Nizovi

Nizovi

Definicija

Niz realnih brojeva (kraće brojni niz) je svaka funkcija $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *. Broj* $a(n) \equiv a_n$ *je n-ti član niza. Za niz koristimo oznake* $(a_n)_{n\geq 1}$ *ili* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*. Pri tome razlikujemo niz* $\{a_n\}$ *od skupa* $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *jer u nizu svaki član ima tačno odredjeno mesto na kojem se nalazi, što nije slučaj kod skupa. Nizove obično zadajemo:*

1. *ispisivanjem elemenata* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$
2. *opštim članom niza* $a_n = n^2$ *ili*
3. *rekurentnom formulom* $a_n = 2a_{n-2} + a_{n-1}^2$, $a_0 = 3$, $a_1 = 2$.

Definicija

Za niz $\{a_n\}$ *kažemo da je monoton (rastući, opadajući, strogo rastući, strogo opadajući) ako je takav posmatran kao funkcija* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*. Slično, kažemo da je niz ograničen ako postoji* $M \in \mathbb{R}$ *takvo da za svako* $n \in \mathbb{N}$ *važi* $|a_n| \leq M$*. Analogno se definiše pojam ograničenosti niza:*

- *odozdo :* $(\exists k)(\forall n \in \mathbb{N})\ k \leq a_n$
- *odozgo :* $(\exists K)(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq K$.

Definicija (Limes niza)

Realan broj b je granična vrednost ili limes niza $\{a_n\}$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ t.d. \ n \geq n(\varepsilon) \implies |a_n - b| < \varepsilon)$$

i pišemmo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ (ili $a_n \to b$, $n \to \infty$). Za niz koji ima graničnu vrednost kažemo da je konvergentan ili da niz konvergira. Niz koji nema graničnu vrednost je divergentan niz (divergira).

Vidimo da konvergentni niz ima svojstvo da svaka ε-okolina tačke b, tj. interval $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ sadrži beskonačno mnogo članova niza i da se izvan toga intervala nalazi samo konačno mnogo članova niza.

Definicija

Niz $\{a_n\}$ *divergira prema* $+\infty$ *ako*

$$(\forall M > 0)(\exists n(M) \in \mathbb{N})\ t.d.\ n \geq n(M) \implies a_n > M.$$

Niz $\{a_n\}$ *divergira prema* $-\infty$ *ako*

$$(\forall M > 0)(\exists n(M) \in \mathbb{N})\ t.d.\ n \geq n(M) \implies a_n < -M.$$

Teorema

Granična vrednost (limes) niza je jedinstvena.

Definicija (Tačka nagomilavanja niza)

Broj b je tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$ *ako se u svakoj* ε*-okolini broja b nalazi beskonačno mnogo članova niza, tj.*
$(\forall \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}, m > n)\ t.d.\ |a_m - b| < \varepsilon.$
$+\infty$ *je tačka nagomilavanja niza* $\{a_n\}$ *ako*
$(\forall \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}, m > n)\ t.d.\ a_m > M.$
$-\infty$ *je tačka nagomilavanja niza* $\{a_n\}$ *ako*
$(\forall \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}, m > n)\ t.d.\ a_m < -M.$

- Najveća tačka nagomliavanja niza zove se limes superior ($\limsup$) a najmanja limes inferior ($\liminf$).
- Limes niza je i tačka nagomlivanja a obrnuto ne mora da važi.
- Ako je $\{a_n\}$ konvergentan onda je $\lim a_n = \limsup a_n = \liminf a_n$.
- Podniz niza $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je svaka kompozicija $a \circ \alpha$ ($\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo ratuća). r-ti član podniza je $(a \circ \alpha)(k) = a(\alpha(k)) = a_{\alpha(k)} = a_{\alpha_k}$.
- Geometrijski niz $a_n = q^n$, $q, q^2, q^3, \ldots$
- $a_n = (-1)^n$ je ograničen ali nije konveregentan.

Teorema

Svaki konvergentan niz je ograničen.

Teorema

Svaki niz ima monoton podniz.

Teorema

Svaki monoton i ograničen niz je konvergentan.

Teorema (Bolzano-Weierstrass)

Svaki ograničen niz ima konvergentan podniz.

Broj e

Teorema

Niz

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$$

je rastući i ograničen odozgo a samim tim i konveregentan.

NAPOMENA

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e = 2.71828182845904523536028747 1...$$

Primer

Osobine limesa

Teorema

Neka su data dva konvergentna niza $\{a_n\}$ *i* $\{b_n\}$*. Tada je:*

1. $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$
2. $\lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n$
3. $\lim(ca_n) = c \lim a_n$
4. $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n)$
5. $lim\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$ *ako je* $\lim b_n \neq 0$ *(i* $\forall n \in \mathbb{N}$ $b_n \neq 0$*)*

Teorema (o dva policajca)

Ako za nivoe $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *i* $\{c_n\}$ *postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da za sve* $n \geq n_0$ *važi* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *i ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ *tada je i* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Primer

Odrediti limes niza sa opštim članom

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} + \frac{1}{\sqrt{2+n^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}.$$

Košijev niz

- Da li je moguće zaključiti da je neki niz konvergentan ako ne znamo njegov limes?

Definicija (Košijev niz)

Niz $\{a_n\}$ je Košijev ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ t.d. \ \forall k \in \mathbb{N}) \ |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon.$$

- U skupu $\mathbb{R}$ pojmovi converegentnog i Košijevog niza su ekvivalentni:

Teorema

Niz je konvergentan ako i samo ako je Košijev.

-

Neki poznati limesi

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ a > 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\log n << n^k << a^n << n! << n^n$ logaritamska funkcija mnogo sporije raste od ostalih

Teorema (Štolcova)

Neka je dat proizvoljan niz $\{a_n\}$ i rastući niz $\{b_n\}$ takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Tada ako postoji limes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

onda postoji i limes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

i jednaki su.