Матрична метода; Стабилизација рачунске грешке

$$\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} x-x_0 & x_0-x_1 & x_0-x_2 & \cdots & x_0-x_n \\ x_1-x_0 & x-x_1 & x_1-x_2 & & x_1-x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n-x_0 & x_n-x_1 & x_n-x_2 & & x-x_n \end{bmatrix} & \begin{matrix} D_0 \\ D_1 \\ \\ D_n \end{matrix} \end{array}$$

$$L_n(x) = \omega_{n+1}(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x-x_i)\,\omega'_{n+1}(x_i)}$$

$\omega_{n+1} = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$ - елем. са дијагонале

$(x-x_i)\,\omega'_{n+1}(x_i) = D_i$

① $\begin{bmatrix} 115-100 & 100-121 & 100-144 \\ 121-100 & 115-121 & 121-144 \\ 144-100 & 144-121 & 115-144 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -21 & -44 \\ 21 & -6 & -23 \\ 44 & 23 & -29 \end{bmatrix}$

$\omega_3(115) = (115-100)(115-121)(115-144) = 15(-6)(-29) = 2610$

$D_0 = 13860, \quad D_1 = 2898, \quad D_2 = -29348$

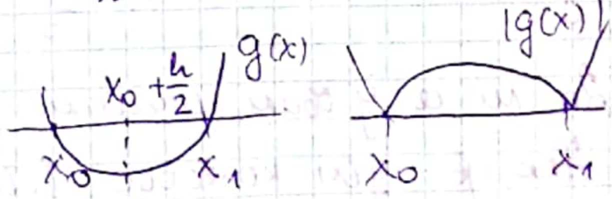
$L_2(115) = 2610\left(\frac{10}{13860} + \frac{11}{2898} \frac{-12}{29348}\right) =$

$= 10.7227555056$

$= 10.72276$

$L_2(115) = 10.723 \pm 0.2 \cdot 10^{-2}$

② Нека је $M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$. Доказати да се ф-ја $f(x)$ на интервалу $[a,b]$ може таблирати са кораком $h \le \sqrt{\frac{8\varepsilon}{M_2}}$ т.д. грешка линеарне интерполације не буде већа од ε.



$|R_1(x)| \le \frac{M_2}{2!} |(x-x_0)(x-x_1)|$

$x_0, x_1 = x_0 + h$, h-корак

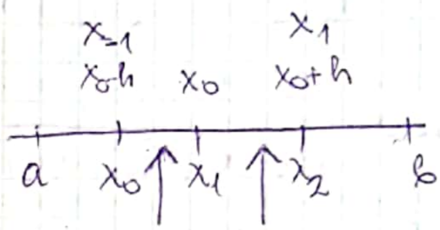
$|R_1(x)| \le \frac{M_2}{2!} |g(x)| \le \varepsilon$, $\forall x\in[x_0,x_1]$, $g(x) = (x-x_0)(x-x_1) = (x-x_0)(x-x_0-h)$

Односно $\frac{M_2}{2!} \max_{x\in[x_0,x_1]} |g(x)| \le \varepsilon$. Како ф-ја $g(x)$ достиже минимум у тачки $x = x_0 + \frac{h}{2}$ на $[x_0,x_1]$, то ф-ја $|g(x)|$

у тој тачки достиже максимум g:

$$\frac{M_2}{2!}\, g\left(x_0+\frac{h}{2}\right) \le \varepsilon \Leftrightarrow \frac{M_2}{2!}\,\frac{h^2}{4} \le \varepsilon \Rightarrow h \le \sqrt{\frac{8\varepsilon}{M_2}}$$

3. Нека је $M_3 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f'''(x)|$. Доказати да се апроксимацијом ф-је квадратним интерполационим полиномом не прави грешка већа од ε ако се за корак узме $h \le \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}\varepsilon}{M_3}}$.



$$|R_2(x)| \le \frac{M_3}{3!}\,|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|$$

$$|R_2(x)| \le \frac{M_3}{6}\,|(x-x_0+h)(x-x_0)(x-x_0-h)|$$

$$= \frac{M_3}{6}\, g(x) \le \varepsilon \quad \forall x \in [x_{-1}, x_1]$$

$$\Leftrightarrow \frac{M_3}{6} \max_{x\in[x_{-1},x_1]} g(x) \le \varepsilon$$

смена: $s = \frac{x-x_0}{h}$

$\tilde g(s) = h^3 s (s^2-1)$

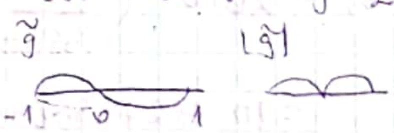
$\tilde g'(s) = h^3(3s^2-1)$

$\tilde g''(s) = 6 s h^3$

$s_1 = -\frac{1}{\sqrt3}$ – макс. за $\tilde g(s)$

$s_2 = \frac{1}{\sqrt3}$ – мин. за $\tilde g(s)$

обе макс. за $|\tilde g(s)|$



$$g(x) = \begin{cases} (x-x_0+h)(x-x_0)(x-x_0-h), & x_0-h \le x \le x_0 \\ -(x-x_0+h)(x-x_0)(x-x_0-h), & x_0 \le x \le x_0+h \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ((x-x_0)^2-h^2)(x-x_0), & x_0-h \le x \le x_0 \\ -((x-x_0)^2-h^2)(x-x_0), & x_0 \le x \le x_0+h \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (x-x_0)^3 - h^2(x-x_0), & x_0-h \le x \le x_0 \\ -(x-x_0)^3 + h^2(x-x_0), & x_0 \le x \le x_0+h. \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} 3(x-x_0)^2 - h^2, & x_0-h \le x \le x_0 \\ -3(x-x_0)^2 + h^2, & x_0 \le x \le x_0+h \end{cases}$$

$g'(x) = 0$ за $(x-x_0)^2 = \frac{h^2}{3}$ тј. $x = x_0 \pm \frac{h}{\sqrt3}$, где: $x_0 - \frac{h}{\sqrt3} \in (x_0-h, x_0)$, $x_0 + \frac{h}{\sqrt3} \in (x_0, x_0+h)$

Да ли се у овим тачкама достиже максимум или минимум?

Ако је $g(x)$ конкавна биће максимум.

$$g''(x) = \begin{cases} 6(x-x_0), & x_0-h \le x \le x_0 \\ -6(x-x_0) & x_0 \le x \le x_0+h \end{cases} \Rightarrow g''(x) < 0 \quad \forall x \in (x_{-1}, x_0) \cup (x_0, x_1)$$

$\Rightarrow$ Тачке $x_{1,2} = x_0 \pm \frac{h}{\sqrt3}$ су тачке максимума.

$$g(x_1) = (x-x_0)\left[(x-x_0)^2 - h^2\right] \Big|_{x=x_1} = -\frac{h\sqrt{3}}{3}\left(\frac{h^2}{3} - h^2\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}h^3$$

$$g(x_2) = -(x-x_0)\left[(x-x_0)^2 - h^2\right] \Big|_{x=x_2} = \frac{h\sqrt{3}}{3}\left(\frac{h^2}{3} - h^2\right) = \frac{2h^3\sqrt{3}}{9}$$

$$\frac{M_3}{6} \cdot \frac{2h^3\sqrt{3}}{9} \le \varepsilon \iff h^3 \le \frac{9\sqrt{3}\,\varepsilon}{M_3} \iff h \le \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}\,\varepsilon}{M_3}}.$$

4) На интервалу $[10,13]$ табелирати ф-ју $y = \ln x$ т.д. грешка квадратне интерполације не буде већа од $0.2 \cdot 10^{-3}$ ($= 0.0002$) и затим приближно израчунати $\ln(10.8)$ и $\ln(14.1)$.

Претходни задатак: $h \le \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}\,\varepsilon}{M_3}}$

$M_3 = \max |f^{(3)}(x)|$

$f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$, $f^{(4)} = \frac{-6}{x^4}$

$f^{(4)}(x) < 0 \;\; \forall x \in R \Rightarrow f'''(x)$ је монотоно опадајућа ф-ја (очигледно било)

$\Rightarrow M_3 = f^{(3)}(10) = 2 \cdot 10^{-3}$

$$h \le \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3} \cdot 0.2 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}}} = 1.15949\ldots$$

Ради лакшег рачуна бирамо $h = 1$.

Табелирамо ф-ју:

$\varepsilon = 0.2 \cdot 10^{-3}$ (0.0002) – радимо на бар 4 децимале, нпр. 5

x_i	10	11	12	13
y_i	2.30259	2.39790	2.48491	2.56495

За квадратну интерполацију нам требају 3 чвора.

$$\begin{bmatrix} x-x_0 & x_0-x_1 & x_0-x_2 \\ x_1-x_0 & x-x_1 & x_1-x_2 \\ x_2-x_0 & x_2-x_1 & x-x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.8-10 & 10-11 & 10-12 \\ 11-10 & 10.8-11 & 11-12 \\ 12-10 & 12-11 & 10.8-12 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0.8 & -1 & -2 \\ 1 & -0.2 & -1 \\ 2 & 1 & -1.2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \end{array}$$

$\omega = 0.8\,(-0.2)(-1.2) = 0.192$

$D_0 = 1.6$, $D_1 = +0.2$, $D_2 = -2.4$

$$L(10.8) = \frac{0.192}{1.6} \cdot 2.30259 + \frac{0.192}{0.2} \cdot 2.39790 + \frac{0.192}{-2.4} \cdot 2.48491$$

$$= 2.3795$$

$|\ln 10.8 - L_2(10.8)| \le 0.5 \cdot 10^{-4}$ (узели смо мањи корак)

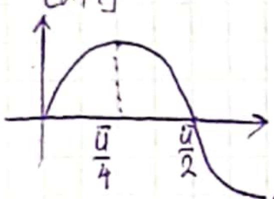
За домаћи: $L_2(14.1) = 2.64494$.

⑤ Нека је $f(x) = \int\limits^{x} \sin^2 t\,dt$ табелирана у интервалу $[0,1]$ са равномерно распоређеним чворовима и кораком h. Одредити $\alpha = \alpha(h,\varepsilon)$ т.д. грешка линеарне интерполације не буде већа од ε на интервалу $[\alpha, 1]$. Какво h треба узети да би се постигла тачност 0.005 за $\alpha = 0.1$?

Из задатка ②: $|R_1(x)| \le \frac{1}{2} \max\limits_{[\alpha,1]} |f''(x)| \frac{h^2}{4} \le \varepsilon$

$f(x) = \int\limits_0^x \sin^2 t\,dt$, $f'(x) = \sin^2 x$, $f''(x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x$

$M_2 = \max\limits_{[\alpha,1]} |\sin 2x| = ?$



$$M_2 = \begin{cases} 1, & 0 \le 2\alpha \le \frac{\pi}{2} \iff 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{4} \\ \sin 2\alpha, & \frac{\pi}{4} \le \alpha < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |R_1(x)| \le \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{h^2}{4}, & 0 \le \alpha \le \pi/4 \\ \frac{\sin 2\alpha}{2}\frac{h^2}{4}, & \frac{\pi}{4} \le \alpha \quad 1 \end{cases}$$

За $\frac{\pi}{4} \le \alpha < 1$: $\frac{\sin 2\alpha}{2}\frac{h^2}{4} \le \varepsilon \iff \sin 2\alpha \le \frac{8\varepsilon}{h^2} \iff \alpha \ge \frac{1}{2}\arcsin\frac{8\varepsilon}{h^2}$

За $\alpha = 0.1$ $(\alpha < \frac{\pi}{4})$: $\frac{1}{2}\frac{h^2}{4} \le \varepsilon \iff h \le \sqrt{8\varepsilon} = 0.2$

Њутнов интерполациони полином са подељеним разликама

Уводимо подељене разлике:

- реда 0: $f[x_0] = f(x_0)$
- реда 1: $f[x_0,x_1] = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$
- реда 2: $f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$

$\vdots$

- реда n: $f[x_0,x_1,\dots,x_n] = \dfrac{f[x_1,x_2,\dots,x_n]-f[x_0,x_1,\dots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$

Особине:

① $f[x_0,x_1,\ldots,x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)}$

② $(\alpha f+\beta g)[x_0,x_1,\ldots,x_n] = \alpha f[x_0,x_1,\ldots,x_n] + \beta g[x_0,x_1,\ldots,x_n]$

③ $f[x_0,x_1,\ldots,x_n] = f[x_{i_0},x_{i_1},\ldots,x_{i_n}]$ - $(i_0,i_1,\ldots,i_n)$ -било која пермутација скупа $(1,2,\ldots,n)$.

Подељене разлике рачунамо помоћу таблице

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & f_0 & & & & \\
 & & f[x_0,x_1] & & & \\
x_1 & f_1 & & f[x_0,x_1,x_2] & & \\
 & & f[x_1,x_2] & & & \\
x_2 & f_2 & & \vdots & & \\
\vdots & & \vdots & & \ldots & f[x_0,x_1,\ldots,x_n] \\
 & & f[x_{n-2},x_{n-1}] & & & \\
x_{n-1} & f_{n-1} & & f[x_{n-2},x_{n-1},x_n] & & \\
 & & f[x_{n-1},x_n] & & & \\
x_n & f_n & & & &
\end{array}
$$

Интерполациони полином са подељеним разликама:

$L_n(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \ldots + f[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$

(Представља уопштење парцијалне суме Тејлоровог реда)

Грешка:

Користимо везу: $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \approx f[x,x_0,\ldots,x_n]$

* $|R_n(x)| \leq |f[x,x_0,\ldots,x_n]|\,|\omega_{n+1}(x)|$

① За таблично задату ф-ју f одредити вредност у тачки $x=1.16$ користећи Њутнов интерполациони полином $L_3(x)$

		$f(x_i)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$
x_0	1.1275	0.11971			
			0.871053		
x_1	1.1503	0.13957		-0.438935	
			0.850862		0.419110
x_2	1.1735	0.15931		-0.409723	
			0.831646		
x_3	1.1972	0.17902			

Нагласити број децимала! (+1)

$L_3(1.16) = 0.11971 + 0.871053(1.16-1.1275) + (-0.438935)(1.16-1.1275)(1.16-1.1503)$
$+ 0.419110(1.16-1.1275)(1.16-1.1503)(1.16-1.1735) = 0.14788$

Њутнов интерполациони полином са коначним разликама

Нека су чворови еквидистантни, тј. $h = x_i - x_{i-1}$ $i=\overline{1,n}$, тј имамо равномерно распоређене чворове: $x_i = x_0 + ih$.

Уводимо коначне разлике: (унапред)

- реда 1: $\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$
- ред 2: $\Delta^2 f(x_i) = \Delta(f(x_{i+1}) - f(x_i)) = \Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i) = f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)$
- реда n: $\Delta^n f(x_i) = \Delta^{n-1} f(x_{i+1}) - \Delta^{n-1} f(x_i) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} f_{i+n-j}$

Ознака: $f(x_i) = f_i$; Таблица

Особина: $f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \dfrac{\Delta^k f_i}{h^k k!}$

I Њутнов интерполациони полином (унапред)

Нека је $x \in (x_0, x_1)$ или $x < x_0$, тј x_0 је најближи чвор тачки x.

Уводимо променљиву q: $x = x_0 + qh \iff q = \dfrac{x - x_0}{h}$. $(x - x_i = h(q-i))$

Полином са подељеним разликама се сада може написати у облику:

$$P_n^I(x) = P_n^I(x_0 + qh) = f(x_0) + \Delta f_0 q + \Delta^2 f_0 q(q-1)\frac{1}{2!} + \Delta^3 f_0 q(q-1)(q-2)\frac{1}{3!} + \dots + \Delta^n f_0 q(q-1)\cdots(q-n+1)\frac{1}{n!}$$

II Њутнов интерполациони полином (уназад)

Нека је x_n чвор најближи тачки x и нека је $x = x_n + qh$, тј. $q = \dfrac{x - x_n}{h}$ $(x - x_i = h(q+n-i))$

Полином са подељеним разликама се сада може написати у облику:

$$P_n^{II}(x) = P_n^{II}(x_n + qh) = f_n + \Delta f_{n-1} q + \Delta^2 f_{n-2} \frac{q(q+1)}{2!} + \dots + \Delta^n f_0 \frac{q(q+1)\cdots(q+n-1)}{n!}$$

Грешка:

$$|R_n(x)| \le \frac{\max|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|$$

Користимо везе: $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = f[x, x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{\Delta^{n+1} f(x)}{h^{n+1}(n+1)!}$ и добијамо

$$|R_n(x)| \le \frac{|\Delta^{n+1} f|}{(n+1)!\, h^{n+1}} |\omega_{n+1}(x)| = \begin{cases} \frac{|\Delta^{n+1} f|}{(n+1)!} |q(q-1)\cdots(q-n)| & \text{I Њутн} \\ \frac{|\Delta^{n+1} f|}{(n+1)!} |q(q+1)\cdots(q+n)| & \text{II Њутн} \end{cases}$$

За $|\Delta^{n+1} f|$ се узима $\max_i |\Delta^{n+1} f_i| + \underbrace{2^{n+1}\varepsilon}_{\text{грешка рачуна}}$.

① Функција је задата таблично. Израчунати $f(18)$, $f(12)$, $f(53)$ и оценити грешку.

НАПОМЕНУТИ ДА БР. ДЕЦИМАЛА ОСТАЈЕ ИСТИ!

x_i	$y_i = f_i$	$\Delta f_i \cdot 10^{-4}$	$\Delta^2 f_i \cdot 10^{-4}$	$\Delta^3 f_i \cdot 10^{-4}$	$\Delta^4 f_i \cdot 10^{-4}$
15	0.2588				
		0.0832 / 832			
20	0.3420		-0.0026 / -26		
		0.0806 / 806		-0.0006 / -6	
25	0.4226		-32		0
		0.0774 / 774		-0.0006 / -6	
30	0.5000		-0.0038 / -38		0
		0.0736 / 736		-0.0006 / -6	
35	0.5736		-0.0044 / -44		0.0001 / 1
		0.0692 / 692		-0.0005 / -5	
40	0.6428		-0.0049 / -49		0
		0.0643 / 643		-0.0005 / -5	
45	0.7071		-0.0054 / -54		0.0002 / 2
		0.0589 / 589		-0.0005 / -3	
50	0.7660		-0.0057 / -57		
		0.0532 / 532			
55	0.8192				
	$\varepsilon = \frac{1}{2}\cdot 10^{-4}$	$2\varepsilon = 10^{-4}$	$4\varepsilon = 2\cdot 10^{-4}$	$8\varepsilon = 4\cdot 10^{-4}$	$16\varepsilon = 8\cdot 10^{-4}$

$$\frac{1}{5}\sum_{i=0}^{4} |\Delta^4 f_i| = \frac{3}{5}\cdot 10^{-4} < 8\cdot 10^{-4}$$

Средња вредност по модулу колоне $\Delta^4 f_i$ је мања од границе апсолутне грешке за ту колону, нема сврхе користити те вредности, па их избацујемо.

$\boxed{x=18} \in (15, 20) \Rightarrow$ I Њутнов полином: $q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{18-15}{5} = 0.6$

$$P_3^{I}(18) = f_0 + \Delta f_0 q + \frac{1}{2!}\Delta^2 f_0 q(q-1) + \frac{1}{3!}\Delta^3 f_0 q(q-1)(q-2) =$$

$$= 0.2588 + 0.0832\cdot 0.6 + \frac{1}{2}(-0.0026)\cdot 0.6(0.6-1) + \frac{1}{6}(-0.0006)\cdot 0.6(0.6-1)(0.6-2)$$

$$= 0.3090$$

$$|R_3(x)| \le \frac{|\Delta^4 f|}{4!}\,|q(q-1)(q-2)(q-3)| = \frac{|18\cdot 10^{-4}+2\cdot 10^{-4}|}{4!}\,|0.6\,(0.6-1)(0.6-2)(0.6-3)|$$
$$= 0.34\cdot 10^{-4}$$

грешка колоне

највећ вредност модулу из колоне $\Delta^4 f$

домаћи

$$\boxed{x=12} \Rightarrow q = \frac{x-x_0}{h} = \frac{12-15}{5} = -0.6$$

$$P_3^{I}(12) = 0.2588 - 0.6\cdot 0.0832 - \frac{1}{2}(0.0026)\,0.6\cdot 1.6 + \frac{1}{6}(-0.0006)(-0.6)(-1.6)(-2.6) =$$
$$= 0.2079$$

$$|R_3(12)| \le \frac{|18\cdot 10^{-4}+2\cdot 10^{-4}|}{4!}\,|-0.6(-1.6)(-2.6)(-3.6)| \le 0.374\cdot 10^{-3}$$

$\boxed{x=53} \in (50, 55)$ – II Њутн

$$q = \frac{x-x_n}{h} = -\frac{2}{5} = -0.4$$

$$P_3^{II}(53) = f_n + \Delta f_{n-1} q + \Delta^2 f_{n-2}\frac{q(q+1)}{2!} + \Delta^3 f_{n-3}\frac{q(q+1)(q+2)}{3!}$$
$$= 0.8192 + 0.0532(-0.4) + \frac{1}{2}(-0.0057)(-0.4)\cdot 0.6 + \frac{1}{6}(-0.0003)(-0.4)(0.6)\,1.6$$
$$= 0.7986$$

$$|R_3^{II}(53)| \le \frac{|2\cdot 10^{-4}+8\cdot 10^{-4}|}{4!}\,|-0.4\cdot 0.6\cdot 1.6\cdot 2.6| = 0.416\cdot 10^{-4}$$

Инверзна интерполација

Нека је $y=f(x)$ задата таблицом у $n+1$ тачки.

Монотона ф-ја има инверз! (на сегменту)

Ако је таблица монотона претпостављамо да је и f монотона.

Ако таблица није монотона избацујемо оне тачке које кваре монотоност.

① Користећи Њутнов инт. полином одредити вредности за x т.ј. $f(x)=0.25$, $f(x)=0.8$, ако је f задата таблично.

$f(x)=0.25$ – за домаћи

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
10	0.1763			
		0.1877		
20	0.3640		0.0257	
		0.2134		0.0226
30	0.5774		0.0483	
		0.2617		
40	0.8391			
	$\varepsilon = \frac{1}{2}10^{-4}$	$2\varepsilon = 10^{-4}$	$4\varepsilon = 2\cdot 10^{-4}$	$8\varepsilon = 4\cdot 10^{-4}$