Vežba 2. Formiranje spektralnih linija u ne-LTR atomima sa dva nivoa (I)

1. Problem i osnovne jednačine

Linije u zvezdanim spektrima nastaju u interakcijama zračenja i atmosferskog gasa - radijativnim prelazima izmedju diskretnih energetskih nivoa u atomima i jonima. Njihova jačina zavisi od naseljenosti nivoa izmedju kojih se vrši prelaz i od verovatnoće prelaza.

Naseljenosti atomskih nivoa su poznate funkcije lokalne temperature i elektronske koncentracije ($n_i^* = n_i^*(T, n_e)$) samo u slučaju kada sudarni procesi dominiraju nad radijativnim i kada su zračenje i gas u lokalnoj ravnoteži (LTR). Tada se mogu jednostavno izračunati pomoću Bolcmanove i Sahine formule. **U LTR, stanje gasa u jednoj tački atmosfere ne zavisi od stanja gasa u drugim tačkama.** U opštem slučaju, medjutim, naseljenosti atomskih nivoa, kroz radijativne prelaze (fotoekscitacije i deekscitacije), zavise i od polja zračenja ($n_i = n_i(T, n_e, J_\nu)$). S obzirom da je polje zračenja (rešenje jednačine prenosa) odredjeno stanjem gasa u celoj atmosferi, **problem je nelokalan**, jer **stanje gasa u jednoj tački atmosfere posredstvom polja zračenja zavisi od stanja gasa u svim drugim tačkama**. Osim toga, naseljenost jednog nivoa, kroz razne radijativne i sudarne prelaze, zavisi od naseljenosti ostalih nivoa u atomu. Tako je i zračenje u raznim spektralnim linijama atoma jednog hemijskog elementa medjusobno povezano. U opštem slučaju, **problem je i nelinearan**. Matematički, zbog uzajamne zavisnosti polja zračenja (I_ν) i naseljenosti atomskih nivoa (n_i), ove dve nepoznate raspodele - fotona po frekvencijama i atoma po stanjima ekscitacije - moraju se odrediti istovremenim rešavanjem jednačine prenosa zračenja (za sve prelaze) i jednačina statističke ravnoteže (za sve atomske nivoe).

Problem se znatno pojednostavljuje ako se koristi model atoma sa samo dva energetska nivoa izmedju kojih nastaje spektralna linija. Samo u tom slučaju se može dobiti linearna i eksplicitna zavisnost naseljenosti nivoa od polja zračenja u liniji. Ovaj model dobro opisuje formiranje rezonantnih linija.

U plan-paralelnoj, stacionarnoj i statičnoj atmosferi jednačina prenosa zračenja ima oblik:

$$\mu \frac{dI_{\nu\mu}}{dz} = -\alpha_\nu I_{\nu\mu} + e_\nu \quad . \tag{1}$$

Ovde je $I_{\nu\mu}$ - specifični intenzitet zračenja na frekvenciji ν, koje se prostire u pravcu $\mu = \cos\theta$ (θ je ugao izmedju pravca prostiranja zračenja i normale na plan-paralelne slojeve usmerene ka spolja – z-ose), a α_ν i e_ν su zapreminski koeficijenti apsorpcije i emisije, respektivno.

Ako pretpostavimo da jedini doprinos apsorpciji i emisiji na frekvenciji ν daju vezano-vezani prelazi u atomu, tj. ako zanemarimo vezano-slobodne prelaze na toj frekvenciji do kojih može doći u drugim atomima u gasu, onda su koeficijenti apsorpcije i emisije dati sa:

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_i B_{ij} \varphi_\nu (1 - \frac{B_{ji} n_j \psi_\nu}{B_{ij} n_i \varphi_\nu}) \tag{2a}$$

$$e_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_j A_{ji} \psi_\nu \quad . \tag{2b}$$

Ovde su B_{ij}, B_{ji} i A_{ji} - Ajnštajnovi koeficijenti za apsorpciju, stimulisanu i spontanu emisiju, respektivno; φ_ν i ψ_ν su profili koeficijenata apsorpcije i emisije, a n_i i n_j su naseljenosti donjeg (i) i gornjeg (j) atomskog nivoa izmedju kojih se vrši prelaz u liniji. Član u zagradi predstavlja korekciju za stimulisanu emisiju (negativnu apsorpciju). Za zračenje u UV i optičkom delu spektra u zvezdanim atmosferama ($h\nu >> kT$) stimulisana emisija se može zanemariti. Takodje, pretpostavimo da su emisioni i apsorpcioni profili jednaki:

$$\psi_\nu = \varphi_\nu \quad , \tag{3}$$

što je slučaj kada postoji potpuna nekoherentnost i nekorelisanost zračenja pri rasejanju, odnosno kada su apsorpcija i reemisija potpuno nezavisni dogadjaji. Ova aproksimacija je dobra u tipičnim astrofizičkim uslovima. Pošto profil predstavlja verovatnoću da je apsorbovan/emitovan foton u liniji sa frekvencijom u intervalu $\nu, \nu + d\nu$, onda važi: $\int_0^\infty \varphi_\nu d\nu = 1$.

Ako uvedemo monohromatsku optičku dubinu u liniji:

$$d\tau_\nu = -\alpha_\nu dz \tag{4}$$

i funkciju izvora u liniji, definisanu sa:

$$S_\nu = \frac{e_\nu}{\alpha_\nu} \quad , \tag{5}$$

jednačinu prenosa zračenja (1) možemo prepisati u obliku:

$$\mu \frac{dI_{\nu\mu}}{d\tau_\nu} = I_{\nu\mu} - S_\nu \ . \tag{6}$$

Često se koristi bezdimenzioni oblik jednačine prenosa zračenja u liniji :

$$\mu \frac{dI_{x\mu}}{d\tau} = \varphi_x (I_{x\mu} - S_x) \quad . \tag{7}$$

gde je

$$x = \frac{\nu - \nu_o}{\Delta\nu_D} \tag{8}$$

bezdimenziona frekvencija – frekventno rastojanje od centra linije ν_o izraženo u jedinicama Doplerove širine $\Delta\nu_D = (\nu_0/c)\sqrt{2kT/m}$. Umesto monohromatske optičke dubine τ_x koristi se srednja optička dubina u liniji τ ($d\tau_x = d\tau\varphi_x$). Profil φ_x je u slučaju samo Doplerovskog širenja (usled termalnog kretanja atoma)[1] dat izrazom:

$$\varphi_x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \quad . \tag{9}$$

Zamenjujući izraze (2a) i (2b) u izraz za funkciju izvora (5), koristeći (3) i relacije medju Ajnštajnovim koeficijentima:

$$A_{ji} = \frac{2h\nu_{ij}^3}{c^2} B_{ji}$$

$$g_i B_{ij} = g_j B_{ji} \tag{10}$$

gde su g_i i g_j statističke težine donjeg i gornjeg nivoa prelaza, funkcija izvora u liniji (5) dobija oblik:

$$S^L = \frac{n_j A_{ji}}{n_i B_{ij} - n_j B_{ji}} = \frac{2h\nu_{ij}^3}{c^2} \frac{1}{(n_i/n_j)(g_j/g_i) - 1} \quad . \tag{11}$$

Primetimo da sa aproksimacijom potpune preraspodele (nekoherentnosti) zračenja (3), funkcija izvora u liniji S^L postaje frekventno nezavisna. Jednačina (11) predstavlja implicitni izraz za funkciju izvora jer naseljenosti nivoa zavise od polja zračenja. Zavisnost funkcije izvora od polja zračenja u liniji se može dobiti eksplicitno samo u slučaju atoma sa dva nivoa, zamenom odnosa naseljenosti nivoa n_i/n_j iz jednačine statističke ravnoteže.

Jednačina statističke ravnoteže za atom sa dva nivoa je data sa:

$$n_i(B_{ij}J_\varphi + C_{ij}) = n_j(A_{ji} + B_{ji}J_\varphi + C_{ji}) \quad . \tag{12}$$

Zamenjujući odnos naseljenosti n_i/n_j iz ove jednačine u izraz za funkciju izvora (11), koristeći Ajnštajnove relacije (10), vezu izmedju verovatnoća za sudarnu ekscitaciju C_{ij} i deekscitaciju C_{ji}:

$$C_{ij} = C_{ji} \frac{g_j}{g_i} e^{-h\nu_{ij}/kT}$$

i izraz za Plankovu funkciju:

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu_{ij}^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu_{ij}/kT} - 1} \quad ,$$

dobijamo eksplicitnu relaciju izmedju funkcije izvora u liniji S^L i polja zračenja u liniji J_φ:

[1] U najopštijem slučaju, profil je dat Fojtovom (Voigt) funkcijom:

$$\varphi_x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} H(a,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2}}{(x-y)^2 + a^2} dy$$

gde je parametar $a = \Gamma/(4\pi\Delta\nu_D)$ - parametar prigušenja Γ izražen u jedinicama Doplerove širine.

$$S^L = \varepsilon B + (1-\varepsilon) J_\varphi \quad . \tag{13}$$

Ovde je

$$J_\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x J_x dx = \frac{1}{2} \int \varphi_x dx \int_{-1}^{1} I_{x\mu} d\mu \tag{14}$$

tzv. integral rasejanja (integral specifičnog intenziteta zračenja po pravcima i frekvencijama), a

$$\varepsilon = \frac{C_{ji}(1 - e^{-h\nu_{ij}/kT})}{A_{ji} + C_{ji}(1 - e^{-h\nu_{ij}/kT})}$$

standardni ne-LTR parametar koji predstavlja verovatnoću da je foton termalizovan pri sudarnoj de-ekscitaciji (tj. da je njegova energija pretvorena u termalnu (kinetičku) energiju gasa). U LTR, $\varepsilon = 1$ i $S^L = B_\nu(T)$, dok je u tipičnim ne-LTR slučajevima $\varepsilon << 1$.

2. Zadatak

Rešiti jednačinu prenosa zračenja

$$\mu \frac{dI_{x\mu}}{d\tau} = \varphi_x (I_{x\mu} - S^L) \tag{15}$$

sa funkcijom izvora u liniji

$$S^L = \varepsilon B + (1-\varepsilon) J_\varphi \quad . \tag{16}$$

gde je

$$J_\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x J_x dx = \frac{1}{2} \int \varphi_x dx \int_{-1}^{1} I_{x\mu} d\mu \tag{17}$$

koristeći proceduru Λ iteracije. Na jednostavnom primeru izotermne atmosfere $B = 1$, pokazati da u tipičnim ne-LTR uslovima ($\varepsilon = 10^{-4}$) ova iterativna procedura jako sporo konvergira. Grafički prikazati dobijeno rešenje za $S(\tau)$ i za izlazni fluks zračenja u liniji $F_x(\tau = 0)$.

3. **Numeričko rešavanje problema**

(a) Diskretizacija

Da bi se sistem jednačina (15)-(17) rešio numerički potrebno je da kontinualne vrednosti svih relevantnih promenljivih problema prikažemo na diskretnom skupu frekvencija $x_i (i = 1, ..., NF)$, pravaca, tj. uglova $\mu_j (j = 1, .., NP)$ i dubina $\tau_l (l = 1, .., N)$.

Tada, imamo sistem od $NF * NP$ integro-diferencijalnih jednačina prenosa (za svaku frekvenciju x_i i svaki pravac μ_j):

$$\mu_j \frac{dI_{x_i\mu_j}(\tau)}{d\tau} = \varphi_{x_i} (I_{x_i\mu_j}(\tau) - S^L(\tau)) \quad .$$

U izrazu za funkciju izvora (16), u integralu rasejanja (17), integrale po frekvencijama i pravcima zamenjenjujemo kvadraturnim sumama:

$$\int_{-1}^{1} f(\mu) d\mu = \sum_{j=-NP}^{NP} w_j f(\mu_j)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x) dx = \sum_{i=-NF}^{NF} w_i f(x_i) \quad ,$$

gde su kvadraturne tačke: $\mu_{-j} = -\mu_j$ i $x_{-i} = -x_i$, a za kvadraturne težine w_i i w_j važi:

$$w_{-j} = w_j \ , \quad w_{-i} = w_i$$

$$\sum_{j=-NP}^{NP} w_j = 2 \quad , \sum_{i=-NF}^{NF} w_i = 1 \ .$$

Tako, funkciju izvora (16) možemo prepisati:

$$S^L = \varepsilon B + (1-\varepsilon) \sum_{i=-NF}^{NF} w_i \sum_{j=-NP}^{NP} w_j I_{ij}$$

(b) Λ iteracija

Λ iteracija je najjednostavnija iterativna procedura koja naizmenično rešava jednačinu prenosa zračenja i jednačine statističke ravnoteže. Ova procedura se sastoji iz sledećih koraka: (a) sa datom (zadatom u prvoj iteraciji ili poznatom iz prethodne iteracije) funkcijom izvora S^L rešava se jednačina prenosa zračenja i dobijaju intenziteti $I_{x\mu}$ za svaku datu frekvenciju i pravac, (b) sa tako dobijenim $I_{x\mu}$ izračunavaju se srednji intenziteti (po pravcima i profilu linije) J_φ i dobija nova funkcija izvora S^L. Procedura se ponavlja do konvergencije, tj. dok se ne zadovolji uslov da je maksimalna relativna promena funkcije izvora u dve sukcesivne iteracije manja od unapred zadate vrednosti: $(S^i - S^{i-1})/S^{i-1} < \delta$.

Dobijeno rešenje potrebno je uporediti sa tačnim rešenjem dobijenim metodom diskretnih ordinata.

(c) Tačno rešenje

Problem definisan jednačinama (15)–(17) može se tačno rešiti metodom diskretnih ordinata za jedno-dimenzionalnu sredinu u kojoj je parametar ε konstantan, a Plankova funkcija ili konstantna (izotermna atmosfera sa napr. $B = 1$) ili linearna funkcija optičke dubine (napr. $B(\tau) = 1 + 1.5\tau$). Rešenje ovog jednostavnog problema se koristi za testiranje tačnosti drugih metoda.

Tako, u najjednostavnijem slučaju: ε=const i B = const, tačno rešenje na površini polubeskonačne atmosfere iznosi $S(\tau = 0) = \sqrt{\varepsilon} B$. Na velikim dubinama funkcija izvora teži ravnotežnoj - Plankovoj. Dubina na kojoj $S \to B$, zove se dubina termalizacije L_T. Ona zavisi od profila φ_x i za Doplerovo širenje (Gausov profil) $L_T \approx 1/\varepsilon$.

Tako se za izotermnu sredinu ($B = 1$) datog ne-LTR parametra ε, $S(\tau)$ menja od $S = \sqrt{\varepsilon}$ na $\tau = 0$ do $S = 1$ na $\tau > 1/\varepsilon$.

(d) Neka uputstva za rešavanje

Diskretizacija po dubini

Za numeričko rešavanje potrebno je jednačinu prenosa diskretizovati po dubinama. Dubine $\{\tau_l\}, l = 1, N$ se biraju ravnomerno u logaritamskoj skali, po 10 dubina u svakoj dekadi. Tako se za niz tačaka po dubini može uzeti: $\tau = 0, 1 \cdot 10^{-3}, 1.25 \cdot 10^{-3}, 1.5 \cdot 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-3}, 2.5 \cdot 10^{-3}, 3 \cdot 10^{-3}, 4 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-3}, 6.5 \cdot 10^{-3}, 8 \cdot 10^{-3}, 1 \cdot 10^{-2}, ..., 8 \cdot 10^{n+1}, 1 \cdot 10^{n+2}$, gde je n-izložilac u $\varepsilon = 10^{-n}$. Na primer, za $\varepsilon = 10^{-4}$, razmatraćemo kao polubeskonačnu sredinu onu čija je najdublja tačka $\tau_N = 10^6$.

Izbor tačaka za integraciju po frekvencijama i pravcima

Pravilan izbor intervala koji pokriva kvadraturna formula za integraciju po frekvencijama je značajan. Ovaj interval bi trebalo da je dovoljno veliki da obuhvati celu oblast u kojoj se vrši prenos zračenja u liniji, tj. da poslednja frekventna tačka NF bude van frekvencije x_g na kojoj je za $\tau = L_T$ (najveću optičku dubinu na kojoj se vrši prenos zračenja u liniji) monohromatska optička dubina jednaka jedinici:

$$\tau_{x_g} = \tau \varphi_{x_g} = L_T \varphi_{x_g} \approx 1$$

Pošto je za Dopplerov profil $L_T \approx 1/\varepsilon$, da bismo obuhvatili sve fotone u liniji uzmimo da je frekventni opseg $(-x_{NF}, x_{NF})$ definisan sa:

$$\varphi_{x_{NF}} = \varepsilon/10 \ ,$$

odakle je

$$x_{NF} = \sqrt{ln(\frac{10}{\varepsilon\sqrt{\pi}})} \ .$$

Za numeričko rešavanje integrala može se koristiti bilo koja kvadraturna formula (trapezna, Simpsonova, itd.), ali je u kodovima koji rešavaju probleme prenosa zračenja uobičajeno korišćenje Gausove kvadraturne formule. Tako, u rešavanju ovog zadatka za frekventne tačke koristiti Gauss-Legendre-ovu kvadraturnu formulu sa 10 tačaka na intervalu $(0, x_{NF})$. Za pravce koristiti 4 tačke na intervalu (0,1).

Kvadraturne tačke i težine

Neka su z_i i w_i tablične vrednosti nula i težina za Gausovu integraciju (Gauss - Legendre-ovu kvadraturu) na intervalu (-1,1). Onda je:

$$\int_{-1}^{1} f(z)dz = \Sigma w_i f(z_i) \ .$$

Nule x_i i težine W_i za integraciju na nekom intervalu (a, b) naći ćemo pomoću

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot z)dz = \frac{b-a}{2} \Sigma w_i f(x_i) = \Sigma W_i f(x_i)$$

gde je

$$W_i = \frac{b-a}{2} \cdot w_i$$

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot z_i$$

Tako ćemo za integraciju po pravcima μ_j na intervalu (0,1) imati kvadraturne težine $W_j = w_j/2$, a za integraciju po frekvencijama x_i na intervalu $(-x_{NF}, x_{NF})$, $W_i = x_{NF}\, w_i$.

Pošto koristimo integraciju po profilu linije

$$J_\varphi = \int \varphi_x J_x dx$$

redefinisaćemo težine W_i za integraciju po frekvencijama:

$$J_\varphi = \int \varphi_x J_x dx = \sum_i \varphi_i W_i J_i = \sum_i A_i J_i$$

gde je $A_i = \varphi_i W_i$ i gde mora biti ispunjen uslov normiranja

$$\sum \varphi_i W_i = \sum A_i = 1 \ .$$

Izračunavanje intenziteta zračenja sa poznatom funkcijom izvora

S obzirom da je prenos zračenja granični problem, sa datim graničnim uslovima za ulazno zračenje na gornjoj granici atmosfere ($I^-_{x\mu}(\tau_1) = 0$) i za izlazno zračenje na donjoj granici ($I^+_{x\mu}(\tau_N) = S(\tau_N) + \frac{\mu}{\varphi_x} S'(\tau_N)$), jednačinu prenosa sa poznatom funkcijom izvora rešavaćemo posebno za $I^-_{x\mu}(\tau)$ i $I^+_{x\mu}(\tau)$.

Koristićemo integralni oblik jednačine prenosa koji opisuje evoluciju specifičnog intenziteta duž datog pravca μ.

Za ulazno zračenje specifični intenzitet na frekvenciji x i u pravcu μ na dubini τ_l dat je sa:

$$I^-_{x\mu}(\tau_l) = \int_0^{\tau_l} S(t) e^{-(\tau_l - t)\varphi_x/\mu} \frac{dt\varphi_x}{\mu} \ .$$

Polazeći od gornjeg graničnog uslova (na $l = 1$), na svim ostalim dubinama $l = 2, N$ računaju se (iz sloja u sloj) intenziteti za ulazno zračenje prema:

$$I^-_{x\mu}(\tau_l) = I^-_{x\mu}(\tau_{l-1})e^{-\Delta\tau_l\varphi_x/\mu} + \int_{\tau_{l-1}}^{\tau_l} S(t)e^{-(\tau_l - t)\varphi_x/\mu}\frac{dt\varphi_x}{\mu} \quad .$$

Integral u gornjoj jednačini se može analitički izračunati modeliranjem funkcije izvora $S(\tau)$ polinomom na uzastopnim intervalima optičkih dubina (τ_{l-1}, τ_l). Parcijalnom integracijom dobijamo:

$$I^-_{x\mu}(\tau_l) = I^-_{x\mu}(\tau_{l-1})e^{-\Delta\tau_l\varphi_x/\mu} + [S(\tau_l) - \frac{\mu}{\varphi_x}S'(\tau_l) + \frac{\mu^2}{\varphi_x^2}S''(\tau_l) - ...]-$$

$$[S(\tau_{l-1}) - \frac{\mu}{\varphi_x}S'(\tau_{l-1}) + \frac{\mu^2}{\varphi_x^2}S''(\tau_{l-1}) - ...]e^{-\Delta\tau_l\varphi_x/\mu} \tag{18}$$

gde je $\Delta\tau_l = \tau_l - \tau_{l-1}$. Zaustavljamo se na odgovarajućim izvodima funkcije izvora u zavisnosti kojim polinomom aproksimiramo $S(\tau)$ izmedju dve uzastopne tačke po dubini.

Slično, za izlazno zračenje na frekvenciji x i u pravcu μ na dubini τ_l imamo:

$$I^+_{x\mu}(\tau_l) = \int_{\tau_l}^{\infty} S(t)e^{-(t-\tau_l)\varphi_x/\mu}\frac{dt\varphi_x}{\mu} \quad .$$

Polazeći od donjeg graničnog uslova (za $l = N$), iz sloja u sloj (za $l = N-1, 1$) računaju se intenziteti za izlazno zračenje prema:

$$I^+_{x\mu}(\tau_{l-1}) = I^+_{x\mu}(\tau_l)e^{-\Delta\tau_l\varphi_x/\mu} + \int_{\tau_{l-1}}^{\tau_l} S(t)e^{-(t-\tau_{l-1})\varphi_x/\mu}\frac{dt\varphi_x}{\mu} \quad .$$

Parcijalnom integracijom dobijamo:

$$I^+_{x\mu}(\tau_{l-1}) = I^+_{x\mu}(\tau_l)e^{-\Delta\tau_l\varphi_x/\mu} + [S(\tau_{l-1}) + \frac{\mu}{\varphi_x}S'(\tau_{l-1}) + \frac{\mu^2}{\varphi_x^2}S''(\tau_{l-1}) + ...]-$$

$$[S(\tau_l) + \frac{\mu}{\varphi_x}S'(\tau_l) + \frac{\mu^2}{\varphi_x^2}S''(\tau_l) + ...]e^{-\Delta\tau_l\varphi_x/\mu} \tag{19}$$

(*) Aproksimacija $S(\tau)$ segmentima prave izmedju dve tačke τ_l i τ_{l-1}

$$S'(\tau_l) = S'(\tau_{l-1}) = \frac{S(\tau_l) - S(\tau_{l-1})}{\Delta\tau_l}$$

Uvodeći skraćenu notaciju: $z = \Delta\tau_l\varphi_x/\mu$, jednačine (18) i (19) možemo u linearnoj aproksimaciji prepisati kao:

$$I^-_{x\mu}(\tau_l) = I^-_{x\mu}(\tau_{l-1})e^{-z} + a1 \cdot S(\tau_l) + a_2 \cdot S(\tau_{l-1})$$

$$I^+_{x\mu}(\tau_{l-1}) = I^+_{x\mu}(\tau_l)e^{-z} + a1 \cdot S(\tau_{l-1}) + a_2 \cdot S(\tau_l)$$

gde su koeficijenti a_1 i a_2 dati sa:

$$a_1 = 1 - (1 - e^{-z})/z$$

$$a_2 = (1 - e^{-z})/z - e^{-z}$$

(**) Aproksimacija $S(\tau)$ segmentima parabole izmedju dve tačke τ_l i τ_{l-1}

$$S''(\tau_l) = S''(\tau_{l-1}) = \frac{S'(\tau_l) - S'(\tau_{l-1})}{\Delta\tau_l}$$

Jednačine (18) i (19) u paraboličnoj aproksimaciji možemo prepisati kao:

$$I^-_{x\mu}(\tau_l) = I^-_{x\mu}(\tau_{l-1})e^{-z} + a1 \cdot S(\tau_l) + a_2 \cdot S(\tau_{l-1}) + a_3 \cdot S'(\tau_l) + a_4 \cdot S'(\tau_{l-1})$$

$$I^+_{x\mu}(\tau_{l-1}) = I^+_{x\mu}(\tau_l)e^{-z} + a1 \cdot S(\tau_{l-1}) + a_2 \cdot S(\tau_l) - a3 \cdot S'(\tau_{l-1}) - a4 \cdot S'(\tau_l)$$

gde su koeficijenti $a_1 - a_4$ dati sa:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = -e^{-z}$$

$$a_3 = \frac{\mu}{\varphi_x}((1 - e^{-z})/z - 1)$$

$$a_4 = \frac{\mu}{\varphi_x}(e^{-z} - (1 - e^{-z})/z)\ .$$