Funkcionalni redovi

Funkcionalni nizovi

Definicija

*Neka su $f_n(x)$ realne funkcije jednog realnog argumenta koje imaju isti domen $D \subseteq \mathbb{R}$. Uređeni skup funkcija $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...$ zove se **funkcionalni niz** $(f_n(x))$.*

Definicija

*Niz $(f_n(x))$ **konvergira u tački** $x_0 \in D$ ako konvergira brojni niz $(f_n(x_0))$.*

1. Obična konvergencija
2. Uniformna (ravnomerna) konvergencija

Definicija

*Niz $(f_n(x))$ **konvergira na intervalu** $I \subseteq D$ ako postoji realna funkcija $f(x),\ x \in I$, takva da:*

$$(\forall x \in I)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})(n > N(\varepsilon, x) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

(Niz $(f_n(x))$ konvergira na intervalu $I \subseteq D$ ako konvergira u svakoj tački tog intervala.)

Za funkciju $f(x)$ kažemo da je **granična funkcija niza** $(f_n(x))$ ako je $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),\ x \in I$.

Primer (Na času)

Definicija

Niz $(f_n(x))$ ***ravnomerno/uniformno konvergira*** *ka graničnoj funkciji* $f(x)$ *na* $D \subseteq \mathbb{R}$ *(pišemo* $(f_n(x)) \overset{D}{\rightrightarrows} f(x)$*) ako*
$(\forall x \in D)\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})(n > N(\varepsilon) \Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$.

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$
tj. (skoro) svi članovi niza $(f_n(x))$ se nalaze u ε-okolini funkcije $f(x)$.

Primer (Na času)

Osobine uniformne konvergencije funkcionalnih nizova

Teorema

Neka je niz $(f_n(x))$ uniformno konvergentan na skupu I ka funkciji $f(x)$. Ako $\forall n \in \mathbb{N}$ postoji konačan $\lim\limits_{x \to a} f_n(x)$ (tj. tačka x_0 je tačka nagomilavanja skupa I) onda postoji i konačna granična vrednost $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
Pri tom važi: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x).$

NAPOMENA

Tačka x_0 je ***tačka nagomilavanja skupa*** *I ako i samo ako svaka ε-okolina tačke x_0 sadrži bar jednu tačku skupa I različitu od x_0, tj.* $(\forall \varepsilon > 0)(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap I \setminus \{x_0\} \neq \varnothing$.

Teorema

Ako su funkcije $f_n(x)$ neprekidne u tački x_0 i ako niz $(f_n(x))$ ravnomerno konvergira ka $f(x)$ onda je i $f(x)$ neprekidna u tački x_0.

NAPOMENA

- *Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je neprekidna u tački x_0 ako:* $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$.
- *Ako je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ neprekidna u tački x_0 onda* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Na osnovu teoreme važi:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x_0}) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) = \lim_{\mathbf{n} \to \infty} \mathbf{f_n}(\mathbf{x_0})$$

Teorema

Neka važi:

1. *Funkcije $f_n(x)$ su neprekidne na segmentu $[a, b], \forall n \in \mathbb{N}$.*
2. *Niz $(f_n(x))$ uniformno konvergira na segmentu $[a, b]$ ka graničnoj funkciji $f(x)$.*

Tada je granična funkcija $f(x)$ neprekidna na segmentu $[a, b]$.

Podsećanje:

- Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je neprekidna na nekom skupu ako je neprekidna u svakoj tački tog skupa.
- Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je neprekidna na segmentu $[a, b]$ ako je neprekidna na (a, b) i neprekidna sleva u tački b, odnosno zdesna u tački a.

Teorema

Neka je $(f_n(x))$ *niz funkcija. Ako je svaka funkcija* $f_n(x)$ *integrabilna i ako* $(f_n(x)) \rightrightarrows f(x)$ *na* $[a, b]$ *onda je i* $f(x)$ *integrabilna funkcija na* $[a, b]$ *i važi:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty}(f_n(x))dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b (f_n(x))dx.$$

Teorema

Neka je $(f_n(x))$ *niz funkcija takve da* $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$. *Ako važi:*

a) *Funkcije* $f_n(x)$ *su neprekidne i imaju neprekidne izvode* $f_n'(x)$ *na* (a, b), $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) *Niz* $(f_n(x))$ *konvergira bar u jednoj tački* $c \in (a, b)$.

c) *Niz izvoda* $(f_n'(x)) \rightrightarrows f^*(x)$.

Tada važi:

1) $(f_n(x)) \rightrightarrows f(x)$.

2) $f(x)$ *je neprekidna i ima neprekidan izvod* $f'(x)$ *na* (a, b).

3) $f^*(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))' = f'(x)$.

Funkcionalni redovi

Definicija

Neka je $(f_n(x))$ *funkcionalni niz. Beskonačni zbir funkcija* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots$ *zove se* ***funkcionalni red****.*

Definicija

Zbir prvih n članova funkcionalnog niza $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$ *zove se n-ta* ***parcijalna suma*** *funkcionalnog reda.*

$S_n(x)$ je funkcija, definisana na istom domenu kao i $f_k(x)$.

Definicija

Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ***konvergira u tački*** x_0 *ako konvergira brojni red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$.

Skup tačaka $x_0 \in D$ u kojima red konvergira zove se **oblast konvergencije (O.K.)**.

Definicija

Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konvergira na intervalu* $I \subseteq D$ *ako niz parcijalnih suma konvergira na intervalu* I.

$S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x), \ \forall x \in I$

$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je **suma (zbir) reda**.

Definicija

Red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ***uniformno/ravnomerno konvergira (U.K.)*** *na intervalu* $I \subseteq D$ *ka funkciji* $S(x)$ *ako niz parcijalnih suma* $(S_n(x))$ *uniformno konvergira na intervalu* I *ka* $S(x)$*.*

Teorema

Ako je red $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *uniformno konvergentan na* (a, b) *onda je on i konvergentan na* (a, b)*.*

Obrnuto ne mora da važi.

Primer (Na času.)

Primer (Na času.)

Kriterijum za uniformnu konvergenciju funkcionalnih redova

NAPOMENA

Ispitivanje (uniformne) konvergencije funkcionalnog reda se svodi na ispitivanje (uniformne) konvergencije funkcionalnog niza (parcijalnih suma).

Teorema (**Vajerštrasov kriterijum**)

Neka za svako $x \in (a, b)$ *i svako* $n \in \mathbb{N}$ *važi* $|f_n(x)| < C_n$, *gde je* $C_n \in (0, \infty)$. *Ako je pozitivan brojni red* $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ *konvergentan, onda je funkcionalni red* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *uniformno konvergentan na* (a, b).

Primer

Na času.

Osobine (3 važne teoreme) uniformne konvergencije funkcionalnih redova i primeri

Teorema

Neka je red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *uniformno konvergentan na skupu* $I \subseteq D$ *i neka u nekoj tački* x_0 *koja je tačka nagomilavanja skupa* I *postoji* $\lim_{x\to x_0} f_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Tada red* $\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x)$ *konvergira i važi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Teorema

Neka su funkcije $f_n(x)$ *neprekidne na* (a,b) *za svako* $n \in \mathbb{N}$ *i red* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *uniformno konvergentan na* (a,b). *Tada je* $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *neprekidna funkcija na* (a,b).

Teorema

Neka su funkcije $f_n(x)$ neprekidne na (a,b) za svako $n \in \mathbb{N}$ i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformno konvergentan na (a,b). Tada red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ može da se integrali član po član tj. $\forall x_1, x_2,\ 0 < x_1 < x_2 < b$ i važi:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int\limits_{x_1}^{x_2} f_n(x) dx \right).$$

Teorema

Neka su funkcije $f_n(x)$ diferencijabilne, $f_n'(x)$ neprekidne na (a,b) za svako $n \in \mathbb{N}$ i neka je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergentan a red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ uniformno konvergentan na (a,b). Tada se red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ može diferencirati član po član i važi:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Primeri