n)\int P(x)dx} \cdot dx\big)}.$$

Пример 10.12 (За домаћи). *Одредити опште решење диференцијалне једначине* $xy' + 2y = 3x^3\sqrt[3]{y^4}$.

Решење. Дата једначина је Бернулијева јер се може записати у облику

$$y' + \frac{2}{x}y = 3x^2\sqrt[3]{y^4}$$

где је $n = \frac{4}{3}$, $P = \frac{2}{x}$ и $Q = 3x^2$. Увођењем смене

$$y = u^{\frac{1}{1-\frac{4}{3}}} \implies y = u^{-3} \implies y' = -3u^{-4}u'$$

и враца1њем у почетну једначину добијамо

$$-3u^{-4}u' + \frac{2}{x}u^{-3} = 3x^2(u^{-3})^{\frac{4}{3}}.$$

Множењем леве и десне стране са $-\frac{u^4}{3}$ добијамо линеарну диференцијалну једначину

$$u' - \frac{2}{3x}u = -x^2$$

коју знамо да решимо. Одавде је

$$u = x^{\frac{2}{3}}(C - \int x^{\frac{4}{3}}dx).$$

Враћањем смене $y = \frac{1}{u^3}$ имамо опште решење

$$y = \frac{1}{x^2\left(C - \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}\right)^3}.$$

□

Пример 10.13 (На часу). *Одредити опште решење диференцијалне једначине* $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$.

Пример 10.14 (На часу). *Одредити опште решење диференцијалне једначине* $(x^2 \ln y - x)y' = y$.

Пример 10.15. *Диференцијална једначина облика* $y' = f(ax + by + c)$ *где су* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *се сменом* $z = ax + by + c$, $z = z(x)$ *своди на једначину која раздваја променљиве.* *Решити* $y' = (4x - y + 1)^2$.

10.7 Рикатијева диференцијална једначина

Рикатијева диференцијална једначина је облика

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

где су $P(x), Q(x), R(x)$ непрекидне функције.

Ако је $R(x) = 0$ онда једначина постаје Бернулијева.

Разматрамо само два случаја уколико је познато једно партикуларно решење y_1.

- Увођењем смене $y = y_1 + \frac{1}{z}$ своди се на линеарну.
- Увођењем смене $y = y_1 + z$ своди се на Бернулијеву.

Свођење Рикатијеве на линеарну диференцијалну једначину:

Уводимо смену $y = y_1 + \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad y' = y_1' - \frac{1}{z^2}z'$

Заменимо y и y' у полазну једначину $y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$:

$$\begin{aligned}
y_1' - \frac{1}{z^2}z' &= P(x)(y_1 + \frac{1}{z})^2 + Q(x)(y_1 + \frac{1}{z}) + R(x)\\
y_1' - \frac{1}{z^2}z' &= (P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x)) + \frac{2P(x)y_1}{z} + \frac{P(x)}{z^2} + \frac{Q(x)}{z}
\end{aligned}$$

Пошто је y_1 решење једначине $\Rightarrow y_1' = P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x)$.

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{z^2}z' &= \frac{2P(x)y_1}{z} + \frac{P(x)}{z^2} + \frac{Q(x)}{z} \qquad / \cdot z^2\\
-z' &= 2P(x)y_1 z + P(x) + Q(x)z
\end{aligned}$$

$z' + (2P(x)y_1 + Q(x))z = -P(x) \rightarrow$ Ово је линеарна ДЈ по z.

Свођење Рикатијеве на Бернулијеву диференцијалну једначину:

Уводимо смену $y = y_1 + z \quad \Rightarrow \quad y' = y_1' + z'$

Заменимо y и y' у полазну једначину $y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$:

$$\begin{aligned} y_1' + z' &= P(x)(y_1 + z)^2 + Q(x)(y_1 + z) + R(x) \\ y_1' + z' &= (P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x)) + 2P(x)y_1 z + P(x)z^2 + Q(x)z \end{aligned}$$

Пошто је y_1 решење једначине $\Rightarrow y_1' = P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x)$.

$$\begin{aligned} z' &= 2P(x)y_1 z + P(x)z^2 + Q(x)z \\ &= (2P(x)y_1 + Q(x))z + P(x)z^2 \end{aligned}$$

$z' - (2P(x)y_1 + Q(x))z = P(x)z^2 \rightarrow$ Ово је Бернулијева ДЈ по z, за $n = 2$.

10.8 Диференцијална једначина са тоталним диференцијалом

Разматрамо диференцијалну једначинну

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \qquad (\heartsuit)$$

Дефиниција 10.4. *Израз*

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

је тотални диференцијал неке функције $u(x, y)$ ако је

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Тада једначину $(\heartsuit)$ можемо записати у облику $du = 0$ тј.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0$$

где је

$$u(x, y) = C. \quad (C = const.)$$

Пример 10.16 (На часу)**.** *Одредити оно решење диференцијалне једначине $y' = \frac{2x+e^{-y}}{xe^{-y}-cosy}$ које задовољава почетни услов $y(4) = 0$.*

Пример 10.17 (На часу). *Одредити општи интеграл диференцијалне једначине*

$$(\overbrace{e^x + y + \sin y}^{P})dx + (\overbrace{e^y + x + x\cos y}^{Q})dy = 0.$$

Решење. Како је

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + \cos y$$

ово је једначина са тоталним диференцијалом па је $\frac{\partial u}{\partial x} = P = e^x + y + \sin y$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = e^y + x + x\cos y$. Имамо да је

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x + y + \sin y$$

па интеграљењем леве и десне стране имамо $u(x,y) = e^x + yx + x\sin y + \varphi(y)$. Треба још израчунати $\varphi(y)$? Ово ћемо наћи из друго услова

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^y + x + x\cos y.$$

Имамо из претходне формуле да је $x + x\cos y + \varphi'(y) = \frac{\partial u}{\partial y} = e^y + x + x\cos y$ одакле је

$$\varphi'(y) = e^y$$

па интеграљењем претходне формуле добијамо да је

$$\varphi(y) = e^y + C_0.$$

Коначно је

$$u(x,y) = e^x + yx + x\sin y + e^y = C.$$

□

Ако једначина

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \qquad (\heartsuit)$$

није једначина са тоталним диференцијалом (тј. $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$) онда користимо интеграциони множилац (фактор) $\lambda = \lambda(x,y)$ такав да је $\frac{\partial(\lambda P)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda Q)}{\partial x}$. Специјално ако је израз

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$$

функција која зависи само од x (или константа) онда је

$$\lambda(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}} dx.$$

Специјално ако је израз

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P}$$

функција која зависи само од y (или константа) онда је

$$\lambda(y) = e^{-\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} dy}.$$

Пример 10.18 (На часу)**.** *Одредити општи интеграл диференцијалне једначине*

$$(x \sin y + y \cos y)dx + (x \cos y - y \sin y)dy = 0.$$

Решење. Како овде важи

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

ово није једначина са тоталним диференцијалом па ћемо је решити помоћу интеграционог фактора. Видимо да је израз

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = 1$$

константа па је интеграциони множилац

$$\lambda(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx} = e^{\int dx} = e^x.$$

Множењем почетне једачине са $\lambda = e^x$ имамо да је

$$e^x(x \sin y + y \cos y)dx + e^x(x \cos y - y \sin y)dy = 0$$

једначина са тоталним диференцијалом. Сада је решавамо истим поступком као у претходном задатку.

Имамо да је

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x(x \sin y + y \cos y)$$

па интеграљењем леве и десне стране имамо

$$u(x, y) = \sin y e^x(x - 1) + e^x y \cos y + \varphi(y).$$

Треба још израчунати $\varphi(y)$? Ово ћемо наћи из другог услова

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x(x \cos y - y \sin y).$$

Имамо из претходне формуле да је

$$\cos y e^x(x - 1) + e^x(\cos y - y \sin y) + \varphi'(y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$$

одакле је
$$\varphi'(y) = 0$$
па интеграљењем претходне формуле добијамо да је
$$\varphi(y) = 0 \implies \varphi(y) = C_0.$$
Коначно је
$$u(x, y) = \sin y e^x (x - 1) + e^x y \cos y = C.$$
□

Пример 10.19 (За домаћи). *Решити диференцијалну једначину*
$$y' = \frac{\frac{y^3}{3} + x^2 y + 2xy}{-x^2 - y^2}.$$

10.9 Задаци за самосталан рад

11 Диференцијалне једначине вишег реда

Посматрамо ДЈ n-тог реда
$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$
које се могу записати у облику
$$y^{(n)} = f(x, y', ..., y^{(n-1)}) \quad (\bigstar).$$

Теорема 11.1. *Нека су у једначини* ($\bigstar$) *функција f и њени парцијални изводи непрекидни у некој области која садржи тачку одређену вредностима*
$$x = x_0, y = y_0, ..., y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}.$$
Тада постоји јеинствено решење $y = y(x)$ једначине ($\bigstar$) *које задовољава услове*
$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y_0', ..., y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}.$$

Услови
$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y_0', ..., y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$$
се називају **почетни услови**.

Дефиниција 11.1. ***Опште решење ДЈ*** ($\bigstar$) *је фамилија функција $y = \varphi(x, C_1, ..., C_n)$ која зависи од константи $C_1, ..., C_n$.*

За задате почетне услове постоје константе $C_1 = C_1^0, ..., C_n = C_n^0$ *такве да* $\varphi(x, C_1, ..., C_n)$ *задовољава те услове.* ***Партикуларно решење*** *једначине* ($\bigstar$) *је оно решење које се добија из општег стављајући* $C_1 = C_1^0, ..., C_n = C_n^0$.

11.1 Свођење на диференцијалне једначине нижег реда-Одређени типови

1. тип:

$$y^{(n)} = f(x)$$

   где је $f(x)$ непрекидна функција. Решење се добија интеграљењем n пута:

$$y = \int dx \int dx ... \int f(x)dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + ... + C_{n-1}x + C_n.$$

2. тип:

$$y'' = f(x, y').$$

   Уводјењем смене $z = y' \Rightarrow z' = y''$ почетна једначина се своди на једначину првог реда $z' = f(x, z)$. Ако је њено решење $z = \varphi(x, C_1)$ онда се решавањем $y' = \varphi(x, C_1)$ добија опште решење полазне: $y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2$.

3. тип:

$$y'' = f(y, y').$$

   Уводјењем смене $y' = p(y)$ видимо да је

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot y,$$

   па заменом у полазну једначину добијамо диференцијалну једначину првог реда

$$p \cdot \frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

   Ако је њено решење $p = \varphi(y, C_1)$, враћањем смене $y' = \frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$ добијамо опште решење полазне једначине

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = \int dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

Пример 11.2. *Решити* $y''' = \sin x$.

Пример 11.3. *Решити* $y \cdot y'' + (y')^2 = 1$.

Пример 11.4. *Решити* $y'' = \frac{y'}{x \ln x}$.

11.2 Линеарне диференцијалне једначине вишег реда

Дефиниција 11.2. ***Линеарна диференцијална једначина (ЛДЈ) n-шог реда*** *је облика $y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + ... + f_n(x)y = h(x)$ где су $f_1, ..., f_n$ и h задате функције.*

Ако је $h \equiv 0$ онда је то ***хомогена ЛДЈ n-тог реда****.*

Дефиниција 11.3. *Ако су $f_1, ..., f_n$ реалне константе добија се $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_ny = h(x)$* ***ЛДЈ n-тог реда са константним коефицијентима*** *(ЛДЈсКК).*

Дефиниција 11.4. *За функције $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ дефинисане на (a,b) се каже да су* ***линеарно зависне*** *на (a,b) ако постоје константе $\alpha_1, ..., \alpha_n$ од којих је бар једна различита од 0 такве да $\alpha_1\varphi_1(x) + ... + \alpha_n\varphi_n(x) = 0$ за свако $x \in (a,b)$.*

Ако функције $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ нису линеарно зависне онда су ***линеарно независне****.*

Дефиниција 11.5. *За функције $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ функционална детерминанта*

$$W(\varphi_1, ..., \varphi_n)(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & ... & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & ... & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & ... & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

зове се Вронскијева детерминанта или ***Вронскијан****.*

Теорема 11.5. *Решења $y_1, ..., y_n$ хомогене ЛДЈ n-тог реда са константним коефицијентима су линеарно зависна акко је $W(\varphi_1, ..., \varphi_n)(x) = 0, \forall x \in (a,b)$, а линеарно независна акко је $W(\varphi_1, ..., \varphi_n)(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$*

11.3 Хомогене линеарна диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима

$$\underbrace{y'' + py' + qy}_{L(y)} = 0, \qquad p, q \in \mathbb{R} \qquad\qquad (\heartsuit)$$

Теорема 11.6. *Ако су y_1 и y_2 решења једначине $(\heartsuit)$ онда је $C_1y_1 + C_2y_2,\ C_1, C_2 = const$ такође решење једначине $(\heartsuit)$.*

Доказ. Ако су y_1 и y_2 решења једначине $(\heartsuit)$ тада је сигурно $L(y_1) = 0$ и $L(y_2) = 0$. А ми желимо да докажемо да је $C_1y_1 + C_2y_2,\ C_1, C_2 = const$ такође решење једначине $(\heartsuit)$ тј.

желимо да докажемо да је $L(C_1y_1 + C_2y_2) = 0$. Како је

$$L(C_1y_1+C_2y_2) = (C_1y_1+C_2y_2)''+p(C_1y_1+C_2y_2)'+q(C_1y_1+C_2y_2) = C_1(\underbrace{y'' + py' + qy}_{L(y_1)=0})+C_2(\underbrace{y'' + py' + qy}_{L(y_2)=0})$$

$$= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0$$

то је и $C_1y_1 + C_2y_2$ такође решење једначине ($\heartsuit$) што је и требало доказати. $\square$

Теорема 11.7. *Ако су y_1 и y_2 два линеарно независна решења једначине ($\heartsuit$) онда је $y = C_1y_1 + C_2y_2,\ C_1, C_2 = const$ њено опште решење.*

На основу теореме решавање диференцијална једначина ($\heartsuit$) се своди на тражење линеарно независних партикуларних решења.

Потражимо партикуларна решења у облику $y = e^{\lambda x},\ \lambda = const \Rightarrow y' = \lambda e^{\lambda x},\ y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$.

Заменом у једначину ($\heartsuit$) $L(y) = y'' + py' + qy$ имамо да је

$$\begin{aligned}\Rightarrow L(e^{\lambda x}) &= \lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x}\\ &= \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0\\ &\Rightarrow \lambda^2 + p\lambda + q = 0.\end{aligned}$$

Квадратна једначина $\lambda^2+p\lambda+q = 0$ се зове **карактеристична једначина** диференцијалне једначине ($\heartsuit$).

Према природи карактеристичне једначине, разликујемо 3 случаја:

1. **случај:** Корени карактеристичне једначине су реални и различити: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \neq \lambda_2$.

   Тада су партикуларна решења: $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2 = e^{\lambda_2 x}$.

   Важи да је $W(y_1, y_2) \neq 0$ па су y_1 и y_2 линеарно независна партикуларна решења (доказ на часу!).

   На основу теореме,

   $$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$$

   је опште решење диференцијалне једначине ($\heartsuit$).

2. **случај:** Корени карактеристичне једначине су реални и једнаки: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 = \lambda_2 = s$.

Тада су партикуларна решења: $y_1 = e^{sx}$ и $y_2 = xe^{sx}$.

Важи да је $W(y_1, y_2) \neq 0$ па су y_1 и y_2 линеарно независна партикуларна решења (доказ на часу!).

На основу теореме,

$$y = C_1 e^{sx} + C_2 x e^{sx}$$

је опште решење једначине $(\heartsuit)$.

3. **случај:** Корени карактеристичне једначине су комплексни бројеви: $\lambda_1 = \alpha + i\beta,\ \lambda_2 = \alpha - i\beta,\ \beta \neq 0.$

   Тада су партикуларна решења:
   $y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x}$
   $y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x}$.

   Применимо Ојлерову формулу $e^{\pm i\beta x} = \cos(\beta x) \pm i \sin(\beta x)$:
   $y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x) + i e^{\alpha x} \sin(\beta x)$
   $y_2 = e^{\alpha x} \cos(\beta x) - i e^{\alpha x} \sin(\beta x)$
   Опште решење диференцијалне једначине $(\heartsuit)$ је

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Пример 11.8 (На часу)**.** *Решити следеће диференцијалне једначине:*

- $y'' - 4y' + 3y = 0$;
- $y'' - y = 0$;
- $y'' + y = 0$;
- $y'' - 4y' + 5y = 0$;
- $y'' - 25y = 0$;
- $y'' + 2y' + y = 0$.

11.4 Нехомогене линеарне диференцијалне једначине другог реда са константним коефицијентима

Разматрајмо нехомогену линеарну ДЈ другог реда са константним коефицијентима:

$$y'' + py' + qy = f(x). \qquad (\heartsuit)$$

Њој одговара хомогена линеарна диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима:

$$y'' + py' + qy = 0. \qquad (H)$$

Теорема 11.9. *Ако је y_p једно партикуларно решење диференцијалне једначине $(\heartsuit)$ и ако је y_h опште решење диференцијалне једначине (H) тада је*

$$y = y_h + y_p$$

опште решење диференцијалне једначине $(\heartsuit)$.

Доказ. Постоје два питања на која треба одговорити. (1) Да ли је y решење од $(\heartsuit)$? (2) Да ли је y опште решење од $(\heartsuit)$?

Докажимо прво (1). Питамо се да ли је $y = y_p + y_h$ решење диференцијалне једначине $(\heartsuit)$, тј. да ли је $L(y) = f(x)$? Како је

$$L(y) = L(y_p + y_h) = (y_p + y_h)'' + p(y_p + y_h)' + q(y_p + y_h) = y_p'' + y_h'' + py_p' + py_h' + qy_p + qy_h =$$

$$\underbrace{(y_p'' + py_p' + qy_p)}_{=f(x)} + \underbrace{(y_h'' + py_h' + qy_h)}_{=0} = f(x)$$

што је и требало доказати. Докажимо сад (2). Да ли је $y = y_p + y_h$ опште решење диференцијалне једначине $(\heartsuit)$? Претпоставимо да је $\bar{y}$ опште решење диференцијалне једначине $(\heartsuit)$ и посматрајмо израз $\bar{y} - y_p$. Имамо да је

$$L(\bar{y} - y_p) = (\bar{y} - y_p)'' + p(\bar{y} - y_p)' + q(\bar{y} - y_p) = \underbrace{(\bar{y}'' - p\bar{y}' + q\bar{y})}_{=f(x)} - \underbrace{(y_p'' + py_p' + qy_p)}_{=f(x)} = 0.$$

Заправо смо показали да је $L(\bar{y} - y_p) = 0$ одакле закључујем да је $\bar{y} - y_p$ решење диференцијалне једначине $(\heartsuit)$, одакле следи да је $\bar{y} - y_p = y_h$ (јер $\bar{y} - y_p$ поништава $L(yh) = 0$). Одавде закључујемо да мора бити

$$\bar{y} = y_h + y_p = y$$

опште решење диференцијалне једначине $(\heartsuit)$ што је и требало доказати. $\square$

Разматрајмо нехомогену линеарну ДЈ другог реда са константним коефицијентима:

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x). \qquad (\clubsuit).$$

Теорема 11.10. *Ако су y_{p1} и y_{p2} редом партикуларна решења диференцијалних једначина*

$$y'' + py' + qy = f_1(x), \;\; y'' + py' + qy = f_2(x)$$

и ако је y_h опште решење диференцијалне једначине (H) тада је

$$y = y_h + y_{p1} + y_{p2}$$

опште решење диференцијалне једначине $(\clubsuit)$.

За решавање једанчина $\heartsuit$ и $\clubsuit$ користимо :

- Метод неодређених коефицијената и
- Лагранжов метод варијације константи.

11.5 Метод неодређених коефицијената за решавање диференцијалне једначине $y'' + py' + qy = f(x)$

Ако је

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x\right]$$

тада је

$$y_p = x^m \cdot e^{\alpha x}\left[(a_p x^p + \ldots + a_0)\cos\beta x + (b_p x^p + \ldots + b_0)\sin\beta x\right]$$

где је $p = \max\{n, l\}$ а број m је:

- $m = 0$ ако $\alpha + i\beta$ није корен карактеристичне једначине од $y'' + py' + qy = 0$.
- $m = 1$ ако је $\alpha + i\beta$ корен карактеристичне једначине од $y'' + py' + qy = 0$ вишеструкости 1.
- $m = 2$ ако је $\alpha + i\beta$ корен карактеристичне једначине од $y'' + py' + qy = 0$ вишеструкости 2.

Пример 11.11 (На часу)**.** *Решити следеће диференцијалне једначине:*

- $y'' - y = x^2 - x + 1$;
- $y'' + y = x\sin x$;
- $y'' - 6y' + 9y = 4xe^{5x} = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$;
- $y'' - 2y' + 10y = \sin 3x + e^x$;
- $y'' - 7y' + 12y = e^{2x} + x^2,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1$;

11.6 Лагранжов метод варијације константи

Посматрајмо диференцијалну једначину облика

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + f_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + f_n(x)y = h(x) \qquad (\clubsuit)$$

где су $f_1, f_2, \ldots, f_n, h$ задате функције. Нека је

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + f_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + f_n(x)y = 0 \qquad (H)$$

хомогена диференцијална једначина која одговара једначини ($\clubsuit$) и нека је њено опште решење $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x)$ где су $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ и $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ линеарно независне функције. Тада је опште решење диференцијалне једначине ($\clubsuit$) дато са

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x)$$

где функције $C_1(x), \ldots, C_n(x)$ одређујемо из система:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0 \\ C_1'(x)y_1'' + C_2'(x)y_2'' + \ldots + C_n'(x)y_n'' = 0 \\ \vdots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = h(x) \end{cases}$$

Пример 11.12 (На часу). *Одредити опште решење диференцијалне једначине*

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}.$$

Пример 11.13 (За домаћи). *Одредити опште решење диференцијалне једначине*

$$y'' + y = \tan x.$$

11.7 Задаци за самосталан рад