Brojni redovi

Redovi realnih brojeva

- Neka je $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ **niz realnih brojeva**, u oznaci $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
- Suma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ...$ naziva se (**beskonačnim) realnim redom** sa opštim članom a_n.
- Sume:
  $S_1 = a_1$
  $S_2 = a_1 + a_2$
  ....
  $S_n = a_1 + ... + a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ (n-ta parcijalna suma reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$)
  nazivaju se **parcijalnim sumama reda**.

Definicija

Ako postoji konačan limes niza parcijalnih suma reda tj. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ *onda se kaže da taj red* ***konvergira*** *(pisaćemo skraćeno* **(K)***) i da mu je zbir (suma) S tj.*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Ako ne postoji limes $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ *ili određeno divergira (ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$*) onda kažemo da red* ***divergira*** *(pisaćemo skraćeno* **(D)***).*

Teorema

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira, onda konvergira i red* $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n,\ c \in \mathbb{R}$.

Pri tom važi $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dokaz na času.

Teorema

Ako redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergiraju, onda konvergira i njihov zbir* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$.

Pri tom važi $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dokaz na času.

Teorema (Neophodan uslov za konveregenciju reda)

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira, onda je* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dokaz na času.

Obrnuto ne važi!

Primer

Na času.

Primer

Na času.

Definicija

Za dva reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *kažemo da su ekvikonveregentni ako istovrememo oba konvergiraju (divergiraju).*

Definicija

Ostatak reda *je* $r_m = \sum\limits_{n=m+1}^{\infty} a_n = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots .$

Očigledno je da: $S_m = \sum\limits_{n=1}^{m} a_n = a_1 + \ldots + a_m \Rightarrow r_m = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - S_m.$

Teorema

Redovi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$ $(m > 2)$ *su istovremeno konvergentni ili divergentni.*

Dokaz na času.

Teorema

Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira akko* $\lim\limits_{m\to\infty} r_m = 0.$

Dokaz na času.

Kriterijumi za konvergenciju realnih redova sa pozitivnim članovima ($a_n > 0$)

Teorema (Poredbeni kriterijum 1)

Neka za članove redova $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *sa pozitivnim članovima važi* $0 \leq a_n \leq b_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$. *Tada:*

1. *Ako red* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergira, onda* ($\Longrightarrow$) *konvergira i red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
2. *Ako red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira, onda* ($\Longrightarrow$) *divergira i red* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dokaz na času.

Primer

Na času.

Primer

Na času.

Teorema

Neka za članove redova $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *sa pozitivnim članovima važi* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Tada:*

1. *Ako red* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergira, onda (* $\Longrightarrow$ *) konvergira i red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
2. *Ako red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira, onda (* $\Longrightarrow$ *) divergira i red* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Teorema (**Poredbeni kriterijum 2)**

Neka za članove redova $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *sa pozitivnim članovima važi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

gde je $L \in (0, \infty)$. *Tada su redovi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *ekvikonveregentni.*

NAPOMENA

Ako je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

pišemo $a_n \sim b_n$ *kad* $n \to \infty$*. (Čitamo: Niz* a_n *se ponaša kao niz* b_n *za dovoljno veliko n.)*

Primer

Na času.

Primer

Na času.

Teorema (Integralni kriterijum)

Neka je $k \in \mathbb{N}$. Neka je $f(x)$ neprekidna, nenegativna i opadajuća funkcija na $[k, \infty)$ i neka je $a_n = f(n)$. Tada su red $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ i nesvojstven integral $\int_k^{\infty} f(x)dx$ ekvikonveregentni.

Primer

Na času.

Primer

Na času.

Teorema (**Košijev kriterijum**)

Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *red sa pozitivnim članovima i neka postoji* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ *.*

Tada:

1. *Ako je* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ *onda red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira.*
2. *Ako je* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ *onda red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira.*
3. *Ako je* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ *onda ne možemo ništa reći o konvergenciji reda* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*.*

Primer

Na času.

Primer

Na času.

Teorema (**Dalamberov kriterijum**)

Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *red sa pozitivnim članovima i neka postoji* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
Tada:

1. *Ako je* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ *onda red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira.*
2. *Ako je* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ *onda red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira.*
3. *Ako je* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ *onda ne možemo ništa reći o konvergenciji reda* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Primer

Na času.

Primer

Na času.

Alternirajući redovi

Definicija

Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...,\ a_n > 0$ *(članovi naizmenično menjaju znak) zove se* ***alternirajući red****.*

NAPOMENA

Kriterijumi konvergencije za redove sa pozitivnim članovima ne važe i za alternirajuće redove.

Teorema (**Lajbnicov kriterijum**)

Alternirajući red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n,\ a_n > 0$ *je konvergentan ako je niz* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *nerastući i* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$*.*

Dokaz na času.

Primer

Redovi sa proizvoljnim članovima

Primer

Redovi sa proizvoljnim članovima su oni redovi čiji članovi menjaju znak ali bez neke pravilnosti. Alternirajući redovi su specijalni slučaj redova sa proizvoljnim članovima.

Definicija

Ako konvergira pozitivan red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *onda kažemo da red sa proizvoljnim članovima* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***apsolutno konvergira****.*

Za ispitivanje apsolutne konvergencije mogu da se koriste svi kriterijumi kao i za redove sa pozivitnim članovima.

Teorema

Ako je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *apsolutno konvergentan, onda je on i konvergentan.*

Obrnuto ne mora da važi.

Primer

Na času.

Primer

Na času.