# Обратан проблем грешке

Дата је граница грешке ф-је $y=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ тј.

$$\Delta y^* \le M.$$

Задатак: Одредити тачност са којом треба задати бројеве $x_1^*,\dots,x_n^*$ тако да грешка ф-је не прелази дозвољену вредност, тј. $\Delta y^* \le M$.

Задатак је једнозначно решив само за ф-ју једног аргумента:

$$\Delta y^* \le \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*,\dots,x_n^*)\right| \cdot \Delta x_i^*$$

За $n=1$: $\Delta y^* = |f'(x^*)|\,\Delta x^* \iff \Delta x^* = \dfrac{\Delta y^*}{|f'(x^*)|} \le \dfrac{M}{|f'(x^*)|}$, $f'(x^*)\neq 0$.

За $n\ge 2$ користимо један од следећих принципа:

① Принцип једнаких утицаја

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*,\dots,x_n^*)\right|\Delta x_1^* = \dots = \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1^*,\dots,x_n^*)\right|\Delta x_n^*.$$

$$\Rightarrow \Delta y^* = n\cdot\left|\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1^*,\dots,x_n^*)\right|\Delta x_k^* \Rightarrow \Delta x_k^* = \frac{\Delta y^*}{n\cdot\left|\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1^*,\dots,x_n^*)\right|},\ k=1,2,\dots,n$$

② Принцип једнаких апсолутних грешака:

$$\Delta x_1^* = \dots = \Delta x_n^*$$

$$\Rightarrow \Delta y^* = \Delta x_k^* \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*,\dots,x_n^*)\right| \Rightarrow \Delta x_k^* = \frac{\Delta y^*}{\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*,\dots,x_n^*)\right|},\ k=1,\dots,n$$

③ Принцип једнаких релативних грешака:

$$R x_1^* = \dots = R x_n^*$$

$$\Delta y^* = \sum_{i=1}^{n}\left|x_i^*\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*,\dots,x_n^*)\right|\frac{\Delta x_i^*}{|x_i^*|} = R x_k^* \sum_{i=1}^{n}\left|x_i^*\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*,\dots,x_n^*)\right|$$

$$\Rightarrow \Delta x_k^* = \frac{|x_k^*|\,\Delta y^*}{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^*\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*,\dots,x_n^*)\right|},\ k=1,\dots,n$$

Пример: Дата је ф-ја $f(x_1,x_2,x_3)=\frac{x_1+x_2^2}{x_3}$ и приближне вредности $x_1^*=3.2835$, $x_2^*=0.93221$, $x_3^*=1.13214$. Користећи принцип једнаких утицаја одредити са којом тачношћу треба задати бројеве $x_1^*, x_2^*, x_3^*$ тако да је $Af^* \le \frac{1}{2}10^{-3}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{1}{x_3}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=2\frac{x_2}{x_3}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}=-\frac{x_1+x_2^2}{x_3^2}$$

$$Ax_1^* \le \frac{Ay^*}{n\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*,x_2^*,x_3^*)\right|} \le \frac{\frac{1}{2}\cdot 10^{-3}}{3\cdot\frac{1}{1.13214}} = 0.19\cdot 10^{-3}$$

$$Ax_2^* = \frac{0.5\cdot 10^{-3}}{3\cdot 2\cdot\frac{0.93221}{1.13214}} = 0.1\cdot 10^{-3}$$

$$Ax_3^* = \frac{0.5\cdot 10^{-3}}{3\cdot\frac{3.2835+0.93221^2}{1.13214^2}} = 0.052\cdot 10^{-3}$$

## Интерполација

Нека је $y=f(x)$, $D_f \subseteq R$, ф-ја једне променљиве чији експлицитан израз није познат, већ су познате вредности ф-је у тачкама $x_0, x_1, \dots, x_n \in D_f$, $x_i < x_{i+1}$, $i=\overline{0,n-1}$, $y_i=f(x_i)$, $i=\overline{0,n}$.

Како одредити вредност ф-је $f$ у произвољној тачки $x \in D_f$?

Потребно је одредити ф-ју $g(x)$ која ће бити блиска ф-ји $f$ у неком смислу, тј. апроксимирати ф-ју $f$.

Линеарна апроксимација: $g(x)=\sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x)$,

где су $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$ лин. незав. ф-је, а $c_i$ коеф. које треба одредити. Ако се они одређују из услова:

$$f(x_i)=g(x_i), \quad i=\overline{0,n},$$

онда се такав облик апроксимације зове интерполација.

## Лагранжов интерполациони полином

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \Big( \prod_{\substack{j=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \Big) f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i)$$

$l_i$ - помоћни (основни, базни полиноми)

* $\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ - пол. ст. $n+1$

$$\omega_{n+1}'(x) = \sum_{k=0}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}} (x-x_j), \quad \omega_{n+1}'(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)$$

Други облик Лагранжовог инт. пол:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega_{n+1}(x) f(x_i)}{(x-x_i)\,\omega_{n+1}'(x_i)}.$$

Грешка: $R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \omega_{n+1}(x)$,

$\xi$ је тачка која припада минималном интервалу који садржи $x, x_0, \ldots, x_n$.

- Ако $x \in [x_0, x_n]$ - интерполација
- Ако $x \notin [x_0, x_n]$ - екстраполација (велика грешка)

Када $f \in C^{n+1}$ користимо оцену:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|, \quad M_{n+1} = \max_{x\in[x_0,x_n]} |f^{(n+1)}(x)|$$

Ако није дат аналитички израз ф-је $f$, грешку не можемо проценити.

1. Конструисати Лагранжов интерполациони полином $L_2(x)$ за ф-ју $f(x) = \sqrt{x}$. Чворови интерполације су $x_0 = 100$, $x_1 = 121$, $x_2 = 144$. Израчунати $L_2(115)$ и проценити грешку.

| $x_i$ | 100 | 121 | 144 |
|---|---|---|---|
| $y_i$ | 10 | 11 | 12 |

$$L_2(x) = \sum_{i=0}^{2} \Big( \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{2} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \Big) f(x_i)$$

Scanned with CamScanner

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

$$L_2(x)=\frac{(x-121)(x-144)}{(100-121)(100-144)}\cdot 10+\frac{(x-100)(x-144)}{(121-100)(121-144)}\cdot 11+\frac{(x-100)\ldots}{(144-100)(144-121)}\cdot 12$$

У облику $L_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$, на 5 децимала:

$L_2(x)=4.14568+0.0672x+0.00009x^2 \to L_2(115)=10.72023$ (*) до краја прво $x_2$

$$L_2(115)=\frac{-6\cdot(-29)}{-21\cdot(-44)}\cdot 10+\frac{15(-29)}{21(-23)}\cdot 11+\frac{15(-6)}{44\cdot 23}\cdot 12=\frac{1740}{924}+\frac{4785}{483}-\frac{1080}{1012}=$$

$$=10.72275551$$

Грешка: $|R_2(x)|\leq\frac{M_3(x)}{3!}|\omega_3(x)|=\frac{M_3(x)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

$f(x)=\sqrt{x}$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$, $f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-5/2}$

Максимум $f'''(x)$ на $[100,144]$? $f^{(4)}=-\frac{15}{16}x^{-7/2}=-\frac{15}{16}\frac{1}{\sqrt{x^7}}\neq 0$,

али $f^{(4)}<0$ на $[100,144]$, тј. $f^{(3)}(x)$ монотоно опада на $[100,144]$

$\to \max\limits_{x\in[100,144]}|f^{(3)}(x)|=|f^{(3)}(100)|=\frac{3}{8}\sqrt{100^{-5}}=\frac{3}{8}\cdot 10^{-5}$

$$|R_2(115)|\leq\frac{3/8\, 10^{-5}}{6}|(115-100)(115-121)(115-144)|=163.125\cdot 10^{-5}=0.16\cdot 10^{-2}$$

Упоредимо резултат (*) са тачним: $|L_2(115)-\sqrt{115}|=0.35\cdot 10^{-2}$ што је веће од границе за $|R_2(x)|$ $\Rightarrow$ Коефицијенте је требало рачунати на више децимала.

$\Rightarrow$ Избегавати рачунање коеф. (заокруживање)!

Тм. Ако је $f$ монотона на $[a,b]$ тада се максимум модула ф-је $f$ достиже у једном од крајева сегмента.

Ролова тм. Нека је $f:[a,b]\to R$ непрекидна на $[a,b]$, диференцијабилна на $(a,b)$ и $f(a)=f(b)$. Тада постоји тачка $c\in(a,b)$ т.д. $f'(c)=0$.

# Матрица метода; Стабилизација рачунске грешке

$$\begin{bmatrix} x-x_0 & x_0-x_1 & x_0-x_2 & \cdots & x_0-x_n \\ x_1-x_0 & x-x_1 & x_1-x_2 & & x_1-x_n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ x_n-x_0 & x_n-x_1 & x_n-x_2 & & x-x_n \end{bmatrix} \begin{matrix} D_0 \\ D_1 \\ \vdots \\ D_n \end{matrix}$$

$$L_n(x) = \omega_{n+1}(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}$$

$\omega_{n+1} = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$ - елем. са дијагонале

$(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i) = D_i$

① $$\begin{bmatrix} 115-100 & 100-121 & 100-144 \\ 121-100 & 115-121 & 121-144 \\ 144-100 & 144-121 & 115-144 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -21 & -44 \\ 21 & -6 & -23 \\ 44 & 23 & -29 \end{bmatrix}$$

$\omega_3(115) = (115-100)(115-121)(115-144) = 15(-6)(-29) = 2610$

$D_0 = 13860$, $D_1 = 2898$, $D_2 = -29348$

$$L_2(115) = 2610\left(\frac{10}{13860} + \frac{11}{2898} - \frac{12}{29348}\right) =$$

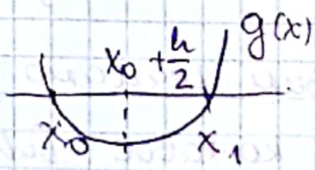
$= 10.7227555056$

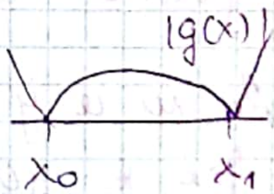
$= 10.72276$

$L_2(115) = 10.723 \pm 0.2 \cdot 10^{-2}$

② Нека је $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$. Доказати да се ф-ја $f(x)$ на интервалу $[a,b]$ може табелирати са кораком $h \le \sqrt{\frac{8\varepsilon}{M_2}}$ т.д. грешка линеарне интерполације не буде већа од $\varepsilon$.

$|R_1(x)| \le \frac{M_2}{2!}|(x-x_0)(x-x_1)|$




$x_0,\ x_1 = x_0 + h$, $h$-корак

$|R_1(x)| \le \frac{M_2}{2!}|g(x)| \le \varepsilon$, $\forall x\in[x_0,x_1]$, $g(x) = (x-x_0)(x-x_1) = (x-x_0)(x-x_0-h)$

Односно $\frac{M_2}{2!}\max\limits_{x\in[x_0,x_1]}|g(x)| \le \varepsilon$. Како ф-ја $g(x)$ достиже минимум у тачки $x = x_0 + \frac{h}{2}$ на $[x_0,x_1]$, то ф-ја $|g(x)|$