

Докторске студије

Студијски програм *Вероватноћа и статистика*

Циљеви: Оспособљавање студента за развој и примену научних и стручних достигнућа из области вероватноће и статистике и оспособљавање за креативан рад

Врста студија: Докторске академске студије

Исход процеса учења: Оспособљавање студента за даље усавршавање и самостални научни и стручни рад

Академски назив: Доктор математике

Услови за упис Завршене студије другог степена из области математике

Начин извођења 3 године у 6 семестара од по 15 седмица

Начин избора предмета из других студијских програма:
У оквиру овог студијског програма, студент може највише два изборна предмета заменити предметима са других студијских програма трећег степена који се изводе на Математичком факултету

Услови за прелазак са других студијских програма:
Студент треба да има одговарајући број положених испита који одговарају испитима из овог студијског програма, односно да оствари потребан број ЕСПБ бодова.

Листа А – обавезни предмети

	пред. веж.	мент. рад	ЕСПБ бодови
Математичка статистика	6	0	14
Теорија случајних процеса	6	0	14

30

30

Листа Б – изборни предмети, студент бира 3 предмета

Теорија поузданости	3	0	7	15
Теорија масовног опслуживања	3	0	7	15
Спектрална теорија случајних процеса	3	0	7	15
Гаусови случајни процеси	3	0	7	15
Стационарни случајни процеси	3	0	7	15
Анализа временских серија	3	0	7	15
Статистика случајних процеса	3	0	7	15
Стохастичке диференцијалне једначине	3	0	7	15
Стохастичка финансијска математика	3	0	7	15
Тестирање статистичких хипотеза	3	0	7	15
Линеарни статистички модели	3	0	7	15
Непараметарска статистика	3	0	7	15
Теорија информација	3	0	7	15
Теорија кодирања	3	0	7	15
Ергодичка теорија	3	0	7	15
Стохастичка анализа	3	0	7	15
Вероватносне мере у метричким просторима	3	0	7	15
Теорија екстремних вредности	3	0	7	15
Теорија ризика	3	0	7	15
Предмети других студијских програма докторских студија (највише 2)				

Специјални курс – бира се у договору са ментором из области из које је дисертација

	3	0	7	15
Израда дисертације (у два семестра)	0	0	20	60

Садржај предмета

МАТЕМАТИЧКА СТАТИСТИКА

Фонд 6+0+14

30 ЕСПБ бодова

Садржај:

Дискретне расподеле које су посебно важне у статистици. Непрекидне расподеле које су посебно важне у статистици. Теорија узорачког метода. Асимптотска теорија узорачког метода за велике узорке. Линеарно статистичко оцењивање. Непараметарско статистичко оцењивање. Параметарско статистичко оцењивање. Тестирање параметарских статистичких хипотеза. Тестирање непараметарских статистичких хипотеза. Секвенцијална статистичка анализа. Бајесов приступ и статистичке функције одлучивања. Временске серије. Вишедимензиона статистичка анализа.

Литература:

С. Уилкс: *Математическая статистика*, Наука, Москва, 1967.

С. Стојановић, *Математичка статистика*, Научна књига, Београд, 1980.

ТЕОРИЈА СЛУЧАЈНИХ ПРОЦЕСА

Фонд 6+0+14

30 ЕСПБ бодова

Садржај:

Дефиниција случајног процеса. Вероватноћа у бесконачнодимензионом простору. Фамилија коначнодимензионих расподела које су генерисане случајним процесом. Низови независних случајних величина и стационарни низови. Процеси са некорелисаним или ортогоналним вредностима. Марковљеви процеси са дискретним параметром. Марковљеви процеси са непрекидним параметром. Мартингали. Процеси са независним прираштајима. Процеси са ортогоналним прираштајима. Стационарни процеси с дискретним параметром. Стационарни процеси с непрекидним параметром. Најбоља линеарна прогноза стационарних у ширем смислу случајних процеса.

Литература:

А.В. Булинский, А.Н. Ширяев, *Теория случайных процессов*, ФИЗМАТЛИТ, Лаборатория Базовых Знаний, Москва, 2003.

J.L. Doob, *Stochastic Processes*, John Wiley & Sons, New York, Chapman & Hall, London, 1953.

Ј. Малишић, *Случајни процеси*, Грађевинска књига, Београд, 1989.

M. Rosenblatt, *Random Processes*, Springer-Verlag, New York, 1974.

ТЕОРИЈА ПОУЗДАНОСТИ

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

Садржај:

Основни појмови теорије поузданости. Поузданост активног елемента до првог отказа. Поузданост обновљеног елемента. Поузданост система. Оцена коефицијента поузданости на основу резултата експеримената. Оцена параметра експоненцијалне расподеле. Интервал поверења параметра експоненцијалне расподеле. Случај више параметара. Провера хипотеза о поузданости. Провера хипотезе о експоненцијалној расподели времена исправног рада. Критеријуми провере хипотеза о вредности параметра. Секвенцијална анализа. Непараметарске методе оцењивања хомогености статистичких података. Статистичке методе контроле квалитета и поузданости масовне производње.

Литература:

Б.В. Гнеденко, Ю.К. Беляев, А.Д. Соловьев: *Математические методы в теории надежности*, Наука, Москва, 1965.

ТЕОРИЈА МАСОВНОГ ОПСЛУЖИВАЊА

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

Садржај:

Задаци теорије масовног опслуживања. Поток требовања. Ерлангова расподела. Процеси умирања и размножавања и њихова примена у теорији масовног опслуживања. Приоритетно опслуживање. Марковљеви модели. Систем с ограниченим временом чекања. Систем с ограниченим временом опслуживања. Стационарни потоци. Нестационарни потоци. Функције Палма-Хинчина. Карактеристике стационарних потока. Функција обнављања. Граничне теореме за сумарни поток. Класификација система масовног опслуживања. Систем $M|G|1$. Нестационарне карактеристике система $M|G|1$. Системи типа $GI|M|m$. Системи с ограничењима. Приоритетни системи опслуживања.

Литература:

Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко: *Введение в теорию массового обслуживания*, "Наука", Москва, 1987.

СПЕКТРАЛНА ТЕОРИЈА СЛУЧАЈНИХ ПРОЦЕСА

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

Садржај:

Стационарни случајни процеси. Коваријациона и аутокорељациона функција. Стационарни процеси са дискретним параметром. Бели шум. AR, MA и ARMA процеси. Линеарни процеси. Хармонијски процес. Стационарни процеси са непрекидним параметром. Фуријеови редови периодичних функција. Спектрална анализа периодичних функција. Спектрална анализа стационарних процеса. Спектрална мера. Спектрална густина. Веза између спектралне густине и коваријационих и аутокорељационих коефицијената. Оцењивање средње вредности. Оцењивање коваријационих и аутокорељационих коефицијената. Оцењивање параметара стандардних модела. Анализа фреквентног домена. Периодограм. Асимптотска својства периодограма. Оцењивање спектралне густине. Периодограмне оцене. Спектрални прозори и конзистентне оцене. Оцењивање спектралне функције. Примене спектралне анализе стационарних процеса.

Литература:

M.B. Priestley, *Spectral Analysis and Time Series*, Academic Press, Inc. London, 1981.

ГАУСОВИ СЛУЧАЈНИ ПРОЦЕСИ

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

Садржај:

Гаусове расподеле у Еуклидовом простору. Гаусове случајне функције. Задавање вероватносне мере. Гаусове величине у Хилбертовом простору. Гаусови стационарни процеси и спектрална репрезентација. Својства трајекторија. Диференцијабилност у средњем. Модул непрекидности. Хилбертов простор случајних величина генерисан вредностима стационарног процеса. Услови еквивалентности Гаусових расподела. Гаусове мере са различитим средњим вредностима. Гаусове мере са различитим корелационим функцијама. Услови регуларности стационарних случајних процеса. Услови информационе регуларности. Услови апсолутне регуларности. Процеси с дискретним параметром. Процеси с непрекидним параметром.

Литература:

И.А. Ибрагимов, Ю.А. Розанов: *Гауссовские случайные процессы*, Наука, Москва, 1970.

СТАЦИОНАРНИ СЛУЧАЈНИ ПРОЦЕСИ

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

Садржај:

Хармонијска анализа стационарних случајних процеса. Случајне мере и интегрални. Спектрална репрезентација. Корелациона функција и спектрална мера стационарних процеса. Ергодицке теореме и закон великих бројева. Линеарна прогноза стационарних процеса с дискретним параметром. Линеарна прогноза стационарних процеса с непрекидним параметром. Стационарност у ужем смислу. Услови слабе зависности за стационарне процесе. Регуларност. Јака промешаност. Услови слабе зависности за нормалне низове. Централна гранична теорема за стационарне процесе. Метод доказивања. Могуће граничне расподеле. Дисперзија збира. Централна гранична теорема за слабо зависне стационарне низове.

Литература:

Ю.А. Розанов: *Стационарные случайные процессы*, ФИЗМАТГИЗ, Москва, 1963.

И.А. Ибрагимов: *Независимые и стационарно связанные величины*, Наука, Москва, 1965.

АНАЛИЗА ВРЕМЕНСКИХ СЕРИЈА

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

Садржај:

Стационарне временске серије, Хилбертов простор случајних величина, Стационарни ARMA процеси. Спектрална репрезентација стационарних процеса. Предвиђање стационарних процеса. Асимптотска теорија. Оцењивање средње вредности и коваријационе функције. Оцењивање параметара ARMA модела. Изградња модела и предвиђање помоћу ARIMA процеса. Анализа спектра стационарног процеса. Модел нестационарних временских серија. Једнодимензиони процеси са јединичним кореном. Коинтеграција. Ауторегресиони модели условне хетероскедастичности. ARCH и GARCH процеси. Моделирање временских серија са променом режима. Вишедимензионе временске серије.

Литература:

J.D. Hamilton, *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1994.

P.J. Brockwell, R.A. Davis, *Time Series: Theory and Methods*, Springer-Verlag, New York, 1987.

СТАТИСТИКА СЛУЧАЈНИХ ПРОЦЕСА

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

Садржај:

Оптимална нелинеарна филтрација случајних процеса. Основна теорема. Једначина оптималне нелинеарне филтрације. Филтрација компоненти дифузионих процеса Маркова. Једначина оптималне нелинеарне интерполације. Једначина оптималне нелинеарне екстраполације. Стохастичке диференцијалне једначине с парцијалним изводима за условну густину. Оптимална филтрација процеса Маркова са пребројивим скупом стања. Проблем оптималне нелинеарне интерполације. Директне и обрнуте једначине. Проблем оптималне нелинеарне екстраполације. Оптимална линеарна нестационарна филтрација. Калман-Бјусијев метод. Једначине линеарне нестационарне филтрације. Примене једначине оптималне нелинеарне филтрације у задацима оптималног управљања. Примене у теорији информација.

Литература:

Р.Ш. Липцер, А.Н. Ширяев, *Статистика случайных процессов*, Наука, Москва, 1974.

СТОХАСТИЧКЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

Садржај:

Вероватносне мере у метричким просторима. Условно математичко очекивање. Непрекидни случајни процеси. Случајни процеси сагласни с растућом фамилијом расподела. Мартингали. Брауново кретање. Пуасонове случајне мере. Тачкасти процеси и Пуасонове тачкасти процеси. Итова дефиниција стохастичког интеграла. Стохастички интеграли по мартингалу. Стохастички интеграли по тачкастим процесима. Семимартингали. Итова формула. Мартингална карактеризација Брауновог кретања и Пуасонових тачкастих процеса. Теорема о репрезентацији семимартингала. Стохастички диференцијал. Стохастичке диференцијалне једначине по квазимартингалима. Дефиниција решења стохастичке диференцијалне једначине. Теорема егзистенције. Теорема јединствености. Дифузиони процеси и стохастичке диференцијалне једначине. Стохастичке диференцијалне једначине с граничним условима. Стохастичке диференцијалне једначине по Пуасоновим тачкастим процесима.

Литература:

N. Ikeda, S. Watanabe, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1981.

СТОХАСТИЧКА ФИНАНСИЈСКА МАТЕМАТИКА

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

Садржај:

Стохастички модели у непрекидном времену. Модели расподела и процеса који нису Гаусови. Стабилне и бесконачно дељиве расподеле. Левијеви процеси. Стабилни процеси. Модели са својством самосличности. Фрактално Брауново кретање. Модели засновани на Брауновом кретању. Винеров процес и његова својства. Стохастички интеграл по Винеровом процесу. Итови процеси. Итова формула. Стохастичке диференцијалне једначине. Дифузиони модели. Портфељ хартија од вредности у семимартингалним моделима. Семимартингални модели без арбитражних могућности. Семимартингали и мартингалне мере. Арбитража у стохастичким финансијским моделима. Комплетност и прорачун цена хеџирања у дифузионим моделима акција. Опције европског типа на дифузионим (B,S) -тржиштима акција. Башељева формула. Блек-Шоулсова формула. Опције америчког типа на дифузионим (B,S) -тржиштима акција.

Литература:

А.Н. Ширяев: *Основы стохастической финансовой математики*: Том 1. Факты. Модели. Том 2. Теория, Фазис, Москва, 1998.

М. Kijima: *Stochastic Processes with Applications to Finance*, Chapman & Hall/CRC, London, 2003.

ТЕСТИРАЊЕ СТАТИСТИЧКИХ ХИПОТЕЗА

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

Садржај:

Равномерно најмоћнији критеријуми. Фундаментална Нојман-Пирсонова лема. Расподеле с монотоним количником веродостојности. Упоредивање експеримената. Границе поверења. Уопштење фундаменталне леме. Двостране хипотезе. Најнеповољније расподеле. Тестирање хипотеза о очекивању и дисперзији нормалне расподеле. Секвенцијални тест количника веродостојности. Моћ и средњи обим узорка за секвенцијални тест односа вероватноћа. Оптимално својство секвенцијалног теста. Центрираност. Статистике које не зависе од довољне статистике. Упоредивање математичких очекивања и дисперзија нормалних расподела. Интервали поверења и фамилије тестова. Регресија. Критеријуми базирани на пермутацијама. Рандомизација као основа статистичког закључивања. Тестови пермутација и рандомизација. Тестирање независности у дводимензионој нормалној расподели. Инваријантност. Симетрија и инваријантност. Најмоћнији инваријантни критеријуми. Центрираност и инваријантност. Критеријуми рангова. Упоредивање два узорка. Хипотеза симетрије. Границе поверења за функцију расподеле.

Литература:

Э. Леман: *Проверка статистических гипотез*, Наука, Москва, 1979.

ЛИНЕАРНИ СТАТИСТИЧКИ МОДЕЛИ

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

Садржај:

Теорија најмањих квадрата и дисперзиона анализа. Схема Гауса-Маркова. Нормалне једначине и оцене најмањих квадрата. Оцене најмањих квадрата дисперзије и коваријације. Други приступи методу најмањих квадрата (геометријско решење). Случај корелисаних података. Оцењивање методом најмањих квадрата при ограничењу на параметре. Оцењивање параметарских функција. Тестирање хипотеза и интервално оцењивање. Случај једне параметарске функције. Случај више параметарских функција. Схеме с ограничењима на параметре. Класификација по једном критеријуму. Класификација по два критеријума. Општи модел с два критеријума и компоненте дисперзије. Теорија и примене статистичке регресије. Појам регресије. Мера додатне зависности. Тестирање хипотезе о једнакости функција регресије. Провера хипотезе о поклапању функције регресије са датом функцијом. Општи проблем најмањих квадрата с две групе параметара. Анализа коваријација.

Литература:

С.Р. Рао, *Линейные статистические методы и их применения*, Наука, Москва, 1968.

НЕПАРАМЕТАРСКА СТАТИСТИКА

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

Садржај:

Непараметарско статистичко оцењивање. Интервали поверења за квантиле расподела. Интервали поверења за интервале квантила. Интервал поверења квантила коначних популација. Толерантне границе. Једностране границе за непрекидне функције расподела. Трака поверења за непрекидне функције расподела. Тестирање непараметарских статистичких хипотеза. Непараметарске просте статистичке хипотезе. Тест квантила. Задатак о два узорка из непрекидне расподеле. Метод рандомизације.

Литература:

С. Уилкс: *Математическая статистика*, Наука, Москва, 1967.

Э. Леман: *Проверка статистических гипотез*, Наука, Москва, 1979.

ТЕОРИЈА ИНФОРМАЦИЈА

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

Садржај:

Ентропија као мера степена неодређености. Ентропија сложених догађаја. Условна ентропија. Својства ентропије. Појам информације. Примене теорије информације у логичким задацима. Примене теорије информације на проблем преноса саопштења каналима везе.

Литература:

R.B. Ash: *Information Theory*, Dover Publications, New York, 1990.

А.М. Яглом, И.М. Яглом, *Вероятность и информация*, Наука, Москва, 1973.

ТЕОРИЈА КОДИРАЊА

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

Садржај:

Кодирање без шума. Дискретни канали без меморије. Кодови са корекцијом грешки. Надградња теорије о кодовима са корекцијом грешки. Информациони канали са меморијом. Непрекидни канали.

Литература: R.B. Ash: *Information Theory*, Dover Publications, New York, 1990.

P. Billingsley, *Ergodic Theory and Information*, John Wiley & Sons, New York, 1965.

ЕРГОДИЧКА ТЕОРИЈА

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

Садржај:

Трансформације које чувају меру. Ергодиичност. Ергодиичка теорема. Последице ергодиичке теореме. Доказ ергодиичке теореме. Максимална ергодиичка теорема. Теорема егзистенције. Ергодиичност и екстремалне тачке. Примене на непрекидне разломке. Динамички системи. Глатки динамички системи на глатким многострукостима. Глатки динамички системи на торусима. Динамички системи алгебарског порекла. Билијари. Динамички системи у теорији бројева. Динамички системи у теорији вероватноће. Примери бесконачнодимензионих динамичких система.

Литература:

P. Billingsley, *Ergodic Theory and Information*, John Wiley & Sons, New York, 1965.

И.П. Корнфельд, Я.Г. Синай, С.В. Фомин: *Эргодическая теория*, Наука, Москва, 1980.

СТОХАСТИЧКА АНАЛИЗА

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

Садржај:

Условно математичко очекивање. Равномерна интеграбилност. Поток сигма-алгебри, моменти заустављања и стохастички процеси. Мартингали – дискретно време. Мартингали – непрекидно време. Предвидиви и потпуно недостижни моменти заустављања. Опционне и предвидиве сигма-алгебре. Процеси ограничене варијације. Дуб-Мејерово разлагање. Структура квадратно интеграбилних мартингала. Квадратна варијација. Стохастички интеграл. Семимартингали и правило диференцирања. Експоненцијална формула и теорема Гирсанова. Случајне мере.

Литература:

R.J. Elliott, *Stochastic Calculus and Applications*, Springer-Verlag, New York, 1982.

ВЕРОВАТНОСНЕ МЕРЕ У МЕТРИЧКИМ ПРОСТОРИМА

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

Садржај:

Мере у метричким просторима. Теорема о условима слабе конвергенције. Примери: Еуклидов простор, простор низова, простор непрекидних функција на интервалу $[0,1]$. Производ простора. Случајни елементи и конвергенција у расподели. Слаба конвергенција и пресликавања. Релативна компактност и густина фамилије расподела. Прохоровљева теорема. Слаба конвергенција у простору $C[0,1]$. Винерова мера. Донскерова теорема. Функције над трајекторијама Брауновог кретања. Флуктуације парцијалних збирова. Емпиријска функција расподеле. Слаба конвергенција у простору D .

Литература:

P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley & Sons, New York, 1968.

ТЕОРИЈА ЕКСТРЕМНИХ ВРЕДНОСТИ

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

Садржај:

Правило променљиве функције. Интегрална својства и Караматина теорема. Монотоне функције и уопштени инверз. Π -променљиве и Γ -променљиве функције. Екстремне вредности низова независних случајних величина. Гумбелова, Фрешеова и Вејбулова расподела. Максимум стабилне расподеле. Теорема о екстремалним типовима. Област привлачења Фрешеове расподеле. Област привлачења Вејбулове расподеле. Област привлачења Гумбелове расподеле. Расподеле које нису у областима привлачења. Екстремне вредности стационарних низова. Услови слабе зависности. Теорема о екстремалним типовима за стационарне низове. Оцењивање параметара Гумбелове расподеле. Оцењивање индекса правилне променљивости. Хилова и Пикандсова оцена и њихова својства. Оцењивање квантила расподеле.

Литература:

Павле Младеновић, *Екстремне вредности случајних низова*, Математички факултет, Београд, 2002.
P. Embrechts, C. Kluppelberg, T. Mikosch: *Modeling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer, Berlin, 2003.

ТЕОРИЈА РИЗИКА

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

Садржај:

Крамер-Лундбергов модел. Моделирање броја потраживања. Пуасонов процес. Процес обнављања. Генералисани Пуасонов процес. Расподела потраживања. Функција расподеле укупних потраживања. Вероватноће разарања код расподела са тешким реповима. Субекспоненцијалне расподеле. Укупна потраживања у субекспоненцијалном случају. Крамер-Лундбергова теорија за велика потраживања. Флуктуације случајних збирова. Централни гранични проблем. Функционална централна гранична теорема и Брауново кретање. Флуктуације максимума и статистика поретка. Статистички методи за екстремалне догађаје. Оцењивање параметара облика и квантила расподеле.

Литература:

P. Embrechts, C. Kluppelberg, T. Mikosch: *Modeling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2003.
T. Mikosch: *Non-Life Insurance Mathematics, An Introduction with Stochastic Processes*, Springer, Berlin, 2004.