Višestruki integrali-UVOD

Dvostruki integral nad pravougaonikom

Neka je dat pravougaonik
$A = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.

Neka su $[a, b]$ i $[c, d]$ izdeljeni na sledeći način:
$a = x_0 < x_1 < ... < x_m = b$
$c = y_0 < y_1 < ... < y_n = d$.

Pravougaonik A je izdeljen na $m \cdot n$ pravougaonika oblika:
$A_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) | x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$,
$i = 1, ..., m, j = 1, ..., n$.

Označimo **podelu** pravougaonika A sa:
$\mathcal{P}_{[a,b]\times[c,d]} = \{A_{ij} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$.

Neka je dužina i-tog intervala $[x_{i-1}, x_i]$ označena sa Δx_i.
Neka je dužina j-tog intervala $[y_{j-1}, y_j]$ označena sa Δy_j.

Površina pravougaonika A_{ij} jednaka je: $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$.

Rimanova integralna suma funkcije $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^2$ za podelu $\mathcal{P}$ je:

$$\mathcal{R}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j, \ (x_i^*, y_j^*) \in A_{ij}.$$

Neka je $||P||$ dužina dijagonale pravougaonika P_{ij}.
Kada $||P|| \to 0$ podela $\mathcal{P}$ je sve finija (više manjih pravougaonika sa manjim dijagonalama).

Definicija

Dvostruki integral *funkcije* $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^2$ *nad pravougaonikom* A *je* $\int\limits_A\int f(x,y)dxdy = \lim\limits_{||P|| \to 0} \mathcal{R}(f, \mathcal{P})$.

Ako ovaj limes postoji onda se kaže da je f **integrabilna** na A.

Trostruki integral nad kvadrom

Neka je dat kvadar
$A = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}$.

Neka su $[a, b]$, $[c, d]$ i $[e, f]$ izdeljeni na sledeći način:
$a = x_0 < x_1 < ... < x_m = b$
$c = y_0 < y_1 < ... < y_n = d$
$e = z_0 < z_1 < ... < z_s = f$

Kvadar A je izdeljen na $m \cdot n \cdot s$ kvadara oblika:

$$\begin{aligned} A_{ijk} &= [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k] \\ &= \{(x, y, z) | x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j, z_{k-1} \leq z \leq z_k\}, \\ & i = 1, ..., m, j = 1, ..., n, k = 1, ..., s. \end{aligned}$$

Označimo **podelu** kvadra A sa:
$\mathcal{P}_{[a,b] \times [c,d] \times [e,f]} = \{A_{ijk} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq s\}$.

Neka je dužina i-tog intervala $[x_{i-1}, x_i]$ označena sa Δx_i.
Neka je dužina j-tog intervala $[y_{j-1}, y_j]$ označena sa Δy_j
Neka je dužina k-tog intervala $[z_{k-1}, z_k]$ označena sa Δz_k.

Zapremina kvadra A_{ijk} jednaka je: $\Delta A_{ijk} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j \cdot \Delta z_k$.

Rimanova integralna suma funkcije $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^3$ za podelu $\mathcal{P}$ je:

$$\mathcal{R}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{s} f(x_i^*, y_j^*, z_k^*) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j \cdot \Delta z_k, \ (x_i^*, y_j^*, z_k^*) \in A_{ijk}.$$

Neka je $||P||$ dužina dijagonale kvadra P_{ijk}.
Kada $||P|| \to 0$ podela $\mathcal{P}$ je sve finija (više manjih kvadara sa manjim dijagonalama).

Definicija

***Trostruki (trojni) integral** funkcije $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^3$ nad kvadrom A je $\int\int\int\limits_A f(x, y, z) dxdydz = \lim\limits_{||P|| \to 0} \mathcal{R}(f, \mathcal{P})$.*

n-tostruki integral nad pravuglim n-paralelopipedom

Neka je dat pravougli n-paralelopiped
$A = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n] = \{(x_1, ..., x_n) | a_i \leq x_i \leq b_i\}$.

(Analognim postupkom)....

Definicija

n-tostruki integral *funkcije* $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^n$ *nad n-paralelopipedom A je* $\overbrace{\int ... \int_A}^{n} f(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n = \lim\limits_{||P|| \to 0} \mathcal{R}(f, \mathcal{P})$.

Egzistencija

Neka je A segment iz $\mathbb{R}^n$ i $f : A \to \mathbb{R},\ A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Teorema

Ako je f integrabilna na A onda je ona ograničena na A.

Teorema

Ako je f neprekidna na A onda je ona integrabilna na A.

Teorema

Ako je f integrabilna na A i ako je B podsegment od A ($B \subseteq A$) onda je f integrabilna i na B.

Svojstva

Teorema

Neka je A segment iz $\mathbb{R}^n$ *i* $A = \bigcup_{i=1}^{p} A_i$ *jedna podela segmenta A. Ako je* $f : A \to \mathbb{R}$ *integrabilna na svakom podsegmentu* A_i, $i = 1, ...p$, *onda je ona integrabilna i na A i važi:* $\overbrace{\int ... \int_A}^{n} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{p} \overbrace{\int ... \int_{A_i}}^{n} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.$

Teorema

Neka je A segment iz $\mathbb{R}^n$ *i neka su* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *integrabilne na A. Tada:*

- *Funkcija* $\lambda \cdot f,\ \lambda \in \mathbb{R}$ *je integrabilna na A i važi:* $\int\limits_A \lambda f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \lambda \int\limits_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$.
- *Funkcija* $f \pm g$ *je integrabilna na A i važi:* $\int\limits_A (f(\mathbf{x}) \pm g(\mathbf{x}))d\mathbf{x} = \int\limits_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \pm \int\limits_A g(\mathbf{x})d\mathbf{x}$.
- *Ako je* $f(\mathbf{x}) \geq 0$ *na A onda je* $\int\limits_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \geq 0$.
- *Ako je* $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ *za svako* $\mathbf{x} \in A$ *onda je* $\int\limits_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \leq \int\limits_A g(\mathbf{x})d\mathbf{x}$.
- *Funkcija* $|f(\mathbf{x})|$ *je integravilna na A i važi:* $|\int\limits_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x}| \leq \int\limits_A |f(\mathbf{x})|d\mathbf{x}$.

Teorema

Fubinijeva teorema *(za funkciju dve promenlive)*
Neka je $f : A \to \mathbb{R},\ A = [a,b] \times [c,d]$ *neprekidna funkcija. Onda je:*

$$\int\int_A f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Napomena (zapis): $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$

Teorema

Fubinijeva teorema *(za funkciju tri promenlive)*
Neka je $f : A \to \mathbb{R},\ A = [a,b] \times [c,d] \times [r,s]$ *neprekidna funkcija. Onda je:*

$$\int\int\int_A f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_r^s f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx =$$

$$\int_a^b \left(\int_r^s \left(\int_c^d f(x,y,z)dy \right) dz \right) dx = \ldots.$$

Integracija po proizvoljnom skupu

Matematika 1: Sve neprekidne funkcije su integrabilne!!! Integrabilne su i one koje "nemaju mnogo tačaka prekida" i čiji su prekidi samo prve vrste
. Obnoviti prekide prve i druge vrste funkcije jedne promenljive!

Slično važi i za dvostruki integral.

Ograničena funkcija je integrabilna ako i samo ako je njen skup tačaka prekida (mere) površine nula.

Ako je D ogranicen skup. Hoćemo da definišemo integral date funkcije f po skupu D. Krakteristična funkcija skupa:

- $$\chi_(D)(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases} \tag{1}$$

Neka je $f : D \to \mathbb{R}$.

Prekidi funkcije χ su taqno tacke koje pripadaju ∂D. Nisu samo neprekidne funkcije integrabilne vec i one koje imaju "malo" tacaka prekida. Zato, ako je ∂D površine nula i ako pripada nekom pravougaoniku A, χ će biti integrabi;lna na A. (Ovakve skupove obično zovemo merljivim!)

Primer

$D = \{(x, y) : x^2 + (y - 4)^2 < 10\}$.

Primer

Primer skupa koji nije merljiv $D = \{(x, y) : [0, 1] \cap \mathbb{Q}\}$. *Za domaći ispitati šta je* ∂D*?*

Neka je $f : D \to \mathbb{R}$, gde je $D \subseteq \mathbb{R}^2$ i $\bar{f} : A \to \mathbb{R}$, gde je $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $\bar{f} = \chi_D \cdot f$.

-
$$\bar{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases} \tag{2}$$

Definicija

Dvostruki integral funkcije f na ogranicenom skupu D definisemo sa

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_A \bar{f}(x,y)dxdy$$

gde je A proizvoljni pravougaonik koji sadrzi skup D a funkcija $\bar{f}$ neprekidno produzenje funkcije f.

NAPOMENA: Posto je D ogranicen, uvek ce postojati pravougaonik koji ga sadrzi! (ovo direktno sledi iz definicije ogranicenog skupa.)

NAPOMENA: Definicija ne zavisi od izbora pravougaonika.