Приближне вредности; апсолутна и релативна грешка

Нумерички подаци које добијамо као резултате експеримента су ретко потпуно тачни. Бројеви се заокружују, па су и резултати математичких операција над њима заправо приближне вредности. У нумеричким израчунавањима не треба користити више цифара него што је неопходно. Резултате треба заокруживати тако да свака цифра носи корисну информацију, а поред тога треба знати и колика је грешка начињена таквим заокруживањем.

* Грешка заокруживања (грешка рачуна)

Нека је x тачна вредност броја, а x^* његова приближна вредност.

Апсолутна грешка Δx^*, приближног броја x^* дефинише се са:

$$\Delta x^* = |x - x^*|.$$

Како се ова вредност у пракси тешко одређује (јер не знамо тачну вредност нпр. $\sqrt{2}$) уводи се граница апсолутне грешке Ax^*:

$$\Delta x^* = |x - x^*| \le Ax^*$$

Важи: $x = x^* \pm Ax^* \iff x^* - Ax^* \le x \le x^* + Ax^*.$

пример: $x = \sqrt{2} = 1.4142135$

$\bar{x}^* = 1.41$

$|x - x^*| = 0.004213 \le 0.005 = 0.5 \cdot 10^{-2}$

Релативна грешка δx^*: $\delta x^* = \dfrac{Ax^*}{|x|} \approx \dfrac{Ax^*}{|x^*|} \le Rx^*$, Rx^* - граница релативне грешке

Релативна грешка даје тачније информације од апсолутне:

$x_1 = 1.001 \quad x_1^* = 1,00 \quad \Delta x_1^* = 0.001 \quad \delta x_1^* = \dfrac{0.001}{1.001} \approx 0.001$

$x_2 = 0.009 \quad x_2^* = 0.01 \quad \Delta x_2^* = 0.001 \quad \delta x_2^* = \dfrac{0.001}{0.009} = 0.111$

Значајне и сигурне цифре

Сваки број x можемо представити следећим изразом

$$x = \pm(\alpha_1 \cdot 10^n + \alpha_2 10^{n-1} + \dots + \alpha_m \cdot 10^{n-m+1} + \dots), \quad \alpha_i \in \{0,1,2,\dots,9\}, \alpha_1 \neq 0.$$

Нека је x^* његова приближна вредност добијена одбацивањем $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots$ и заокруживањем цифре α_m:

$$x^* = \pm(\alpha_1 \cdot 10^n + \alpha_2 10^{n-1} + \dots + \alpha_{m-1} 10^{n-m+2} + \beta_m 10^{n-m+1}).$$

Значајне цифре приближног броја су све цифре његовог записа почевши од прве ненула цифре са леве стране:

$x^* = 0.00\underline{32017}$

$x^* = 0.\underline{32070}$ - последња нула је значајна јер указује на тачност

Значајна цифра α_k приближног броја x^* је сигурна цифра ако важи:

$$Ax^* \le \omega \cdot 10^{n-k+1}, \quad 0 < \omega \le 1.$$

Ако је $0 < \omega \le 1/2$ онда кажемо да је α_k сигурна у ужем смислу, а ако је $1/2 < \omega \le 1$ онда је сигурна у ширем смислу.

- пример: Нека је $x = 99,98$, а $x^* = 100.00$. Одредити сигурне цифре.

посматрамо овај степен

$$\Delta x^* = Ax^* = |100.00 - 99.98| = 0.2 \cdot 10^{-1}$$

Декадном месту 10^{-1} у броју x^* одговара прва нула иза зареза.

Да ли важи $Ax^* \le \omega 10^{-1}$

$0.2\, 10^{-1} \le \omega \cdot 10^{-1}$ за неко $\omega \in (0,1]$? Да!

$\Rightarrow$ Сигурна је у ширем смислу, а како важи и за $\omega = 1/2$:

$0.2\, 10^{-1} \le 0.5\, 10^{-1}$,

сигурна је и у ужем смислу. Све цифре испред су такође сигурне у ужем смислу, јер:

$$0.2 \cdot 10^{-1} \le 0.5 \cdot 10^{-1} \le 0.5 \cdot 10^{0} \le 0.5 \cdot 10^{1} \le 0.5\, 10^{2}$$

Да ли је последња нула сигурна цифра?

$0.2\,10^{-1} \leq \omega \cdot 10^{-2}$? Ово не важи за $\omega \in (0,1] \Rightarrow$ Није сигурна ни у ужем, а ни у ширем смислу.

Правило заокруживања

Бројеве заокружујемо тако да приликом одбацивања значајних цифара, последња цифра која остаје буде сигурно у ужем смислу.

Релативна грешка указује на број сигурних цифара. Нека је m укупан број сигурних цифара, и β_m је последња сигурна цифра. Тада је:

$$\omega\, 10^{n-m} \leq Ax^* \leq \omega\, 10^{n-m+1} \quad / : |x^*|$$

$$\frac{\omega \cdot 10^{n-m}}{\alpha_1 10^n + \dots + \beta_m 10^{n-m+1}} \leq Rx^* \leq \frac{\omega\, 10^{n-m+1}}{\alpha_1 10^n + \dots + \beta_m 10^{n-m+1}}$$

$$\frac{\omega \cdot 10^{n-m}}{\alpha_1 \cdot 10^n + 10^n} \leq Rx^* \leq \frac{\omega\, 10^{n-m+1}}{\alpha_1 \cdot 10^n}$$

Коначно: $$\frac{\omega}{(\alpha_1+1)10^m} \leq Rx^* \leq \frac{\omega}{\alpha_1 \cdot 10^{m-1}}.$$

m-бр

Пример: Заокружити бројеве на три значајне цифре:

1) $x = 0.31691$

$x^* = 0.316 \quad Ax^* = 0.91\, 10^{-3} < 0.5 \cdot 10^{-3}$ НЕ!

$x^* = \underline{0.317} \quad Ax^* = 0.9 \cdot 10^{-4} < 0.5 \cdot 10^{-3}$ ДА!

Ако је прва одбачена цифра већа од 5 $(\alpha_{m+1} > 5)$ онда је $\beta_m = \alpha_m + 1$.

2) $x = 53.543 \qquad x^* = 53.5$

Ако је прва одбачена цифра мања од 5 $(\alpha_{m+1} < 5)$ онда је $\beta_m = \alpha_m$.

3) $x = 21.051$, $x^* = 21.1 \qquad Ax^* = 0.049 < 0.5 \cdot 10^{-1}$

Ако је $\alpha_{m+1} = 5$ и иза α_{m+1} имамо цифре различите од 0, онда је $\beta_m = \alpha_m + 1$.

4) $x = 1.215 \quad x^* = 1.22$.

$x = 3.225 \quad x^* = 3.22$

Ако је $\alpha_{m+1} = 5$ и после α_{m+1} нема цифара различитих од 0

онда: 1) ако је α_m непаран број $\beta_m = \alpha_m + 1$,

2) ако је α_m паран број $\beta_m = \alpha_m$.

Грешке приближних вредности функција

Нека је дата ф-ја више аргумената: $y = f(x_1, x_2, .., x_n)$ дефинисана у некој области G својих аргумената $x_1, x_2, .., x_n$. Претпоставимо да су непознате тачне вредности параметара $x_1, x_2, .., x_n$, а да су познате приближне вредности $x_1^*, x_2^*, .., x_n^*$, као и границе апсолутних грешака $|x_i - x_i^*| \leq Ax_i^*$, $i = 1, 2, .., n$. Као резултат добијамо вредност $y^* = f(x_1^*, x_2^*, .., x_n^*)$.

Апсолутну грешку дефинишемо са: $x = (x_1, x_2, .., x_n)$

$$\Delta y^* = |f(x_1, x_2, .., x_n) - f(x_1^*, x_2^*, .., x_n^*)| \leq Ay^* = \sup_{x \in G} |y(x) - y^*|,$$

$$G = \{ (x_1, x_2, .., x_n) \mid |x_i - x_i^*| \leq Ax_i^*, i = \overline{1, n} \}.$$

Претпоставимо да је f непрекидно диференцијабилна ф-ја једне променљиве, тада је:

$$\Delta f^* = |f(x) - f(x^*)| = \frac{|f(x) - f(x^*)|}{|x - x^*|} \cdot |x - x^*|$$

(x^*, x)

На основу Лагранжове теореме, постоји тачка $\xi \in (x, x^*)$ т.д. $|f(x) - f(x^*)| = |f'(\xi)| |x - x^*|$. $\quad (\exists \theta \in [0,1] \;\; \xi = x^* + \theta(x - x^*))$

Сада је:

$$\Delta f^* \leq |f'(\xi)| \cdot Ax^*.$$

У пракси уместо ξ узимамо x^*, тј. $\Delta f^* \leq |f'(x^*)| Ax^*$

За функције више променљивих када су апсолутне грешке аргумената дате користимо линеарну оцену апсолутне грешке:

$$\Delta f^* \le \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*,\dots,x_n^*)\right| \Delta x_i^* = \Delta f^*$$

- Линеарна оцена релативне грешке: R_x^*

$$Rf^* = \frac{\Delta f^*}{|f^*|} = \frac{1}{|f^*|} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*,\dots,x_n^*)\right| \Delta x_i^* \frac{|x_i^*|}{|x_i^*|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left|x_i^* \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*,\dots,x_n^*)\right| R_{x_i}^*}{|f^*|}$$

Апсолутна грешка збира / разлике

Нека је $S(x_1,x_2,\dots,x_n) = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \dots + \mu_n x_n$, $\mu_i = \pm 1$, $x_i > 0$, $i=\overline{1,n}$

и нека је $x_i = x_i^* \pm \Delta x_i^*$, $i=\overline{1,n}$.

$S^* = \mu_1 x_1^* + \mu_2 x_2^* + \mu_3 x_3^* + \dots + \mu_n x_n^*$ - приближна вредност

$$\Delta S^* = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial S}{\partial x_i}(x_1^*,x_2^*,\dots,x_n^*)\right| \Delta x_i^* = \sum_{i=1}^{n} |\mu_i| \Delta x_i^* = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^*$$

Дакле, апсолутна грешка збира/разлике једнака је збиру апсолутних грешака аргумената. Осим тога, највећи утицај на грешку има број са најмањим бројем децимала. Зато нема сврхе задржавати много више цифара код осталих бројева.

Пример: Сабрати приближне бројеве:

0.8956, 1.735, 4365, 125.8, 12.34, 0.0456

$\frac{1}{2}10^{-4}$, $\frac{1}{2}10^{-3}$, $\frac{1}{2}10^{-1}$, $\frac{1}{2}10^{-1}$, $\frac{1}{2}10^{-2}$, $\frac{1}{2}10^{-4}$

Ако нам није дата апсолутна грешка, подразумевамо да је последња цифра сигурна у ужем смислу, тј. $\omega = 1/2$.

$$S^* = 0.8956 + 1.735 + \underbrace{4365 + 125.8}_{\text{највећа апсолутна грешка}} + 12.34 + 0.0456$$

Заокружујемо бројеве на једну децималу више од броја децимала сабирка који има највећу апсолутну грешку (у супротном ће грешка бити много велика).

Scanned with CamScanner

$S^{**} = 0.90 + 1.74 + 436.5 + 125.8 + 12.34 + 0.05 = 577,33$

На крају резултат заокружимо на онолико децимала колико их има број са највећом апсолутном грешком

$S^{***} = 577,3$

$AS^{***} = |S^{***} - S| \leq |S^{***} - S^{**}| + AS^{**}; \quad AS^{**} \leq \sum |x_i^{**} - x_i^*| + \sum |x_i^* - x_i|$

$= 0.03 + 0.0044 + 0.005 + 0.0034 + \ldots$

$= 0.03 + 0.0138 + \frac{1}{2}10^{-1} + \frac{1}{2}10^{-1} + \frac{1}{2}10^{-1} + \frac{1}{2}10^{-1} + \frac{1}{2}10^{-2} + \frac{1}{2}10^{-4} = 0.1494$

$S = 577,3 \pm 0.15$

Релативна грешка збира

$S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $x_i > 0$ или су x_i истог знака

$$RS^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i^* \frac{\partial S}{\partial x_i}(x_1^*, \ldots, x_n^*)|}{|S^*|} Rx_i^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i^*|}{|S^*|} Rx_i^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i^*|}{|x_1^* + \ldots + x_n^*|} Rx_i^* =$$

$$= \frac{1}{|S^*|}\left(Rx_1^*|x_1^*| + Rx_2^*|x_2^*| + \ldots + Rx_n^*|x_n^*|\right) \leq \max_{1 \leq i \leq n} Rx_i^* \frac{1}{|S^*|}|x_1^* + \ldots + x_n^*|$$

$$\Rightarrow \min_i Rx_i^* \leq RS^* \leq \max_i Rx_i^*$$

Релативна грешка разлике

Нека је $x_1, x_2 > 0$, $D = x_1 - x_2$, $D^* = x_1^* - x_2^*$.

$$RD^* = \sum_{i=1}^{2} \left|x_i^* \frac{\partial D}{\partial x_i}(x_1^*, x_2^*)\right| \frac{1}{|D^*|} Rx_i^* = \frac{x_1^*}{|x_1^* - x_2^*|} Rx_1^* + \frac{x_2^*}{|x_1^* - x_2^*|} Rx_2^*$$

Ако су x_1^* и x_2^* јако блиски тада ће се јавити велика грешка у рачуну!

Пример

$x_1 = \sqrt{3.01} = 1.7349352 \pm 0.5\,10^{-7}$

$x_2 = \sqrt{3} = 1.7320508 \pm 0.5\,10^{-7}$

Ако рачунамо са 3 сигурне (значајне) цифре: $1.73 - 1.73 = 0$, а са 4: $1.735 - 1.732 = 0.003$

$\Rightarrow$ Губимо значајне цифре! Желимо да добијемо резултат са истим бројем значајних цифара као и аргументи (тј. најмање тачан аргумент). То можемо постићи рационали-сањем.

Scanned with CamScanner

$$\sqrt{3.01}-\sqrt{3} = \frac{3.01-3}{1.735+1.732} = \frac{0.01}{0.0033} \approx 0.00288$$

$\Rightarrow$ Избегавати дељење!

Грешка производа

Нека је $P = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$, $x_i = x_i^* \pm Ax_i^*$, $i=1,2,\ldots,n$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial P}{\partial x_i} = x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_{i-1} x_{i+1} \cdot \ldots \cdot x_n = \frac{P}{x_i}$$

$$AP^* = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial P}{\partial x_i}(x_1^*,\ldots,x_n^*)\right| Ax_i^* = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{P(x_1^*,\ldots,x_n^*)}{x_i^*}\right| Ax_i^* = |P^*| \sum_{i=1}^{n} \frac{Ax_i^*}{|x_i^*|} =$$

$$= |P^*| \sum_{i=1}^{n} Rx_i^*$$

$$RP^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left|x_i^* \frac{\partial P}{\partial x_i}(x_1^*,\ldots,x_n^*)\right|}{|P^*|} Rx_i^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left|x_i^* \frac{P^*}{x_i^*}\right|}{|P^*|} Rx_i^* = \sum_{i=1}^{n} Rx_i^*,$$ или боље

$$RP^* = \frac{AP^*}{|P^*|} = \sum_{i=1}^{n} Rx_i^*.$$

Како је линеарна оцена релативне грешке производа једнака суми релативних грешака чинилаца највећи утицај на грешку ће имати онај чинилац који има највећу релативну грешку, тј. онај број који има најмање сигурних цифара. Дакле, нема сврхе користити све сигурне цифре чинилаца који имају већу тачност. Задржаваћемо једну или две сигурне цифре више од броја сигурних цифара чиниоца који има најмање сигурних цифара.

Пример: Израчунати производ приближних бројева:

$x_1^* = 3.452$, $x_2^* = 8.9$, $x_3^* = 9.0585$, $x_4^* = 0.0012$

$P^* = x_1^* \cdot x_2^* \cdot x_3^* \cdot x_4^* = 3.452 \cdot 8.9 \cdot 9.0585 \cdot 0.0012$ – резултат ће имати највише 2 сигурне цифре

$P^{**} = 3.45 \cdot 8.9 \cdot 9.06 \cdot 0.0012 = 0.33382476$

$P^{***} = 0.33$

$AP^{***} = AP^{**} + |P^{***} - P^{**}|$

$$AP^{**} = |P^{**}| \sum_{i=1}^{n} \frac{Ax_i^{**}}{|x_i^{**}|} = 0.33382476 \left(\frac{0.5 \cdot 10^{-3} + 0.002}{3.457} + \frac{0.5 \cdot 10^{-1}}{8.9} + \frac{0.5 \cdot 10^{-4} + 0.0015}{9.06} + \frac{0.5 \cdot 10^{-4}}{0.0012} \right) = 0.016$$

$P^{***} = 0.016 + 0.0038 \le 0.02$

$P = 0.33 \pm 0.02$

Грешка количника приближних бројева

Нека је $Q = \frac{x_1}{x_2}$, $x_2 \neq 0$; $x_i = x_i^* \pm Ax_i^*$, $i = 1,2$ и $Q^* = \frac{x_1^*}{x_2^*}$, $x_2^* \neq 0$

$$AQ^* = \sum_{i=1}^{2} \left| \frac{\partial Q}{\partial x_i}(x_1^*, x_2^*) \right| Ax_i^* = \frac{1}{x_2^*} Ax_1^* + \frac{|x_1^*|}{|x_2^*|^2} Ax_2^* = \frac{|x_2^*| Ax_1^* + |x_1^*| Ax_2^*}{|x_2^*|^2}.$$

$$RQ^* = \sum_{i=1}^{2} \frac{\left| x_i^* \frac{\partial Q}{\partial x_i}(x_1^*, x_2^*) \right|}{|Q^*|} Rx_i^* = \frac{AQ^*}{|Q^*|} = \frac{|x_2^*| Ax_1^* + |x_1^*| Ax_2^*}{|x_2^*|^2} \cdot \frac{|x_2^*|}{|x_1^*|} =$$

$$= \frac{Ax_1^*}{|x_1^*|} + \frac{Ax_2^*}{|x_2^*|} = Rx_1^* + Rx_2^*$$

Пример: Одредити површину ваљка, ако је $r = 3.7 \pm 0.5 \cdot 10^{-1}$, $\pi = 3.142 \pm 0.5 \cdot 10^{-3}$, $H = 8.2 \pm 0.03 = 8.2 \pm 0.3 \cdot 10^{-1}$ и одредити границу апсолутне и релативне грешке.

$P = 2r^2\pi + 2r\pi H = 2r\pi(r + H)$ (Имамо 2 сигурне цифре ⇒ резултат не може имати више од 2 сигурне цифре.)

$P^* = 2 \cdot 3.7 \cdot 3.142\,(3.7 + 8.2) = 276.68452$

$P^{**} = 2 \cdot 3.7 \cdot 3.14 \cdot 11.9 = 276{,}5084$

$P^{***} = 280$

$AP^{***} = AP^{**} + |P^{***} - P^{**}|$ $\qquad R(r+H) = \frac{A(r+H)}{r+H}$

$AP^{**} = |P^{**}| \left(Rr^{**} + R\pi^{**} + R(r+H)^{**} \right) =$

$$= 276.5084 \left(\frac{0.5 \cdot 10^{-1}}{3.7} + \frac{0.5 \cdot 10^{-3} + 0.002}{3.14} + \frac{0.05 + 0.03}{3.7 + 8.2} \right) = 5.81563$$

$AP^{***} = 5.81563 + 3.49160 = 9.307 < 10$

$P = 280 \pm 10 = P^{***} + AP^{***}$

$RP^{***} = \frac{AP^{***}}{|P^{***}|} =$

Домаћи: Одредити запремину. $\qquad V = 350 \pm 14$

$V = r^2\pi H$

$V^{**} = (3.7)^2 \, 3.14 \cdot 8.2 = 352{,}4902 \Rightarrow V^{***} = 350$

$$AV^{***} = AV^{**} + |V^{***} - V^{**}| = |V^{**}| \left(2 \cdot \frac{0.05}{3.7} + \frac{0.5 \cdot 10^{-3} + 0.002}{3.14} + \frac{0.03}{8.2} \right) = 11.097 +$$

Scanned with CamScanner