Funkcije više promenljivih

Prostor $\mathbb{R}^n$

Definicija

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

je skup svih uređenih n-torki $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n),\ x_i \in \mathbb{R}$.

Elementi prostora $\mathbb{R}^n$ se nazivaju **tačkama (vektorima)**, a x_i **koordinatama**.
$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ sa bazom
$e_1 = (1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, ..., 0, 1)$.

Za dva vektora $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ i $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ je definisano:

- $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$ sabiranje dva vektora
- $\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$ množenje skalarom
- $(0, ..., 0)$ neutral za sabiranje
- $-\mathbf{x} = (-x_1, ..., -x_n)$ inverz

Skalarni proizvod je preslikavanje koje svakom paru vektora $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ iz $\mathbb{R}^n$ pridružuje realan broj $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

Za $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ važi sledeće:

- $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$
- $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$
- $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$
- $(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$
- $(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z})$

Za dva vektora $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ kažemo da su **ortogonalna** (pišemo $x \perp y$) ako je $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Neka je $x \in \mathbb{R}^n$. **Norma** je preslikavanje definisano na sledeći način

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

Za dva vektora $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ iz $\mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ važi:

- $||\mathbf{x}|| \geq 0$.
- $||\mathbf{x}|| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$
- $||\lambda \mathbf{x}|| = |\lambda| \cdot ||\mathbf{x}||$
- $||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$

Kažemo da je vektor $\mathbf{x}$ **normiran** ako je $||\mathbf{x}|| = 1$.

Sistem vektora $\mathbf{x}_i$ je **ortonormiran** ako je $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = 0, \ \forall i \neq j$ i $||\mathbf{x}_i|| = 1, \ \forall i$.
Zapravo, je sistem vektora $\mathbf{x}_i$ **ortonormiran** ako je:

$$(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}.$$

Rastojanje (metrika) je preslikavanje $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definisano sa

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

NAPOMENA

U slučaju $n = 1$ rastojanje u $\mathbb{R}$ se svodi na apsolutnu vrednost razlike:

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Za $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ važi sledeće:

- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$

Metrička svojstva skupova u $\mathbb{R}^n$

Definicija

- $K[\mathbf{a}, r] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \leq r\}$ ***zatvorena kugla***
- $K(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) < r\}$ ***otvorena kugla***

Definicija

Tačka $\mathbf{x}$ *je* ***unutrašnja tačka skupa*** $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *ako za svako* $x \in M$ *postoji* $\epsilon > 0$ *tako da otvorena kugla* $K(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset M$*. Skup svih unutrašnjih tačaka skupa* M *je* ***unutrašnjost skupa*** *(pišemo* $\operatorname{int} M$*).*

Tačka $\mathbf{x}$ je **spoljašnja tačka skupa** M ako je ona unutrašnja tačka komplementarnog skupa M^c (ukoliko postoji kugla $K(\mathbf{x}, \varepsilon)$ koja ne pripada M).

Definicija

Ako tačka $\mathbf{x}$ *nije ni spoljašnja ni unutrašnja tačka skupa* M *onda je ona* ***rubna*** *(granična) tačka skupa* M*. Skup svih rubinih tačaka skupa* M *zovemo granicom (rubom) skupa* M *i obeležavamo sa* ∂M*.*

Primer

Definicija

Neka je $M \subseteq \mathbb{R}^n$*.*

- *Skup je M* ***otvoren*** *ako su mu sve tačke unutrašnje.*
- *Skup je M* ***zatvoren*** *akko je njegov komplement otvoren skup (sadrži sve rubne tačke).*
- *Skup je M* ***ograničen*** *ako je sadržan u nekoj kugli.*
- *Skup je M* ***kompaktan*** *ako je ograničen i zatvoren.*

Primer

$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y < 6\}$, $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y \leq 6\}$.

Primer

1. $(0, 1)$ *je otvoren skup u* $\mathbb{R}$
2. $\{3\}$, $\{3, 4\}$ *nisu otvoreni skupovi u* $\mathbb{R}$
3. $\mathbb{N}$ *nije otvoren skup u* $\mathbb{R}$
4. $\mathbb{R}$ *je otvoren i zatvoren skup*
5. $(0, 1]$ *nije otvoren. Da li je zatvoren?*

Okolina tačke a (u oznaci $\mathcal{N}(\mathbf{a})$) je otvorena kugla sa centrom u **a**, tj. $\mathcal{N}(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) < r\}$.
Svaka okolina tačke **a** sadrži bar još jednu tačku koja je različita od **a**.

Definicija

Pod realnom funkcijom n realnih promenljivih podrazumevamo svako preslikavanje $f : D_f \to \mathbb{R},\ D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ *gde je domen* D_f *podskup od* $\mathbb{R}^n$.

Argument funkcije je vektor iz D_f, a rezultat je broj iz $\mathbb{R}$. To je vektorska funkcija jer uzima vrednosti iz vektorskog prostora.

Primer

$f : D_f \to \mathbb{R}$ *gde je* $D_f = \mathbb{R}^3$. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
$f(0, 1, 2) = 0^2 + 1^2 + 2^2 = 5$.

Primer

Odrediti oblasti definisanosti sledećih funkcija:

- $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $f(x, y, z) = xy^2 - \ln z$, $f(x, y) = \arcsin \frac{y}{x}$
- $f(x, y) = \frac{2022}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$, $f(x, y, z) = x^3 + e^{xy} + z$

Konvergencija

Definicija

Definicija 1:
Neka je $\boldsymbol{x}_0$ tačka nagomilavanja skupa $E \subseteq D_f \subseteq \mathbb{R}^n$. Broj a je ***granična vrednost funkcije*** *$f : D_f \to \mathbb{R}$ u $\boldsymbol{x}_0$ ako:*
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)(\forall \boldsymbol{x} \in E \backslash \{\boldsymbol{x}_0\})\ d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(\boldsymbol{x}) - a| < \varepsilon$.

Definicija 2 (Hajneova definicija):
Neka je $\boldsymbol{x}_0$ tačka nagomilavanja skupa $E \subseteq D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ i $f : D_f \to \mathbb{R}$. Za funkciju f kažemo da ima ***graničnu vrednost*** *$a \in \mathbb{R}$ u tački $\boldsymbol{x}_0$ ako za svaki niz tačaka $\{\boldsymbol{x}_n\} \subset E \backslash \{\boldsymbol{x}_0\}$ koji konvergira ka $\boldsymbol{x}_0$, niz $(f(\boldsymbol{x}_n))$ konvergira ka a. Oznaka: $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = a$.*

Primer

Izračunati $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$.

Primer

Da li postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 2x \sin \frac{1}{3y} + 4y \sin \frac{1}{5x}$ *?*

Teorema

Ako funkcija f ima graničnu vrednost u $\boldsymbol{x}_0$ onda je ona jedinstvena.

Dokaz sledi iz definicije jer konvergentan niz ima jedinstvenu graničnu vrednost.

Teorema

Neka su $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i neka $\exists \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = F$ i $\exists \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} g(\boldsymbol{x}) = G$. Tada postoje sledeće granične vrednosti i važi:

1. $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} (f(\boldsymbol{x}) \pm g(\boldsymbol{x})) = F \pm G$
2. $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} (f(\boldsymbol{x}) \cdot g(\boldsymbol{x})) = F \cdot G$
3. $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})} = \frac{F}{G}$
4. $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \lambda f(\boldsymbol{x}) = \lambda F,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Dokaz je analogan dokazu odgovarajućih tvrdjenja u slučaju funkcije jedne promenljive (Matematika 1).

Neprekidnost

Definicija

Definicija 1: *Funkcija* $f : D_f \to \mathbb{R},\ D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ *je neprekidna u tački* $\mathbf{x}_0 \in D_f$ *ako*
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)(\forall \mathbf{x} \in D_f)\ d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon.$

Definicija 2: *Funkcija* $f : D_f \to \mathbb{R},\ D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ *je neprekidna u tački* $\mathbf{x}_0 \in D_f$ *ako i samo ako za svaki niz tačaka* $(\mathbf{x}_n) \subset D_f$ *koji konvergira ka* $\mathbf{x}_0$ *(tj.* $x_n \to x_0,\ n \to \infty$*) važi*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Funkcija $f(x, y)$ je neprekidna u tački $(x_0, y_0) \in D_f$ ako je:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Kažemo da je funkcija f neprekidna ako je neprekidna u svakoj tački svog domena.

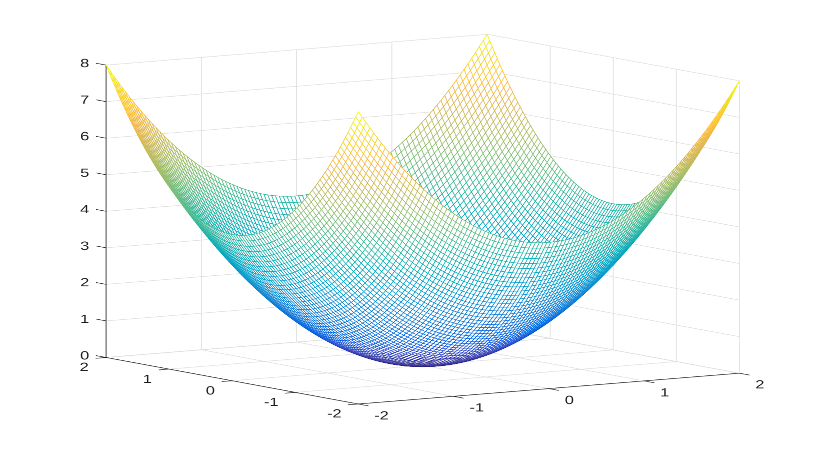
Primer (Na času)

Teorema

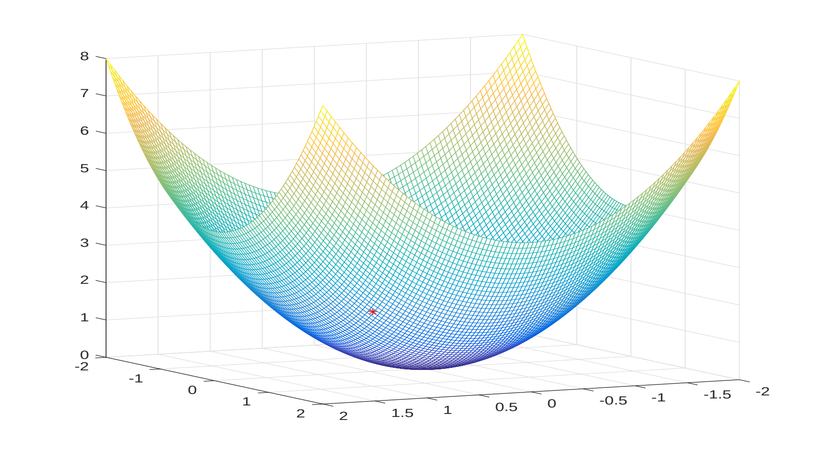
Ako su f i g neprekidne u tački x_0 tada su i funkcije $f+g$, $f-g$ i $f \cdot g$ neprekidne u x_0. Ako još važi $g(x_0) \neq 0$ onda je i funkcija $\frac{f}{g}$ neprekidna u x_0.

Primer (Na času)

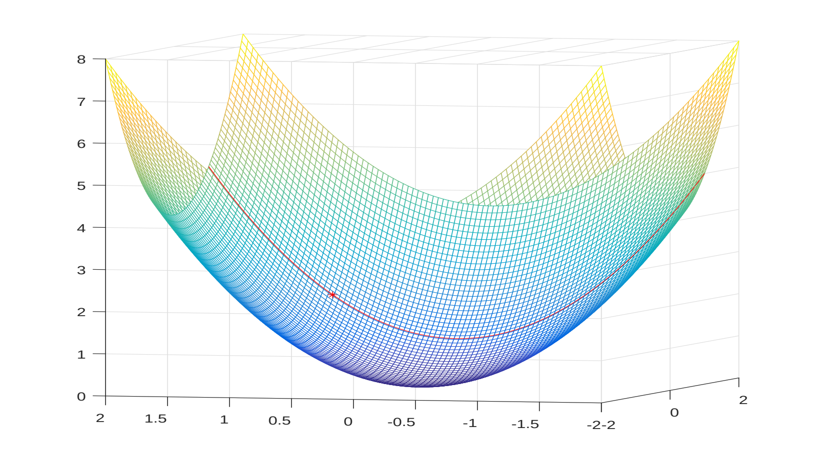
Grafik funkcije $f : [-2, 2] \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x^2 + y^2$



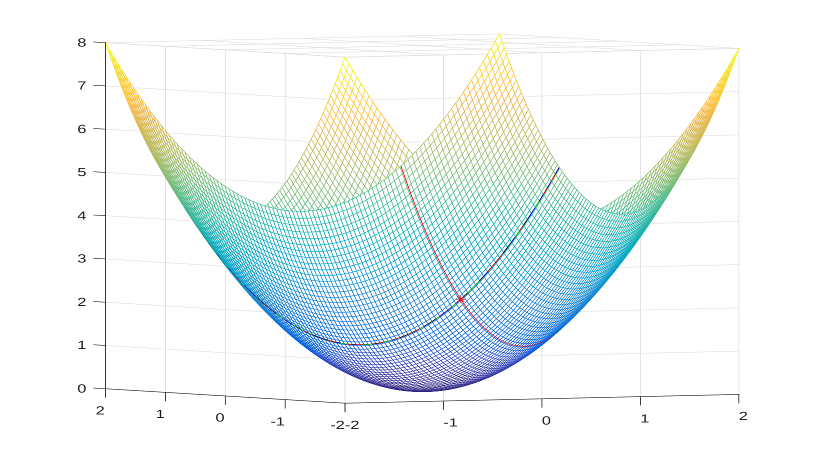
Označimo tačku $\mathbf{x}_0 = (1, 1, 2)$ sa crvenom zvezdicom (ona pripada ovoj površi).



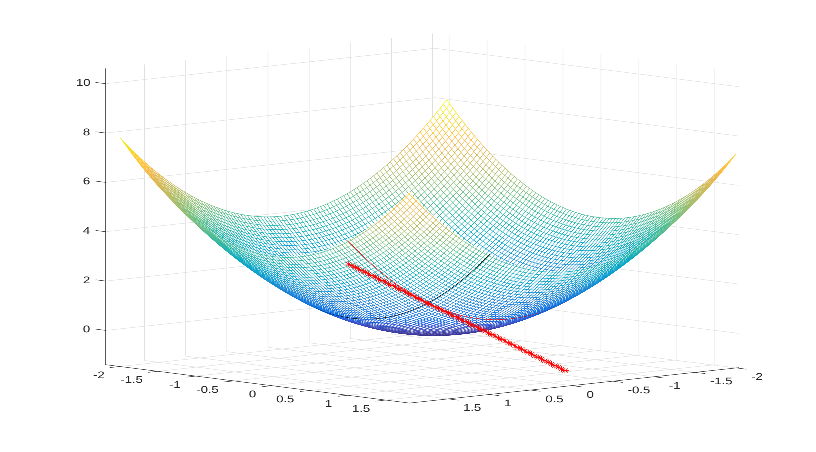
Ako bismo funkciju $f(x,y) = x^2 + y^2$ posmatrali kao funkciju jedne promenljive (fiksiramo $y = 1$) dobijamo funkciju jedne promenljive $f(x,1) = x^2 + 1^2$ (na grafiku crvena linija koja pripada površi).



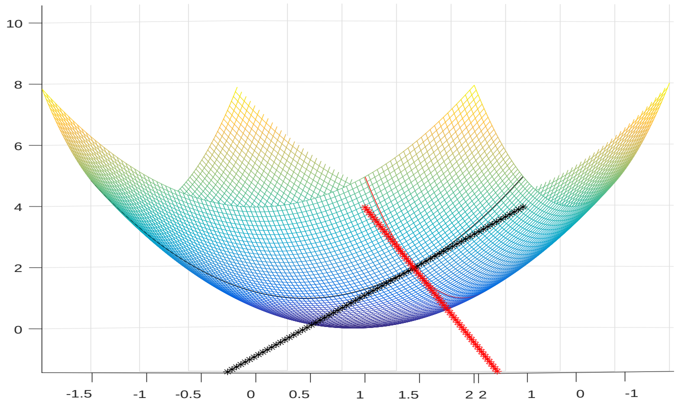
Ako bismo umesto y sada fiksirali $x = 1$ dobijamo opet funkciju jedne promenljive $f(1, y) = 1^2 + y^2$ (na grafiku crna linija koja pripada površi).



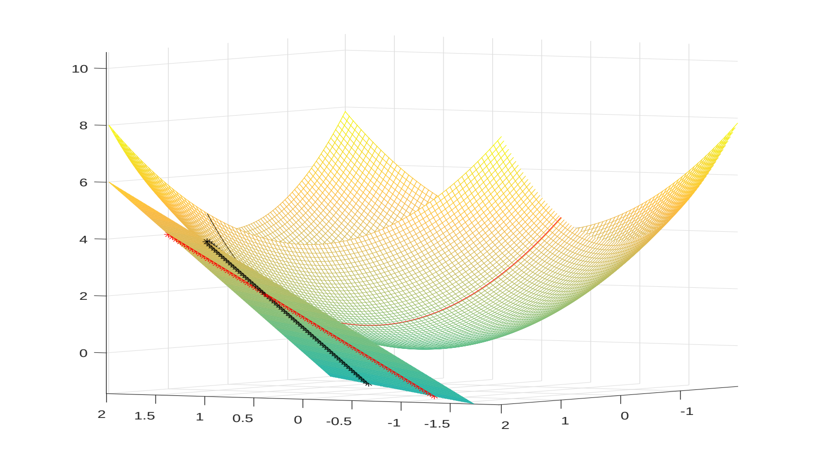
Da bismo odredili tangentu funkcije $f(x, 1) = x^2 + 1$ (crveno) u tački $x_0 = (1, 1)$ treba da odredimo izvod ove funkcije po promenljivoj x, tj. $f'_x(x, 1) = 2x$ (crvena prava na grafiku).



Da bismo odredili tangentu funkcije $f(1, y) = 1 + y^2$ (crno) u tački $x_0 = (1, 1)$ treba da odredimo izvod ove funkcije po promenljivoj y, tj. $f'_y(1, y) = 2y$ (crna prava na grafiku).



Ove dve prave (crvena i crna tangenta) određuju jednu ravan, tj. tangentnu ravan na površ.

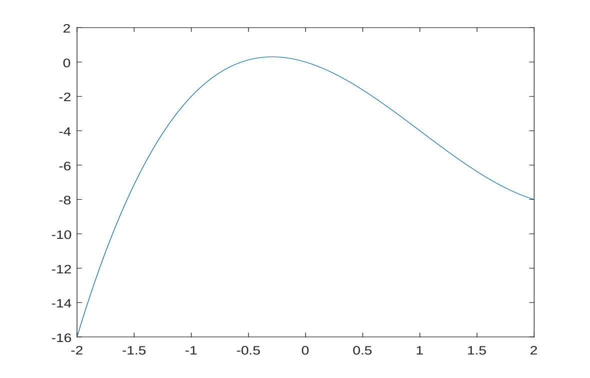


Izvodi realne funkcije jedne realne promenljive

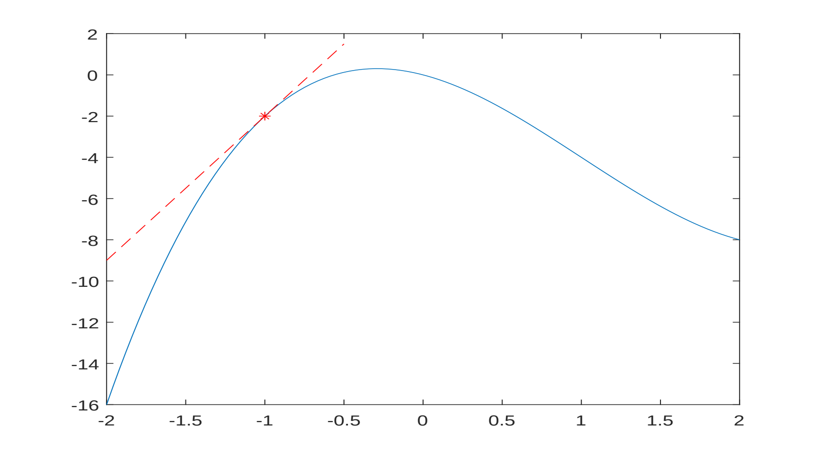
Za funkciju jedne promenljive $f : D_f \to \mathbb{R},\ D_f \subseteq \mathbb{R}$ izvod u tački a predstavlja nagib tangente na f u tački $(a, f(a))$ i određuje se preko:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

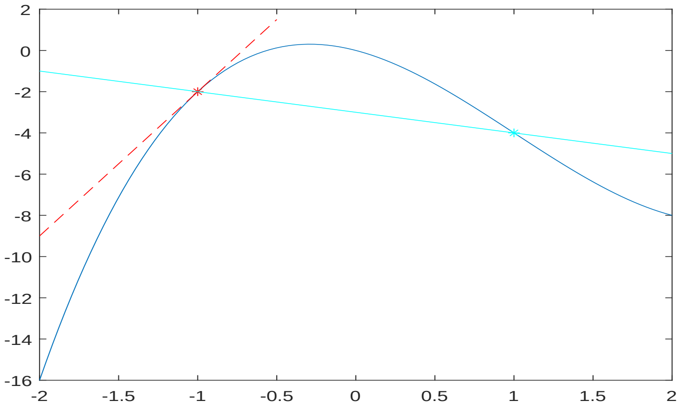
Neka je data funkcija $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}\ f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x$.



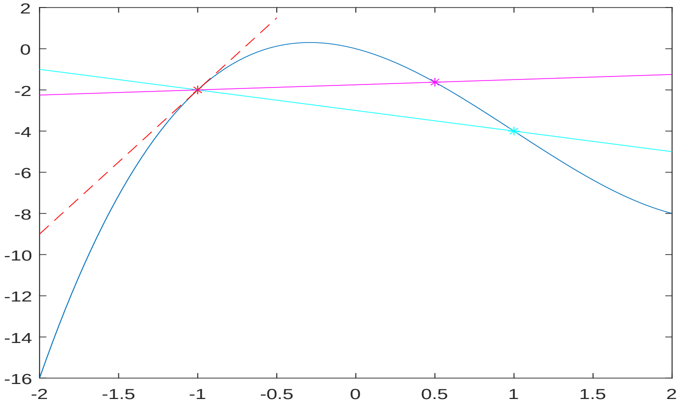
Želimo da odredimo tangentu u tački $(-1, -2)$ (crvena tačka na grafiku). To će biti prava (crvena isprekidana linija).



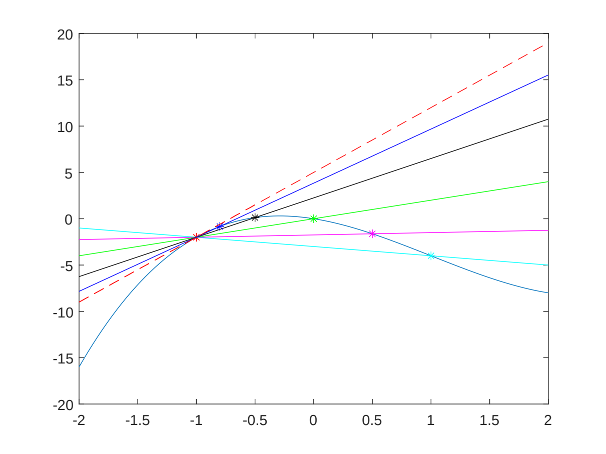
Posmatrajmo našu (crvenu) tačku $(a, f(a)) = (-1, -2)$ i neka je $h = 2$. Imamo novu tačku $(a + h, f(a + h)) = (1, -4)$ (na grafiku svetlo plava zvezdica). Prava određena sa ove dve tacke je svetlo plave boje.



Smanjimo h na $h = 1.5$. Imamo novu tačku $(a + h, f(a + h)) = (0.5, -1.625)$ (na grafiku roze zvezdica). Prava određena sa ove dve tacke je roze boje.

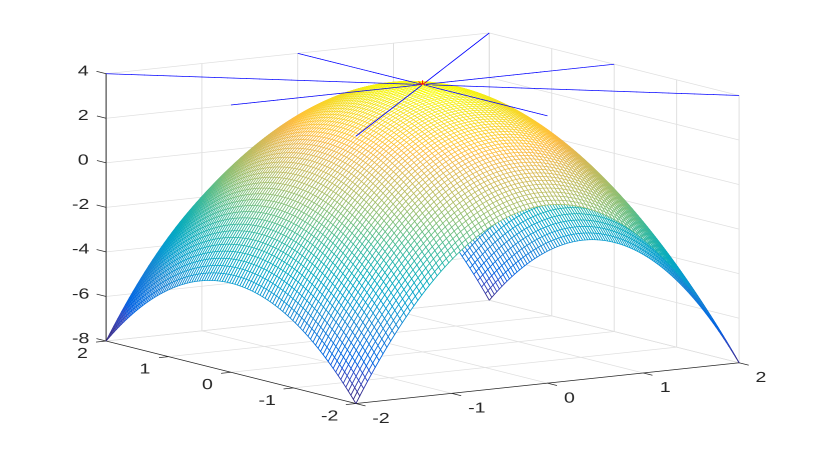


Smanjimo h na $h = 1$. Imamo tačku $(a+h, f(a+h)) = (0,0)$ (zelena zvezdica). Prava određena sa ove dve tacke je zelene boje.
Smanjimo h na $h = 0.5$. Imamo tačku $(a+h, f(a+h)) = (-0.5, 0.125)$ (crna zvezdica). Prava određena sa ove dve tacke je crne boje.
Smanjimo h na $h = 0.2$. Imamo tačku $(a+h, f(a+h)) = (-0.8, -0.832)$ (plava zvezdica). Prava određena sa ove dve tacke je plave boje.

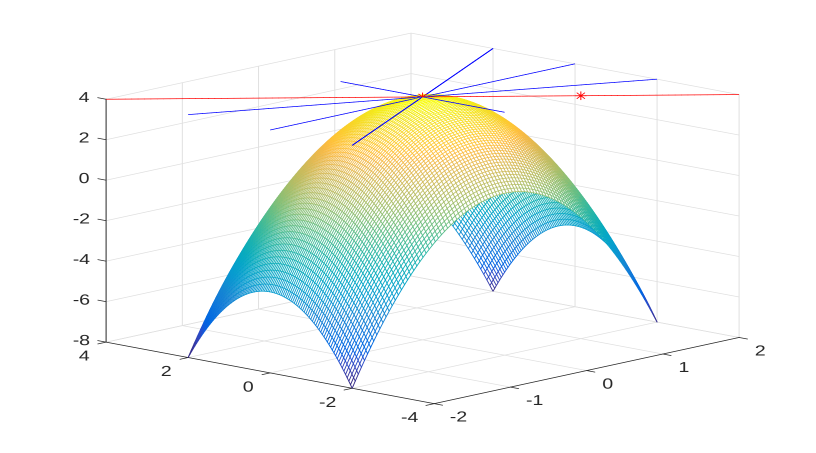


Izvod u pravcu (funkcije više promenljivih)

Neka je $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 4 - 2x^2 - y^2$, tačka $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 4)$ (crvena zvezdica), a plave prave su tangente na f u $\mathbf{x}_0$.



Crvena prava - tangenta na f u tački $\mathbf{x}_0$ koja sadrži tačku $\mathbf{a} = (1, -2, 4)$ (druga crvena zvezdica van površi) tj. tangenta u pravcu vektora $\mathbf{a}$.



Definicija

Neka je $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}_0$ unutrašnja tačka skupa D_f i $\vec{\boldsymbol{a}} \neq \boldsymbol{0}$ vektor. Granična vrednost

$$f'_{\vec{\boldsymbol{a}}}(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + h \cdot \boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{h}$$

*ukoliko postoji, zove se **izvodom funkcije** f **u tački $\boldsymbol{x}_0$ u pravcu vektora $\vec{\boldsymbol{a}}$**.*

Primer (Na času)

Odrediti izvod funkcije

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{1}$$

u tački $x_0 = (0,0)$ u pravcu vektora $\vec{\boldsymbol{a}} = (1,2)$.

Parcijalni izvod

Definicija

Neka je $f : D_f \to \mathbb{R},\ D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ definisana u okolini tačke $\mathbf{x_0} = (a_1, ..., a_n)$ i neka je $\mathbf{e}_k$ k-ti vektor standardne baze u $\mathbb{R}^n$. Ukoliko postoji izvod funkcije f u tački $\mathbf{x_0}$ pravcu vektora $\mathbf{e}_k$ zovemo ga ***parcijalni izvod funkcije f po promenljivoj x_k u tački $\mathbf{x_0}$*** *tj.*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(\mathbf{x_0})}{\partial x_k} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x_0} + h\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x_0})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, ..., a_{k-1}, a_k + h, a_{k+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{h}.\end{aligned}$$

Ako postoji parcijalni izvod funkcije f po promenljivoj x_k u tački $\mathbf{x_0}$, onda kažemo da je funkcija f **diferencijabilna po k-toj promenljivoj** u tački $\mathbf{x_0}$. Za funkciju dve promenljive f parcijalni izvodi po x i y u tački $x_0 = (a_1, a_2)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h}, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, a_2 + h) - f(a_1, a_2}{h}$$

Primer (Odrediti parcijalne izvode funkcije (1) u tački $x_0 = (0, 0)$.)

Iz Matematike 1 podsetnik kada je funkcija jedne promenljive diferencijabilna u tački $x_0 \in D_f$.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Drugi način da se ovo zapiše je

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h),\ h \to 0.$$

Ako je f funkcija dve promenljive preslikavanje $h \to f'(x_0)h$ u gornjem uslovu se samo zamenjuje linearnim preslikavanjem $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Teorema

Ako je funkcija dve promenljive diferencijabilna u (x_0, y_0) onda postoje $f'_x(x_0, y_0)$ i $f'_y(x_0, y_0)$.

Ako neki od nji ne postoji funkcija nije diferencijabilna u (x_0, y_0). Ako postoje oba onda proverimo da li izraz

$$\frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - f'_x(x_0, y_0)h - f'_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

teži nuli kad $(h, k) \to (0, 0)$. Ako to jeste slučaj onda funkcija f jeste diferencijabilna u (x_0, y_0). U susprotnom nije.

Primer

Teorema

Ako je f diferencijabilna u (x_0, y_0) onda je ona i neprekidna u (x_0, y_0).

Definicija

Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i $x_0 \in D$. Vektor funkcija $F : D \to \mathbb{R}^n$ je diferencijabilna u tački x_0 ako postoji linearno preslikavanje $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ takvo da važi

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + Lh + o(h), \; h \to 0 \tag{2}$$

pri čemu je $o(h)$ vektor funkcija.

Zapišimo prethodnu jedankost u koordinatama (preko $F = (f_1, ..., f_n)^T$):

$$\begin{bmatrix} f_1(x_0+h) \\ \vdots \\ f_n(x_0+h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_0) \\ \vdots \\ f_n(x_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1m} \\ \dots \\ a_{n1} \dots a_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o(h) \\ \vdots \\ o(h) \end{bmatrix}, \; h \to 0.$$

Uslov (2) je ekvivalentan uslovu

$$f_j(x_0+h) = f_j(x_0) + L_j h + o(h), \; h \to 0, \; j = 1, \dots, n \tag{3}$$

gde su $L_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ linearna preslikavanja čije su matrice

$$A_{L_j} = [a_{j1} \dots a_{jm}] = [\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f_j}{\partial x_m}(x_0)]$$

Jednakost (3) je uslov diferencijabilnosti funkcije f_j.

Matrica $J = \begin{bmatrix} A_{L_1} \\ \vdots \\ A_{L_n} \end{bmatrix}$ tj.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x_0) \end{bmatrix}$$

se naziva Jakobijeva matrica. Linearno preslikvanje L je izvod vektor funkcije F u x_0 i označava se sa $F'(x_0)$.

Za $m = n$ determinanta Jakobijeve matrice se zove Jakobijan u tački x_0 i označava sa $det(J)$ ili $|J|$.

Primer (Veza Dekartovog i polarnog kooordinatnog sistema)

Odrediti Jakobijan preslikavanja:

$$F(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \rho \cdot \cos\theta \\ \rho \cdot \sin\theta \end{bmatrix}.$$

Teorema (Izvod složene funkcije)

Neka su $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^n$ otvoreni i $F : A \to \mathbb{R}^n$, $G : B \to \mathbb{R}^k$, $x_0 \in A$ i $F(x_0) = y_0$ gde je $y_0 \in B$. Ako je F diferencijabilna u x_0 i G diferencijabilna u y_0 tada je i kompozicija $G \circ F$ diferencijabilna u x_0 i važi

$$(G \circ F)'(x_0) = G'(y_0) \circ F'(x_0).$$

Ovo je analogon teoreme za izvod složene funkcije jedne promenljive (podsetnik iz Matematike 1).

Izvodi drugog i višeg reda:

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ (oznake f''_x, f''_y)
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ mešoviti izvodi (oznake f''_{xy}, f''_{yx})
- Analogno se definišu mešoviti izvodi trećeg reda: f'''_{xxy}, f'''_{xyx}, f'''_{yxx}, f'''_{xyy}, f'''_{yxy}, f'''_{yyx}

Primer

Odrediti sve izvode drugog reda funkcije $f(x, y) = x^3y + x^4 + y^2e^{2xy}$.

Teorema

Ako f ima mešovite parcijalne izvode f''_{xy} i f''_{yx} u nekoj otvorenoj kugli sa centrom u (x_0, y_0) i ako su oni neprekidni u (x_0, y_0) tada je

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Kvadratnu matricu

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{bmatrix}$$

nazivamo matricom drugog izvoda funkcije f u x_0 ili Heseovom matricom (Hesijan) i obeležavamo sa $H_f(x_0)$. Ako su zadovoljeni uslovi prethodne teoreme onda je Heseova matrica simetrična.