Нелокална модификација Ајнштајнове теорије гравитације

Иван Димитријевић

08.12.2015

Мотивација

Велика космолошка опсервациона открића:

- Велике орбиталне брзине галаксија унутар јата галаксија (F.Zwicky, 1933),
- Велике орбиталне брзине звезда у спиралним галаксијама (Вера Рубин, крај 1960-тих),
- Убрзано ширење васионе (1998. година).

Велики прасак

- Велики прасак представља космички сингуларитет опште релативности. Наиме, под прилично општим условима, општа релативност даје космолошка решења при којима је васиона на свом почетку величине нула, што значи да је густина материје бесконачна.
- Приметимо да када физичка теорија садржи сингуларитет, онда она није важећа у околини сингуларитета и мора бити модификована на одговарајући начин.

Приступи решавању проблема

Постоје два приступа:

- тамна материја и тамна енергија и
- модификација Ајнштајнове теорије гравитације.

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu},\ c = 1$$

где је $T_{\mu\nu}$ тензор енергије-импулса, $g_{\mu\nu}$ је метрички тензор, $R_{\mu\nu}$ је Ричијев тензор и R је скаларна кривина.

Тамна материја и тамна енергија

- Ако је Ајнштајнова теорија гравитације применљива на целокупну васиону тада васиона садржи око 5% видљиве (обичне) материје, 27% тамне материје и 68% тамне енергије.
- То значи да 95% укупне материје, или енергије, представља тамну страну васионе, чија природа је за сада непозната.
- Тамна материја је одговорна за орбиталне брзине у галаксијама, а тамна енергија је одговорна за убрзано ширење васионе.

Модификација Ајнштајнове теорије гравитације

Мотивација за модификацију Ајнштајнове теорије гравитације

- Ајнштајнова теорија гравитације није проверена на великим космичким растојањима.
- Постојање тамне материје и тамне енергије није експериментално потврђено.

Правци модификације Ајнштајнове теорије гравитације

Постоје различити правци модификације Ајнштајнове теорије гравитације.

- Ајнштајнова општа теорија релативности

Варијацијом дејства $S = \int \left(\frac{R - 2\Lambda}{16\pi G} + \mathcal{L}_m\right)\sqrt{-\mathrm{g}}d^4x$ добијамо једначине кретања.

Једначине кретања

$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}$, $c = 1$

где је $T_{\mu\nu}$ тензор енергије-импулса, $g_{\mu\nu}$ је метрички тензор, $R_{\mu\nu}$ је Ричијев тензор и R је скаларна кривина.
Главни савремени правци модификације:

- $f(R)$ модификација
- нелокална модификација

Нелокална модификација

Под нелокалном модификацијом гравитације подразумевамо замену скаларне кривине R у Ајнштајн-Хилбертовом дејству са подесном функцијом $F(R, \Box)$, где је $\Box = \nabla_\mu \nabla^\mu$ Даламберов оператор, а ∇_μ означава коваријантни извод.

Нека је M сада четворо-димензиона псеудо-Риманова многострукост са метриком $(g_{\mu\nu})$ сигнатуре $(1, 3)$. Разматрамо класу модела нелокалне гравитације без материје која је дата следећим дејством

$$S = \int_M \left(\frac{R - 2\Lambda}{16\pi G} + R^p \mathcal{F}(\Box) R^q \right) \sqrt{-\mathrm{g}}\, \mathrm{d}^4 x,$$

где је $\mathcal{F}(\Box) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Box^n$, p и q су реалне константе и Λ је космолошка константа.

FRW метрика

Користимо Фридман-Робертсон-Вокерову (FRW) метрику

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2\right), \; k \in \{-1, 0, 1\}.$$

$$R = \frac{6\left(a(t)\ddot{a}(t) + \dot{a}(t)^2 + k\right)}{a(t)^2}$$

У случају FRW метрике за Даламберов оператор важи

$$\Box R = -\ddot{R} - 3H\dot{R}, \qquad H = \frac{\dot{a}}{a}$$

Варијација дејства S и једначине кретања

Једначине кретања су

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^p\mathcal{F}(\Box)R^q + R_{\mu\nu}W - K_{\mu\nu}W + \frac{1}{2}\Omega_{\mu\nu} = -\frac{G_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu}}{16\pi G},\\
&\Omega_{\mu\nu} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sum_{l=0}^{n-1}\Big(g_{\mu\nu}\nabla^\alpha\Box^l R^p\nabla_\alpha\Box^{n-1-l}R^q\\
&-2\nabla_\mu\Box^l R^p\nabla_\nu\Box^{n-1-l}R^q + g_{\mu\nu}\Box^l R^p\Box^{n-l}R^q\Big),\\
&K_{\mu\nu} = \nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box,\\
&W = pR^{p-1}\mathcal{F}(\Box)R^q + qR^{q-1}\mathcal{F}(\Box)R^p.
\end{aligned}
$$

Траг и 00-компонента једначина кретања

Претпоставимо да многострукост M има FRW метрику. Тада имамо две линеарно независне једначине (траг и 00-једначину):

$$-2R^p\mathcal{F}(\Box)R^q + RW + 3\Box W + \frac{1}{2}\Omega = \frac{R-4\Lambda}{16\pi G},$$

$$\frac{1}{2}R^p\mathcal{F}(\Box)R^q + R_{00}W - K_{00}W + \frac{1}{2}\Omega_{00} = -\frac{G_{00}-\Lambda}{16\pi G},$$

$$\Omega = g^{\mu\nu}\Omega_{\mu\nu}.$$

Космолошка решења у моделима нелокалне модификације

Разматрамо класу модела нелокалне гравитације без материје дату следећим дејством

$$S = \int_M \left(\frac{R - 2\Lambda}{16\pi G} + R^p \mathcal{F}(\Box) R^q \right) \sqrt{-\mathrm{g}}\, \mathrm{d}^4 x.$$

У наставку разматрамо три релативно једноставна нелокална модела:

- $p = 1,\ q = 1,$
- $p = -1,\ q = 1,$
- $p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}$

Први случај: $p = 1$, $q = 1$

За $p = q = 1$ наше дејство постаје

$$S = \int_M \left(\frac{R - 2\Lambda}{16\pi G} + R\mathcal{F}(\Box)R \right) \sqrt{-\mathrm{g}}\, d^4x.$$

Овај модел је атрактиван зато што помоћу њега налазимо космолошка решења која не садрже сингуларитет у почетном тренутку $t = 0$.

Да бисмо решили једначине кретања користимо следећи анзац:

$$\Box R = rR + s, \quad r, s \in \mathbb{R}$$

Следећа лема садржи прве две последице овог анзаца.

Лема

Важи:

$$\Box^n R = r^n (R + \frac{s}{r}),\ n \geq 1, \qquad \mathcal{F}(\Box)R = \mathcal{F}(r)R + \frac{s}{r}(\mathcal{F}(r) - f_0).$$

Следећа два решења задовољавају линеарни анзац:

- Несингуларно космолошко решење са прескоком $a(t) = a_0 e^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t^2}$ за $k = 0$ (A. Koshelev и S. Vernov).
- Несингуларно космолошко решење са прескоком $a(t) = a_0 \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right)$ за $k = 0$ (T. Biswas, T. Koivisto, A. Mazumdar и W. Siegel).

Несингуларна космолошка решења са прескоком

Нека је скалирајући фактор облика

$$a(t) = a_0(\sigma e^{\lambda t} + \tau e^{-\lambda t}), \quad a_0 > 0,\ \lambda, \sigma, \tau \in \mathbb{R}.$$

Несингуларна космолошка решења са прескоком

Нека је скалирајући фактор облика

$$a(t) = a_0(\sigma e^{\lambda t} + \tau e^{-\lambda t}), \quad a_0 > 0,\ \lambda, \sigma, \tau \in \mathbb{R}.$$

Директним рачуном добијамо:

Лема

Важи:

$$H(t) = \frac{\lambda(\sigma e^{\lambda t} - \tau e^{-\lambda t})}{\sigma e^{\lambda t} + \tau e^{-\lambda t}},$$

$$R(t) = \frac{6\left(2a_0^2\lambda^2\left(\sigma^2 e^{4t\lambda} + \tau^2\right) + k e^{2t\lambda}\right)}{a_0^2\left(\sigma e^{2t\lambda} + \tau\right)^2},$$

$$\Box R = -\frac{12\lambda^2 e^{2t\lambda}\left(4a_0^2\lambda^2\sigma\tau - k\right)}{a_0^2\left(\sigma e^{2t\lambda} + \tau\right)^2}.$$

Несингуларна космолошка решења са прескоком

Теорема

Скалирајући фактор облика $a(t) = a_0(\sigma e^{\lambda t} + \tau e^{-\lambda t})$ *је решење једначина кретања у следећа три случаја:*

Случај 1.

$$\mathcal{F}\left(2\lambda^2\right) = 0, \quad \mathcal{F}'\left(2\lambda^2\right) = 0, \quad f_0 = -\frac{1}{128\pi G C\Lambda}.$$

Случај 2.

$$3k = 4a_0^2\Lambda\sigma\tau.$$

Случај 3.

$$\mathcal{F}\left(2\lambda^2\right) = \frac{1}{192\pi G C\Lambda} + \frac{2}{3}f_0, \quad \mathcal{F}'\left(2\lambda^2\right) = 0, \quad k = -4a_0^2\Lambda\sigma\tau.$$

У сва три случаја важи $3\lambda^2 = \Lambda$.

Несингуларна космолошка решења са прескоком

Приметимо да важи:

$$\Box R = 2\lambda^2 R - 24\lambda^4, \qquad r = 2\lambda^2, \qquad s = -24\lambda^4.$$

Користећи параметре r и s добијамо

$$\Box^n R = (2\lambda^2)^n (R - 12\lambda^2), \; n \geq 1,$$
$$\mathcal{F}(\Box) R = \mathcal{F}(2\lambda^2) R - 12\lambda^2 (\mathcal{F}(2\lambda^2) - f_0).$$

Замењујући претходне изразе у траг и 00-компоненту добијамо

$$36\lambda^2 \mathcal{F}(2\lambda^2)(R - 12\lambda^2) + \mathcal{F}'(2\lambda^2) \left(4\lambda^2 (R - 12\lambda^2)^2 - \dot{R}^2\right)$$
$$- 24\lambda^2 f_0 (R - 12\lambda^2) = \frac{R - 4\Lambda}{16\pi GC},$$

$$(2R_{00} + \frac{1}{2}R) \left(\mathcal{F}(2\lambda^2) R - 12\lambda^2 (\mathcal{F}(2\lambda^2) - f_0)\right)$$
$$- \frac{1}{2}\mathcal{F}'(2\lambda^2) \left(\dot{R}^2 + 2\lambda^2 (R - 12\lambda^2)^2\right)$$
$$- 6\lambda^2 (\mathcal{F}(2\lambda^2) - f_0)(R - 12\lambda^2) + 6H\mathcal{F}(2\lambda^2)\dot{R} = -\frac{1}{16\pi GC}(G_{00} - \Lambda).$$

Несингуларна космолошка решења са прескоком

Замењујући $a(t)$ у претходне једначине добијамо следеће две једначине у облику полинома по $e^{2\lambda t}$:

$$\frac{a_0^4\tau^6}{4\pi G}\left(3\lambda^2-\Lambda\right)+3a_0^2\tau^4Q_1e^{2\lambda t}+6a_0^2\sigma\tau^3Q_2e^{4\lambda t}-2\sigma\tau Q_3e^{6\lambda t}$$
$$+6a_0^2\sigma^3\tau Q_2e^{8\lambda t}+3a_0^2\sigma^4Q_1e^{10\lambda t}+\frac{a_0^4\sigma^6}{4\pi G}\left(3\lambda^2-\Lambda\right)e^{12\lambda t}=0,$$

$$\frac{\tau^6a_0^4}{8\pi G}\left(3\lambda^2-\Lambda\right)+3\tau^4a_0^2R_1e^{2\lambda t}+3\tau^2R_2e^{4\lambda t}+2\sigma\tau R_3e^{6\lambda t}$$
$$+3\sigma^2R_2e^{8\lambda t}+3\sigma^4a_0^2R_1e^{10\lambda t}+\frac{\sigma^6a_0^4}{8\pi G}\left(3\lambda^2-\Lambda\right)e^{12\lambda t}=0,$$

где је

$$Q_1 = 72C\lambda^2 K\mathcal{F}(2\lambda^2) + a_0^2(-192Cf_0\lambda^4 + \frac{\lambda^2}{\pi G} - \frac{\Lambda}{2\pi G})\sigma\tau + 48Cf_0k\lambda^2 + \frac{k}{8\pi G},$$

$$Q_2 = 144C\lambda^2 K\mathcal{F}(2\lambda^2) + a_0^2(-384Cf_0\lambda^4 + \frac{7\lambda^2}{8\pi G} - \frac{5\Lambda}{8\pi G})\sigma\tau + 96Cf_0k\lambda^2 + \frac{k}{4\pi G},$$

$$Q_3 = -648Ca_0^2\lambda^2\sigma\tau K\mathcal{F}(2\lambda^2) + 288C\lambda^2K^2\mathcal{F}'(2\lambda^2) - a_0^2k(432Cf_0\lambda^2 + \frac{9}{8\pi G})\sigma\tau + a_0^4(1728Cf_0\lambda^4 - \frac{3\lambda^2}{\pi G} + \frac{5\Lambda}{2\pi G})\sigma^2\tau^2,$$

и $K = 4a_0^2\lambda^2\sigma\tau - k$ и

Несингуларна космолошка решења са прескоком

$$R_1 = Q_1 - \frac{3\lambda^2 - \Lambda}{4\pi G}\sigma\tau a_0^2,$$

$$R_2 = -12C\left(k - 12a_0^2\lambda^2\sigma\tau\right)K\mathcal{F}(2\lambda^2) - 72C\lambda^2K^2\mathcal{F}'(2\lambda^2)$$

$$+ \frac{a_0^2 k}{2\pi G}\left(384\pi GCf_0\lambda^2 + 1\right)\sigma\tau$$

$$- \frac{a_0^4\sigma^2\tau^2}{8\pi G}\left(6144\pi GCf_0\lambda^4 + \lambda^2 + 5\Lambda\right),$$

$$R_3 = -36C\left(k - 6a_0^2\lambda^2\sigma\tau\right)K\mathcal{F}(2\lambda^2) + 72C\lambda^2K^2\mathcal{F}'(2\lambda^2)$$

$$+ \frac{9a_0^2 k}{8\pi G}\left(384\pi GCf_0\lambda^2 + 1\right)\sigma\tau$$

$$- \frac{a_0^4\sigma^2\tau^2}{4\pi G}\left(6912\pi GCf_0\lambda^4 + 3\lambda^2 + 5\Lambda\right).$$

Закључак, $p = 1$, $q = 1$

- Разматрали смо нелокални модел гравитације са космолошком константом Λ и без материје.
- Користећи анзац $\Box R = rR + s$ пронашли смо три типа несингуларних решења са прескоком за космолошки скалирајући фактор облика $a(t) = a_0(\sigma e^{\lambda t} + \tau e^{-\lambda t})$.
- Приметимо да сва добијена решења задовољавају

$$\ddot{a}(t) = \lambda^2 a(t) > 0.$$

- Решења постоје за све три вредности константе $k = 0, \pm 1$.

Други случај $p = -1$, $q = 1$

Овај модел је дат следећим дејством

$$S = \int_M \left(\frac{R}{16\pi G} + R^{-1}\mathcal{F}(\Box)R \right) \sqrt{-\mathrm{g}}\, \mathrm{d}^4x,$$

где је $\mathcal{F}(\Box) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Box^n$. Када узмемо $f_0 = -\frac{\Lambda}{8\pi G}$, тада f_0 преузима улогу космолошке константе.

Други случај $p = -1$, $q = 1$

Овај модел је дат следећим дејством

$$S = \int_M \left(\frac{R}{16\pi G} + R^{-1}\mathcal{F}(\Box)R \right) \sqrt{-\mathrm{g}}\, \mathrm{d}^4x,$$

где је $\mathcal{F}(\Box) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Box^n$. Када узмемо $f_0 = -\frac{\Lambda}{8\pi G}$, тада f_0 преузима улогу космолошке константе.

- Нелокални члан $R^{-1}\mathcal{F}(\Box)R$ је инваријантан у односу на трансформацију $R \to CR$. То значи да у случају FRW метрике утицај нелокалности зависи само од начина на који скаларна кривина R зависи од времена t, а не зависи од интензитета R.

Нека космолошка решења степеног облика

Сада решавамо једначине кретања за космолошки скалирајући фактор $a(t)$ и одговарајуће R:

$$a(t) = a_0|t-t_0|^\alpha,$$

$$R(t) = 6\big(\alpha(2\alpha-1)(t-t_0)^{-2} + \frac{k}{a_0^2}(t-t_0)^{-2\alpha}\big).$$

Случај $k = 0$, $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq \frac{1}{2}$

Теорема

За $k = 0$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \frac{1}{2}$ *и* $\frac{3\alpha-1}{2} \in \mathbb{N}$ *скалирајући фактор облика* $a = a_0|t - t_0|^\alpha$ *је решење једначина кретања ако важи*

$$f_0 = 0,\ f_1 = -\frac{3\alpha(2\alpha-1)}{32\pi G(3\alpha-2)},$$

$$f_n = 0 \quad \text{за} \quad 2 \leq n \leq \frac{3\alpha-1}{2},$$

$$f_n \in \mathbb{R} \quad \text{за} \quad n > \frac{3\alpha-1}{2}.$$

Случај $k = 0$, $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq \frac{1}{2}$

Нелокална модификација Ајнштајнове теорије гравитације

Иван Димитријевић

У овом случају, имамо следећу зависност од параметра α :

$$\begin{aligned} a &= a_0|t-t_0|^\alpha, & H &= \alpha(t-t_0)^{-1}, \\ R &= r(t-t_0)^{-2}, & r &= 6\alpha(2\alpha-1), \\ R_{00} &= 3\alpha(1-\alpha)(t-t_0)^{-2}, & G_{00} &= 3\alpha^2(t-t_0)^{-2}. \end{aligned}$$

Сада изрази $\Box^n R$ и $\Box^n R^{-1}$ постају

$$\Box^n R = B(n,1)(t-t_0)^{-2n-2}, \quad \Box^n R^{-1} = B(n,-1)(t-t_0)^{2-2n},$$

$$B(n,1) = r(-2)^n n! \prod_{l=1}^{n}(1-3\alpha+2l), \ n \geq 1, \quad B(0,1) = r,$$

$$B(n,-1) = (r)^{-1}2^n \prod_{l=1}^{n}(2-l)(-3-3\alpha+2l), \ n \geq 1, \quad B(0,-1) = r^{-1}.$$

Случај $k = 0$, $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq \frac{1}{2}$

Приметимо да важи $B(1,-1) = -2(3\alpha+1)r^{-1}$ и $B(n,-1) = 0$ ако је $n \geq 2$. Такође, добијамо

$$\mathcal{F}(\Box)R = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, B(n,1) \, (t-t_0)^{-2n-2},$$

$$\mathcal{F}(\Box)R^{-1} = f_0 \, B(0,-1) \, (t-t_0)^2 + f_1 \, B(1,-1).$$

Случај $k = 0$, $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq \frac{1}{2}$

Замењујући ове једначине у траг и 00 компоненту добијамо

$$\begin{aligned}
& r^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} f_n B(n,1)\left(-3r + 6(1-n)(1-2n+3\alpha)\right)(t-t_0)^{-2n} \\
& + r\sum_{n=0}^{1} f_n \left(rB(n,-1) + 3B(n+1,-1)\right)(t-t_0)^{-2n} \\
& + 2r\sum_{n=1}^{\infty} f_n \gamma_n (t-t_0)^{-2n} = \frac{r^2}{16\pi G}(t-t_0)^{-2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} f_n r^{-1} B(n,1)\left(\frac{r}{2} - A_n\right)(t-t_0)^{-2n} + \sum_{n=0}^{1} f_n r B(n,-1)\, A_n\, (t-t_0)^{-2n} \\
& + \frac{r}{2}\sum_{n=1}^{\infty} f_n \delta_n (t-t_0)^{-2n} = \frac{-r^2}{32\pi G}\,\frac{\alpha}{2\alpha-1}(t-t_0)^{-2},
\end{aligned}$$

Случај $k = 0$, $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq \frac{1}{2}$

где је

$$\gamma_n = \sum_{l=0}^{n-1} B(l,-1)(B(n-l,1) + 2(1-l)(n-l)B(n-l-1,1)),$$
$$\delta_n = \sum_{l=0}^{n-1} B(l,-1)(-B(n-l,1) + 4(1-l)(n-l)B(n-l-1,1)),$$
$$A_n = 6\alpha(1-n) - r\frac{\alpha-1}{2(2\alpha-1)} = \frac{r}{2}\frac{3-2n-\alpha}{2\alpha-1}.$$

Претходне једначине се могу разложити у систем парова једначина у односу на сваки коефицијент f_n. У случају $n > 1$, имамо следеће парове:

$$f_n\left(B(n,1)\left(-3r + 6(1-n)(1-2n+3\alpha)\right) + 2r^2\gamma_n\right) = 0,$$
$$f_n\left(B(n,1)\left(\frac{r}{2} - A_n\right) + \frac{r^2}{2}\delta_n\right) = 0.$$

Случај $k = 0$, $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq \frac{1}{2}$

Ако је $\frac{3\alpha-1}{2}$ природан број добијамо:

$$B(n,1) = r4^n n! \frac{(\frac{3}{2}(\alpha-1))!}{(\frac{3}{2}(\alpha-1)-n)!}, \quad n < \frac{3\alpha-1}{2},$$
$$B(n,1) = 0, \quad n \geq \frac{3\alpha-1}{2},$$

$$\gamma_n = 2B(0,-1)B(n-1,1)(3n\alpha - 2n^2 - 3\alpha - 1), \quad n \leq \frac{3\alpha-1}{2},$$
$$\delta_n = 2B(0,-1)B(n-1,1)(2n^2 + 3n + 3\alpha - 3\alpha n + 1), \quad n \leq \frac{3\alpha-1}{2},$$
$$\gamma_n = \delta_n = 0, \quad n > \frac{3\alpha-1}{2}.$$

Случај $k = 0$, $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq \frac{1}{2}$

Ако је $n > \frac{3\alpha-1}{2}$, онда је $B(n,1) = \gamma_n = \delta_n = 0$. Тада је систем тривијално задовољен за произвољне вредности коефицијената f_n. Са друге стране, за $2 \leq n \leq \frac{3\alpha-1}{2}$ систем има само тривијално решење $f_n = 0$. За $n = 0$ горе поменути пар једначина постаје

$$f_0\big(-2r + 6(1+3\alpha) + 3rB(1,-1)\big) = 0, \quad f_0 = 0$$

и његово решење је $f_0 = 0$. Још нам је остао случај $n = 1$ који се своди на следећи систем

$$f_1\big(-3r^{-1}B(1,1) + rB(1,-1) + 2\gamma_1\big) = \frac{r}{16\pi G},$$
$$f_1\Big(A_1(rB(1,-1) - r^{-1}B(1,1)) + \frac{1}{2}(B(1,1) + r\delta_1)\Big) = \frac{-r^2}{32\pi G}\,\frac{\alpha}{2\alpha-1},$$

чије је решење $f_1 = -\frac{3\alpha(2\alpha-1)}{32\pi G(3\alpha-2)}$.

Случај $k = 0$, $\alpha \to 0$ (простор Минковског)

Теорема

За $k = 0$ и када $\alpha \to 0$ једначине кретања су задовољене ако важи

$$f_0, f_1 \in \mathbb{R}, \quad f_i = 0, \ i \geq 2.$$

Ово изгледа као решење Минковског, али пошто су сви $f_n = 0$, $n \geq 2$ овај модел није нелокални модел гравитације задат дејством S. Одавде следи да горња космолошка решења степеног облика немају простор Минковског као своју позадину.

Случај $k = 0$, $\alpha \to \frac{1}{2}$

Теорема

За $k = 0$ и када $\alpha \to \frac{1}{2}$ једначине кретања су задовољене ако важи

$$f_0 \in \mathbb{R}, \quad f_i = 0, \ i \geq 1.$$

Случај $k \neq 0$, $\alpha = 1$

Нелокална модификација Ајнштајнове теорије гравитације

Иван Димитријевић

Нека је $k \neq 0$. Са циљем да поједноставимо израз за скаларну кривину

$$R(t) = 6\big(\alpha(2\alpha - 1)(t - t_0)^{-2} + \frac{k}{a_0^2}(t - t_0)^{-2\alpha}\big)$$

имамо три могућности: $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$ и $\alpha = 1$. Прве две могућности не дају решења која задовољавају једначине кретања. У наставку анализирамо случај $\alpha = 1$.

Теорема

За $k \neq 0$ скалирајући фактор облика $a = a_0|t - t_0|$ је решење једначина кретања ако важи

$$f_0 = 0, \quad f_1 = \frac{-s}{64\pi G}, \quad f_n \in \mathbb{R}, \quad n \geq 2,$$

где је $s = 6(1 + \frac{k}{a_0^2})$.

Закључак, $p = -1$, $q = 1$

- Из модификоване гравитације са нелокалним чланом $R^{-1}\mathcal{F}(\Box)R$ извели смо нека космолошка решења степеног облика $a(t) = a_0|t - t_0|^\alpha$.
- Ова решења немају за позадину простор Минковског.
- Важно је напоменути да постоји решење $a(t) = |t - t_0|$ које одговара Милнеовој васиони за $k = -1$.
- Сва решења степеног облика која смо представили $a(t) = a_0|t - t_0|^\alpha$ имају скаларну кривину једнаку $R(t) = 6\big(\alpha(2\alpha - 1)(t - t_0)^{-2} + \frac{k}{a_0^2}(t - t_0)^{-2\alpha}\big)$, која задовољава релацију $\Box R = qR^2$, где параметар q зависи од α.
- Коначно, наша нелокалност, која је облика $R^{-1}\mathcal{F}(\Box)R$, је инваријантна у односу на трансформацију $R \to CR$, али има утицај на еволуцију васионе, пошто оператор $\Box = -\partial_t^2 - 3H(t)\partial_t$ који зависи од времена делује на скаларну кривину $R(t) = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right)$ која такође зависи од времена.

Трећи случај $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$

Посматрамо поново општи модел, задат следећим дејством

$$S = \int_M \left(\frac{R - 2\Lambda}{16\pi G} + R^p \mathcal{F}(\Box) R^q \right) \sqrt{-\mathrm{g}}\, \mathrm{d}^4 x.$$

Такође подразумевамо да је $p \geq q$.

Трећи случај $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$

Посматрамо само раван модел $k = 0$. Скалирајући фактор бирамо да буде облика

$$a(t) = a_0 e^{-\frac{\gamma}{12}t^2}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Тада за Хаблов параметар и скаларну кривину важе следеће релације

$$H(t) = -\frac{1}{6}\gamma t, \qquad R(t) = \frac{1}{3}\gamma(\gamma t^2 - 3), \qquad R_{00} = \frac{1}{4}(\gamma - R).$$

Трећи случај $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$

$$\Box R^p = p\gamma R^p - \frac{p}{3}(4p-5)\gamma^2 R^{p-1} - \frac{4}{3}p(p-1)\gamma^3 R^{p-2}.$$

Из ове релације следи да оператор $\Box$ затворен на простору полинома степена највише p по R. У бази $v_p = \begin{pmatrix} R^p & R^{p-1} & \dots & R & 1 \end{pmatrix}^T$ његова матрица је

$$M_p = \gamma \begin{pmatrix} p & \frac{p}{3}(5-4p)\gamma & \frac{4}{3}p(1-p)\gamma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p-1 & \frac{p-1}{3}(9-4p)\gamma & \frac{4}{3}(1-p)(p-2)\gamma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{\gamma}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Једначине кретања

Тада је $F_p = \sum_{n=0}^{\infty} f_n M_p^n$ матрица оператора $\mathcal{F}(\Box)$. Нека је D_p матрица оператора $\frac{\partial}{\partial R}$ и e_p су координате вектора R^p у бази v_p.

Траг и 00 једначина се трансформишу у следећи облик

$$T = 0, \qquad Z = 0,$$

где је

$$\begin{aligned} T &= -2e_p v_p e_q F_q v_q + RW_{pq} - 4\gamma^2(R+\gamma)W''_{pq} - 2\gamma^2 W'_{pq} \\ &\quad - S_1 + 2S_2 - \frac{R-4\Lambda}{16\pi G}, \\ Z &= \frac{1}{2}e_p v_p e_q F_q v_q + \frac{\gamma}{4}(\gamma - R)W_{pq} - \gamma(R+\gamma)W'_{pq} \\ &\quad - \frac{1}{2}(S_1 + S_2) + \frac{G_{00} - \Lambda}{16\pi G}, \end{aligned}$$

Једначине кретања

и

$$S_1 = \frac{4}{3}\gamma^2(R+\gamma)\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sum_{l=0}^{n-1} e_p M_p^l D_p v_p e_q M_q^{n-1-l} D_q v_q,$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sum_{l=0}^{n-1} e_p M_p^l v_p e_q M_q^{n-l} v_q.$$

Једначине кретања

Теорема

За свако $p \in \mathbb{N}$ *и* $q \in \mathbb{N}$ *важи* $T + 4Z = 4\gamma Z'$. *Траг и* 00 *једначине су еквивалентне.*

У наставку је довољно посматрати само траг једначину.
Траг једначина је полиномијалног типа степена $p+q$ по R, па се распада на $p+q+1$ једначину по $p+q+1$ "непознатој" $f_0 = \mathcal{F}(0)$, $\mathcal{F}(\gamma)$, ..., $\mathcal{F}(p\gamma)$, $\mathcal{F}'(\gamma)$, ..., $\mathcal{F}'(q\gamma)$.

$(p,q) = (1,1)$

Теорема

За $p = q = 1$*, траг једначина је задовољена акко* $\gamma = -12\Lambda$*,* $\mathcal{F}'(\gamma) = 0$ *анд* $f_0 = \frac{3}{32\gamma\pi G} - 8\mathcal{F}(\gamma)$.

$(p,q) \neq (1,1)$

Теорема

Траг једначина је задовољена за следеће вредности параметара p и q ($\kappa = \frac{1}{16\pi G}$):

- $p=2,\ q=1$: $\mathcal{F}(\gamma) = \frac{9\kappa(\gamma+9\Lambda)}{112\gamma^3}$, $\mathcal{F}(2\gamma) = \frac{3\kappa(\gamma+9\Lambda)}{56\gamma^3}$, $f_0 = -\frac{\kappa(4\gamma+15\Lambda)}{7\gamma^3}$, $\mathcal{F}'(\gamma) = -\frac{3\kappa(\gamma+9\Lambda)}{8\gamma^4}$,
- $p=2,\ q=2$: $\mathcal{F}(\gamma) = \frac{369\kappa(\gamma+8\Lambda)}{9344\gamma^4}$, $\mathcal{F}(2\gamma) = \frac{27\kappa(\gamma+8\Lambda)}{4672\gamma^4}$, $f_0 = \frac{\kappa(145\gamma+576\Lambda)}{876\gamma^4}$, $\mathcal{F}'(\gamma) = -\frac{639\kappa(\gamma+8\Lambda)}{2336\gamma^5}$, $\mathcal{F}'(2\gamma) = -\frac{27\kappa(\gamma+8\Lambda)}{9344\gamma^5}$,
- $p=3,\ q=1$: $\mathcal{F}(\gamma) = \frac{\kappa(107\gamma+408\Lambda)}{6432\gamma^4}$, $\mathcal{F}(2\gamma) = -\frac{\kappa(173\gamma+840\Lambda)}{7504\gamma^4}$, $\mathcal{F}(3\gamma) = 0$, $f_0 = -\frac{\kappa(95\gamma+768\Lambda)}{268\gamma^4}$, $\mathcal{F}'(\gamma) = -\frac{9\kappa(\gamma+8\Lambda)}{88\gamma^5}$.
- $p=3,\ q=2$: $\mathcal{F}(\gamma) = \frac{3\kappa(10702\gamma+40497\Lambda)}{245680\gamma^5}$, $\mathcal{F}(2\gamma) = -\frac{27\kappa(6\gamma+25\Lambda)}{24568\gamma^5}$, $\mathcal{F}(3\gamma) = -\frac{27\kappa(6\gamma+25\Lambda)}{49136\gamma^5}$, $f_0 = -\frac{3\kappa(7099\gamma+23949\Lambda)}{15355\gamma^5}$, $\mathcal{F}'(\gamma) = -\frac{3\kappa(11614\gamma+68865\Lambda)}{270248\gamma^6}$, $\mathcal{F}'(2\gamma) = \frac{513\kappa(6\gamma+25\Lambda)}{171976\gamma^6}$,

Трећи случај $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$

- Посматрамо скалирајући фактор облика $a(t) = a_0 \exp(-\frac{\gamma}{12}t^2)$
- Траг и 00 једначине су секвивалентне. Траг једначина је полиномијалног типа степена $p+q$ по R, па се распада на $p+q+1$ једначину по $p+q+1$ "непознатој" $f_0 = \mathcal{F}(0)$, $\mathcal{F}(\gamma)$, ..., $\mathcal{F}(p\gamma)$, $\mathcal{F}'(\gamma)$, ..., $\mathcal{F}'(q\gamma)$.
- За $p = q = 1$ овај систем има бесконачно много решења, а константе γ и Λ задовољавају $\gamma = -12\Lambda$.
- У осталим случајевима систем има јединствено решење, за произвољно $\gamma \in \mathbb{R}$.
- Добијена су решења за $1 \leq q \leq p \leq 4$.

Хвала на пажњи!