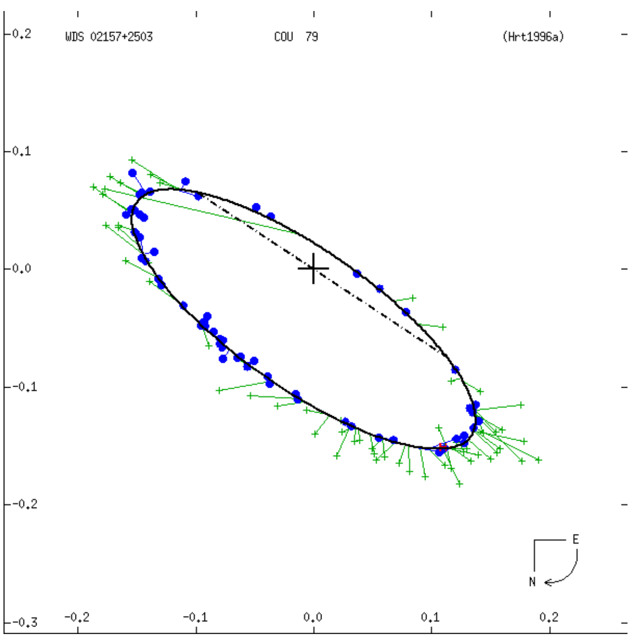
Марко Павловић
Математички Факултет Београд

ТЕМА: Израчунавање орбита визуелно-двојних звезда

1. Увод

Године 1803. Вилијам Хершел је објавио рад у коме је објаснио природу кретања двојних звезда и на тај начин отворио нову област у астрономији која се и данас, више од 200 година касније, развија. Од тог периода почиње масовно откривање и праћење визуелно двојних звезда, а временом, када је посматрачки материјал постао довољно обиман, појавиле су се и методе за одређивање орбиталних елемената визуелно двојних звезда.



Релативна орбита мање сјајне звезде у двојном систему HIP 1242
Слика 1

Двојне звезде су физички системи у којима се компоненте крећу око центра масе под дејством узајамног гравитационог привлачења. Привидна блискост двеју звезда на небеској сфери не значи да оне чине физички двојни систем. Колинеарност праваца ка звездама може бити случајна, док су звезде на различитим удаљеностима од Сунца и такве звезде називамо оптички двојним. У физички двојном систему две звезде ће имати заједничко сопствено кретање а може се и запазити да једна описује путању око друге. Да би се детектовао физички двојни систем неопходна су веома прецизна и дуготрајна посматрања.

Међутим, ово што је управо описано је један вид двојног система-визуелно двојне звезде које су главни предмет разматрања овог рада. У овом случају обе звезде се телескопом виде раздвојене и њихово кретање може да се изучава на основу релативне промене положаја двеју звезда (слика 1). Визуелно двојне звезде су доста раздвојене и споро се крећу, једна у односу на другу, тако да се не могу лако спектроскопски изучавати.

Изучавање двојних звезда обезбеђује начин за одређивање звезданих маса. Претпоставимо да две звезде имају масе M_1 и M_2 и да је њихова релативна путања елипса велике полуосе a и периода обиласка T. Онда трећи Кеплеров закон даје:

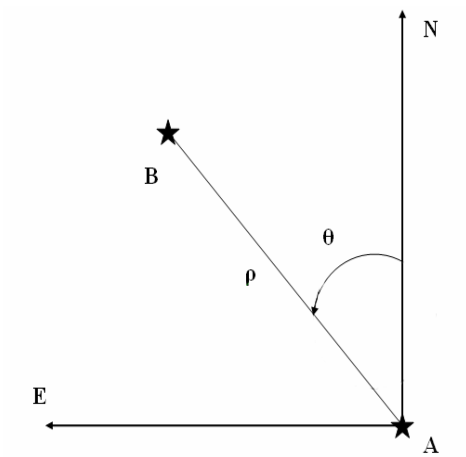
$$M_1 + M_2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} \qquad (1)$$

где је G универзална гравитациона константа.

Помоћу једначине (1) могуће је одредити само збир маса компонената двојног система. У настојању да се одреде масе појединачних компонената неопходно је одредити центар масе система и удаљености компоненти од центра масе.

2. Орбитални елементи двојног система

Нека су А и В две звезде које чине визуелно двојни систем; сјајнија звезда обележава се са А и назива примарном а звезда слабијег сјаја В секундарном звездом у посматраном систему. Посматрање визуелно двојних звезда подразумева одређивање релативне орбите помоћне звезде В у односу на примарну компоненту А. На слици 2 је приказана упрошћена шема двојног система онако како га види посматрач. Приликом посматрања визуелно двојних звезда мери се међусобно угловно растојање компонената $\rho = \overline{AB}$ (у лучним секундама) и положајни угао $\theta = \angle NAB$. Положајни угао се мери од линије AN која је у правцу северног небеског пола тј. дуж деклинацијског круга кроз северни светски пол. Референтна раван путање је раван кроз A нормална на визуру и узета је као $x-y$ раван. За x-осу се по договору узима правац AE а за y-осу узимамо правац AN. Овакво обележавање оса је у складу са конвенцијама датим за стандардне координате на астрографским плочама. Онда је посматрани положај секундарне компоненте (x, y) у односу на примарну дат са:



Визуелно двојни систем са раздвајањем ρ и положајним углом θ
Слика 2

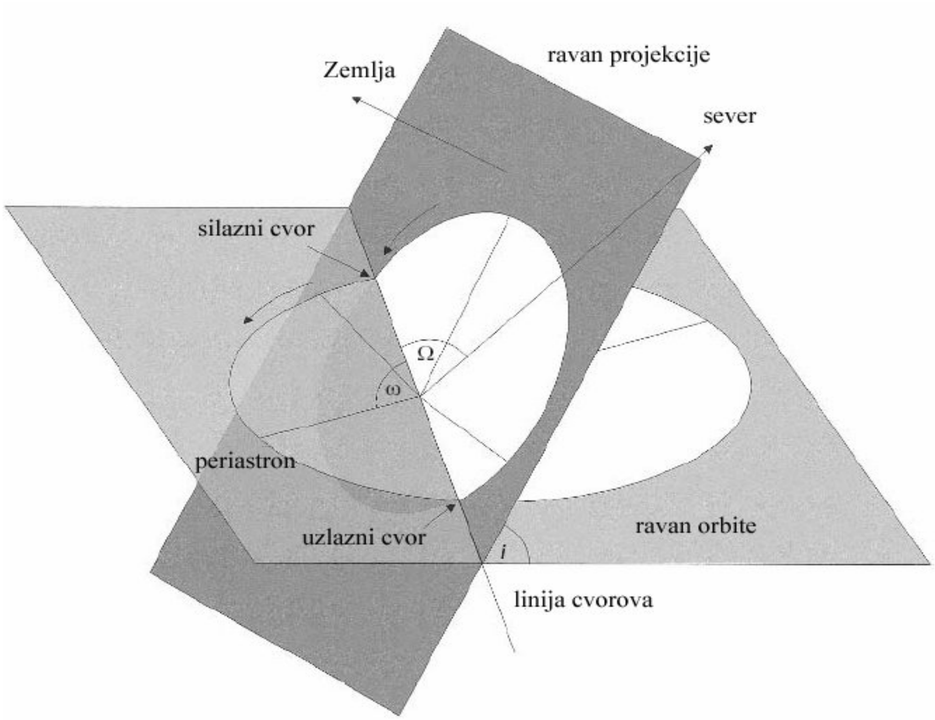
$$x = \rho \sin\theta$$
$$y = \rho \cos\theta \qquad (2)$$

Привидна (посматрана) орбита настаје као пројекција стварне орбите секундарне звезде око примарне на небеску сферу (слика 3). Права путања помоћне звезде око главне је елипса у чијој се једној жижи налази главна звезда. Привидна путања је пројекција ове елипсе на $x-y$ раван и такође је елипса. Велика полуоса привидне путање не одговара великој полуоси праве путање, нити ће се примарна звезда налазити у жижи. Центар привидне путање је пројекција центра праве елипсе.

Положајни угао узлазног чвора Ω је угао који одређује положај линије пресека равни праве и привидне путање у односу на северни небески пол. Овај угао се рачуна између правца ка северном небеском полу и поменуте линије пресека двеју равни. Узлазни чвор је тачка на пресеку равни привидне и праве орбите у којој је кретање секундарне звезде усмерено супротно од правца ка Сунцу. Ова тачка је удаљена $180°$ од друге чворне тачке и може бити одређена једино помоћу мерења радијалних брзина.

Орбитална инклинација i је угао између равни привидне и праве орбите. Опсег вредности орбиталне инклинације налази се у интервалу од $0°$ до $180°$. За вредности $0° \le i < 90°$ орбитално кретање се назива директно. Секундарна звезда се у овом случају креће у смеру у коме позициони углови расту, супротно од кретања казаљке на часовнику.

Периастрон је тачка на стварној орбити у којој је секундарна звезда најближа примарној. **Лонгитуда периастрона** ω је угао између линије чворова и периастрона и мери се у равни праве орбите у смеру кретања секундарне звезде.



Елементи праве и привидне орбите
визуелно-двојног система
Слика 3

Преостали путањски елементи двојног система су велика **полуоса праве орбите** a**, ексцентричност путање** e**, тренутак пролаза кроз периастрон** τ и орбитални **период** T**.** Орбитални период или средње кретање се разматра као независни путањски елемент; то је потребно да би се одредила укупна маса система по једначини (2). Дакле, постоји укупно седам путањских елемената визуелно двојног система (a, e, i, ω, Ω, τ, T).

Путањски елементи двојног система су дефинисани за путању помоћне звезде у односу на главну. Центар масе двојног система има константну брзину у односу на барицентар Сунчевог система а одатле следи константно сопствено кретање и радијална брзина. Ако се измере промене положаја сваке звезде у визуелно двојном систему мерене у односу на друге звезде, могу се одредити елементи путање сваке звезде око центра масе. Ако са a_1 и a_2 обележимо велике полуосе ових путања онда важе једначине:

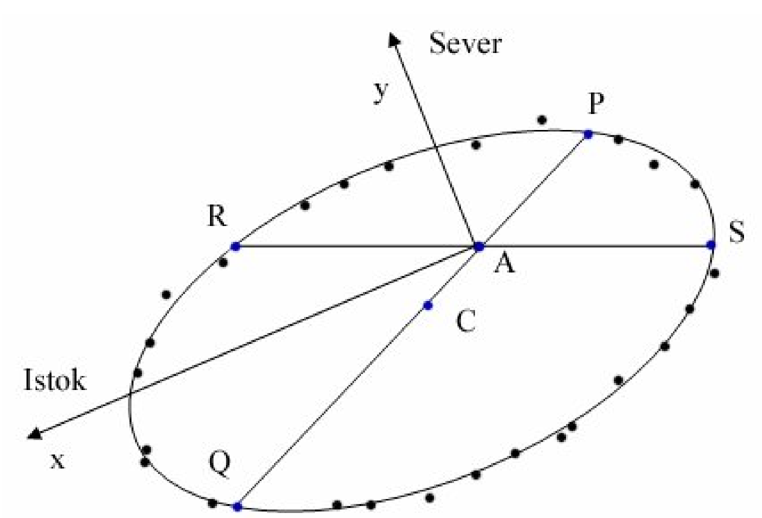
$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= a \\ M_1 a_1 &= M_2 a_2 \end{aligned} \tag{3}$$

Преостали елементи путање су исти као и код релативне путање. Тиме је постигнут основни циљ поступка израчунавања орбита визуелно-двојних звезда а то је одређивање маса звезда у систему. Наиме, Едингтон је у оквиру теорије унутрашње структуре звезда из 1924. године предвидео везу између масе и луминозности звезде. Ова веза следи из чињенице да је у средишту масивнијих звезда температура виша па је стрмији и градијент температуре дуж звезданог радијуса одакле следи већи енергетски флукс а тиме и већи сјај. Тако је на основу посматрања, у почетку само визуелно двојних звезда и одређивања маса њихових компонената, изведена емпиријска релација маса-луминозност и маса-болометријска магнитуда. Ова тзв. "релација маса-сјај", иако важи само за ограничен скуп звезда тј. само звезде главног низа, представља један од најзначајнијих резултата проучавања двојних звезда.

Прве метода за одређивање орбиталних елемената биле су графичке, док је прву аналитичку методу предложио Ковалски (Ковальский, 1951). Касније се појављује много нових метода које се могу применити у сврху одређивања орбиталних елемената, а једна од познатијих била је Тил-Инесова (T. N. Thiele 1883, R. T. A. Innes 1926). Све аналитичке методе можемо поделити у две групе: геометријске и динамичке. Код геометријских метода, прво се одређује пет геометријских елемената који дефинишу привидну орбиту, а затим се одређују период P и тренутак проласка кроз периастрон τ на основу тих елемената али без укључивања својства кретања, тј. другог Кеплеровог закона што је уједно и основни недостатак. Динамичке методе не одређују најпре привидну орбиту као што то раде геометријске методе већ одмах рачунају све орбиталне елементе и при томе у ово рачунање укључују и својства кретања. Главни недостатак динамичке методе је потреба познавања секторске брзине. У новије време се које за одређивање орбиталних параметара користе нумеричке методе.

3. Метода Тил-Инеса (Thiele-Innes)

Посматрања визуелно двојних звезда могу обухватати веома дуге временске интервале да би орбита могла да се изведе из тих података. Орбитални периоди од преко 100 година врло често се јављају. Свако посматрање визуелно двојног система даје угаоно раздвајање двеју звезда ρ, положајни угао θ, и време на које се ови подаци односе. Тако се добијају сетови параметара (ρ, θ, t) или, што је еквивалентно, (x, y, t). Цртање тачака одређених координатама (x, y) даје привидну (пројектовану) путању у $x-y$ равни (слика 4).



Привидна релативна путања визуелно двојног система
Слика 4

Као што је познато права путања помоћне звезде је елипса у чијој се једној жижи налази главна звезда а привидна путања је пројекција ове елипсе на раван нормалну на правац визуре.

Природа пројекције мора се анализирати извођењем путањских елемената праве орбите. У почетку ово се може добити из геометријских разматрања али је потребно користити и динамичке принципе што је особеност методе Тил-Инеса. Ова метода се веома често користи за редукцију посматрања визуелно-двојних звезда.

Претпоставимо да је двојни систем посматран током целог периода и да је измерен орбитални период T као и да је познат центар привидне елипсе C. Обележимо са P и Q тачке пресека праве која садржи центар елипсе и примарну звезду са привидном путањом.

Битна чињеница, која се лако математички доказује, је да се приликом пројектовања путање праве пројектују у праве и односи дужина линија остају очувани. Из ове чињенице следи да су тачке на пројекцији Q, C, A и P редом пројекције апоастрона, центра елипсе, жиже тј. тачке у којој се налази примарна компонента и периастрона. Тражени тренутак проласка кроз периастрон τ је заправо тренутак проласка кроз тачку P. Из чињенице да су дужински односи сачувани следи да су ексцентричност e привидне и праве елипсе једнаки:

$$e = \frac{CA}{CP} \tag{4}$$

Како су нам сада познати период двојног система T и тренутак проласка кроз периастрон τ, можемо у сваком тренутку t добити средњу аномалију:

$$M = \frac{2\pi}{T}\left(t-\tau\right) \tag{5}$$

Задатак је одредити тачку R са слике 4 тј. тачку у којој је права аномалија $\upsilon = 90°$. Ову тачку ћемо наћи посредно, налажењем времена пролаза кроз ову тачку. Позната је веза између праве аномалије, ексцентричне аномалије и ексцентричности:

$$\tan^2\frac{\upsilon}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2} \tag{6}$$

Даље из услова да је $\upsilon = 90°$ добијамо везу:

$$\tan^2\frac{E}{2} = \frac{1-e}{1+e} \tag{7}$$

и после сређивања и примене познате тригонометријске релације за тангенс половине угла добијамо везу између ексцентричности и ексцентричне аномалије у траженој тачки R:

$$\cos E = e \tag{8}$$

Коначно добијамо тренутак пролаза секундарне звезде кроз R користећи познату Кеплерову једначину $M = E - e\sin E$:

$$t = \tau + \frac{T}{2\pi}\left(\arccos e - e\sqrt{1-e^2}\right) \tag{9}$$

Лако је уочити да је на слици 4 линија RS заправо пројекција latus rectum-a праве елипсе.

Добили смо координате периастрона $P(x_1, y_1)$ и тачке $R(x_2, y_2)$ на путањи у којој је вредност праве аномалије $\upsilon = 90°$. У методи која се разматра уводе се четири константе дефинисане на следећи начин које се иначе називају и константама Тил-Инеса:

$$\begin{aligned}
X_1 &\equiv \frac{x_1}{1-e} = a\left(\cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i\right)\\
Y_1 &\equiv \frac{y_1}{1-e} = a\left(\cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i\right)\\
X_2 &\equiv \frac{x_2}{1-e^2} = a\left(-\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos i\right)\\
Y_2 &\equiv \frac{y_2}{1-e^2} = a\left(-\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\sin\Omega\cos i\right)
\end{aligned} \tag{10}$$

Помоћу ових константи које су нам сада познате добићемо преостале елементе. Наиме одређеним алгебарским трансформацијама непознате величине добићемо помоћу константи Тил-Инеса. Комбиновањем ових једначина и сређивањем добијамо следеће везе:

$$
\begin{aligned}
\tan\left(\omega+\Omega\right) &= \frac{X_1 - Y_2}{X_2 + Y_1} \\
\tan\left(\omega-\Omega\right) &= \frac{X_1 + Y_2}{X_2 - Y_1}
\end{aligned} \tag{11}
$$

Из последњег система једначина могу се добити вредности $\left(\omega+\Omega\right)$ и $\left(\omega-\Omega\right)$ тј. да би добили једнозначно ове вредности неопходно је консултовати и једначине (11) како би видели знаке синуса и косинуса у систему (12). Међутим иако се збир и разлика углова ω и Ω могу једнозначно одредити из свега наведеног, ипак постоји двозначност приликом одређивања самих углова. Ова двозначност потиче из чињенице да додавање 180° на углове у једначини (11) ништа не мења. Ова двојност је уклоњена ограничавањем положајног угла чвора на интервал $0 \le \Omega \le 180°$. Овим договором одређено је потпуно и ω

Инклинацију тј. нагиб путање i добијамо комбиновањем једначина (10) и коришћењем добијених вредности углова ω и Ω:

$$
\tan^2 \frac{i}{2} = \frac{1-\cos i}{1+\cos i} = -\frac{\left(X_1 + Y_2\right)\sin\left(\omega+\Omega\right)}{\left(X_1 - Y_2\right)\sin\left(\omega-\Omega\right)} \tag{12}
$$

Коначно из било које једначине од четири колико их има у (10) добијамо велику полуосу a. На пример коришћењем прве једначине добија се:

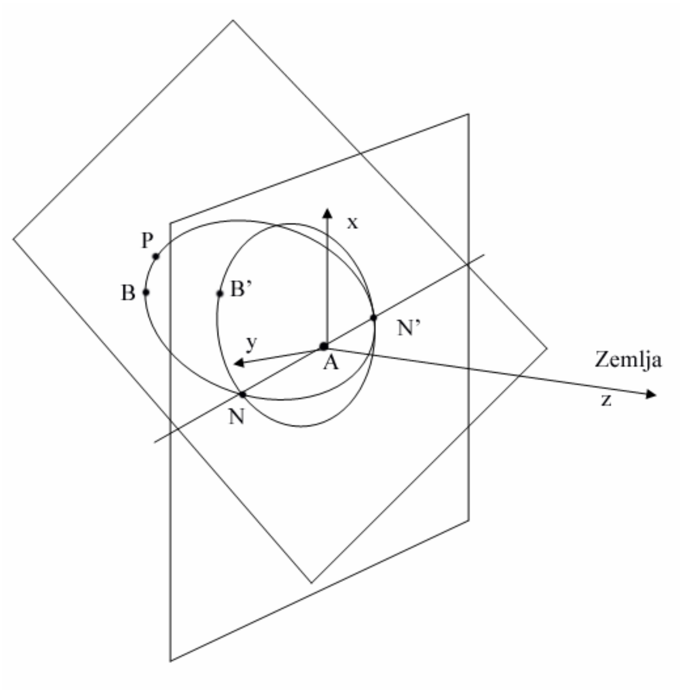
$$
a = \frac{X_1 - Y_2}{\sin\left(\omega+\Omega\right)\left(1+\cos i\right)} \tag{13}
$$

Сада је комплетирано одређивање свих путањских елемената методом Тил-Инеса. Постоји само мали проблем а то је чињеница да не знамо који од одређених чворова је узлазни а који силазни, мада ово не утиче на одређивање маса звезда које је главни циљ. Ова неодређеност се отклања коришћењем спектроскопских мерења.

Суштина описане методе је одређивање путањских елемената коришћењем тренутака који одговарају различитим тачкама на путањи. Конкретно, у овом раду је размотрено одређивање параметара орбите коришћењем тачака P и R за рачунање константи Тил-Инеса, мада се могу користити ма које тачке на путањи. Поменуте тачке су очигледно узете због једноставности релација које се добијају.

3. Метода Ковалског (Ковальский).

Метода која се разматра у текућем одељку је једна од најстаријих геометријских метода и дуго је била у употреби. Као и код других метода овог типа један од главних проблема је одређивање периода T и тренутка проласка кроз периастрон τ, јер се често они не могу најбоље ускладити са већ добијеном елипсом (тј. са осталим орбиталним елементима). Ковалски је рад у коме је увео своју методу рачунања орбита визуелно двојних звезда објавио 1951. године. Рад који је публикован није садржао извођења формула и садржао је коментаре Д. Ј. Мартинова.



Равни праве и привидне путање са обележеним координатним осама

Слика 5

У циљу излагања овог метода дата је слика 5 како би било лакше уочити коришћене координатне системе. На слици 5 коришћене су стандардне ознаке A и B за примарну и секундарну звезду. Нека је $N'BN$ раван праве орбите а $N'B'N$ раван привидне орбите која је нормална на правац ка Земљи (правац визуре). Периастрон је обележен са P.Са овако уведеним ознакама кретање пратиоца око главне звезде одређено је растојањем $\rho = AB'$ и позиционим углом $\theta = xAB'$ који се рачуна од пројекције Ax усмерене ка северном небеском полу у смеру супротном од казаљке на часовнику гледајући са Земље.

Метода Ковалског даје елементе праве орбите преко коефицијената једначине привидне путање:

$$a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + 2a_{11}xy + 2a_{10}x + 2a_{01} - 1 = 0 \qquad (14)$$

Знајући координате тачака (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... можемо добити ових 5 коефицијената које ћемо искористити за добијање орбиталних параметара.

У координатном систему $Axyz$ означеном на слици 5, једначина (14), обзиром да не садржи координату z, представља елиптични цилиндар чија је бочна страна паралелна правцу z-осе. Права орбита је пресек овог цилиндра са равни $N'BN$. Уведимо нови координатни систем $A\xi\eta\zeta$, у коме је оса $A\xi$ усмерена ка периастрону, оса $A\eta$ ка тачки орбите за коју је вредност праве аномалије $\upsilon = 90°$ и оса $A\zeta$ у смеру нормале на раван $N'BN$. У новом координатном систему права орбита се описује једначином:

$$\frac{(\xi + ae)^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1 \qquad (15)$$

Циљ је успоставити везу међу координатама система $A\xi\eta\zeta$ и система $Axyz$. Уколико се систем $Axyz$ заротира за угао Ω око осе z добија се координатни систем $Ax'y'z'$ чија се оса Ax' поклапа са AN. Затим се $Ax'y'z'$ заротира за угао i око осе Ax' и добија се координатни систем $Ax''y''z''$ код кога се раван $Ax''y''$ поклапа са равни праве орбите. Ако се $Ax''y''z''$ заротира за угао ω око осе Az'' добија се крајњи систем $A\xi\eta\zeta$. Показује се да важе следеће релације:

$$\begin{aligned} x &= x''\cos\Omega - y''\sin\Omega\cos i + z''\sin\Omega\sin i \\ y &= x''\sin\Omega + y''\cos\Omega\cos i - z''\cos\Omega\sin i \end{aligned} \tag{16}$$

Ове једначине се замене у (15) и користи се чињеница да је $z''=0$:

$$\begin{aligned} & a_{20}\left(x''\cos\Omega - y''\sin\Omega\cos i\right)^2 + a_{02}\left(x''\sin\Omega + y''\cos\Omega\cos i\right)^2 \\ & +2a_{11}\left(x''\cos\Omega - y''\sin\Omega\cos i\right)\left(x''\sin\Omega + y''\cos\Omega\cos i\right) \\ & +2a_{10}\left(x''\cos\Omega - y''\sin\Omega\cos i\right) + 2a_{01}\left(x''\sin\Omega + y''\cos\Omega\cos i\right) - 1 = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Из аналитичке геометрије се добија веза између координатног система $Ax''y''z''$ и $A\xi\eta\zeta$:

$$\begin{aligned} \xi &= x''\cos\omega + y''\sin\omega \\ \eta &= -x''\sin\omega + y''\cos\omega \end{aligned} \tag{18}$$

Ове изразе заменимо у једначину (16):

$$\frac{x''\cos\omega + y''\sin\omega + ae}{a^2} + \frac{-x''\sin\omega + y''\cos\omega}{b^2} = 1 \tag{19}$$

Коефицијенти једначине (17) који стоје редом уз x''^2, y''^2, $x''y''$, x'', y'' и слободан члан једнаки су коефицијентима једначине (19) помноженим константом коју ћемо обележити са χ. Добијамо систем од 6 једначина:

$$\begin{aligned} & a_{20}\cos^2\Omega + a_{02}\sin^2\Omega + a_{11}\sin 2\Omega = \chi\left(a^{-2}\cos^2\omega + b^{-2}\sin^2\omega\right) \\ & \cos^2 i\left(a_{20}\sin^2\Omega + a_{02}\cos^2\Omega - a_{11}\sin 2\Omega\right) = \chi\left(a^{-2}\sin^2\omega + b^{-2}\cos^2\omega\right) \\ & \cos i\left(-a_{20}\sin 2\Omega + a_{02}\sin 2\Omega + 2a_{11}\cos 2\Omega\right) = \chi\left(a^{-2} - b^{-2}\right)\sin 2\omega \\ & a_{01}\sin\Omega + a_{10}\cos\Omega = \chi e a^{-1}\cos\omega \\ & \cos i\left(a_{01}\cos\Omega - a_{10}\sin\Omega\right) = \chi e a^{-1}\sin\omega \\ & 1 = \chi\left(1 - e^2\right) \end{aligned} \tag{20}$$

Циљ је из ових шест једначина елиминисати параметар χ и добити a, e, Ω, i, ω. После низа алгебарских трансформација добија се релација:

$$\tan 2\Omega = \frac{2N}{M - L} \tag{21}$$

где су $L = a_{02} + {a_{01}}^2$, $M = a_{20} + {a_{10}}^2$ и $N = a_{11} + a_{01}a_{10}$. Одатле се добија угао Ω. Добија се и израз за инклинацију орбите:

$$\tan^2 i = \frac{\left(L - M\right)\cos 2\Omega - 2N\sin 2\Omega}{L\sin^2\Omega + M\cos^2\Omega + N\sin 2\Omega} \tag{22}$$

Аргумент периастрона ω добијамо као:

$$\tan\omega = \frac{\left(a_{01}\cos\Omega - a_{10}\sin\Omega\right)\cos i}{a_{01}\sin\Omega + a_{10}\cos\Omega} \tag{23}$$

Елиминацијом параметра p добија се ексцентричност орбите:

$$e = \left[\frac{2\left(a_{01}\sin\Omega + a_{10}\cos\Omega\right)\left(a_{01}\cos\Omega - a_{10}\sin\Omega\right)\cos i}{\sin 2\omega}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{24}$$

Описаним поступком добијали смо редом параметре Ω, i, ω и e.

Да би добили време проласка кроз периастрон τ и период обиласка T узмимо неколико позиционих углова у зависности од времена $\left(t_k, \theta_k\right)$. Веза ових података са правом аномалијом је:

$$\tan\left(\upsilon_k + \omega\right) = \tan\left(\theta_k - \Omega\right)\sec i \tag{25}$$

коју можемо добити из наведене једначине. Користећи праву аномалију добијамо ексцентричну аномалију:

$$\tan\frac{E_k}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\upsilon_k}{2} \tag{26}$$

Из ексцентричне аномалије добијамо средњу аномалију користећи Кеплерову једначину:

$$M_k = E_k - e\sin E_k \tag{27}$$

Из везе $M = n\left(t - \tau\right)$ сваки пар података $\left(t_k, \theta_k\right)$ даје једначину облика:

$$nt_k - n\tau = M_k \tag{28}$$

одакле се коначно добијају време проласка кроз периастрон τ и период обиласка.

Велика полуоса путање a добија се из једначине:

$$a = r_k\left(1 + e\cos\upsilon_k\right)\left(1 - e^2\right)^{-1} \tag{29}$$

коришћењем сетова података $\left(t_k, \rho_k, \theta_k\right)$.

4. Друге методе одређивања орбиталних параметара

Докобова метода предложена је од стране Докоба (Docobo 1985) и користи се за одређивање орбита визуелно двојних звезда. Користе се три изабране тачке кроз које орбита пролази и заснована је на пресликавању интервала $\left(0, 2\pi\right)$ на фамилију орбита које пролазе кроз те три тачке. Њена основна предност лежи у чињеници да није потребно претходно одређивање константне површине (Docobo & Ling 1999; Docobo et. al. 2000). Три тачке, кроз које ће орбита пролазити, могу да се изаберу из посматрања али то није неопходно већ се могу узети и нормална места више посматрања. Тестирајући ову методу показало се, да је избор ове три тачке изузетно важан за добро одређивање орбиталних елемената, што се могло и очекивати с обзиром на чињеницу да орбите мора да прође кроз ове тачке.

Пурбеова метода је предложена од стране Пурбеа (Pourbaix 1994) и на основу начина одређивања орбиталних елемената визуелно двојне звезде, сврстава се у нумеричке методе. Састоји се из два главна дела, тј. два нумеричка поступка за одређивање глобалног минимума функције више променљивих (у овом случају тражи се минимум суме одступања O-C у функцији седам орбиталних елемената). Први део заснива се на алгоритму под називом “simulated annealing” и служи за аутоматско добијање почетних елемената у околини глобалног минимума. У другом делу користи се Пауелов (Powell) метод за проналажење глобалног минимума на основу почетних услова добијених из првог дела. Као улазни податак код ове методе уносе се процењене границе за период тј. $P_{\max}$ и $P_{\min}$ које се одређују на основу промене позиционог угла у интервалу времена у ком постоје посматрања те звезде.

Ковалски-Олевић (КОВОЛЕ) метода је усавршена верзија старије методе Ковалског која је детаљно описана у претходном одељку. Наиме мноштво недостатака методе Ковалског, између осталих и то да често код кратких лукова није могуће ни добити елипсу, довело је до тога да ова метода изгуби на значају. То је трајало све док Олевић (Ćatović & Olević 1992, Olević & Cvetković 2004) није предложио начин да се ови проблеми избегну. Предложена унапређења састоје се, укратко, у следећем: на делу путање звезде пратиоца око главне звезде, који није покривен посматрањима, поставимо неколико “лажних тачака” тј. фиктивних посматрања и то тако што фиксирамо позициони угао а угловно растојање варирамо у унапред задатим границама са произвољним кораком. На тај начин ми кроз постојећа посматрања проверавамо велики број елипси (не само једну као у оригиналној методи Ковалског) и затим одређујемо период и тренутак проласка кроз периастрон тако да сума одступања буде минимална. Лажне тачке продужавају лук из кога се одређује елипса па се зато елипса може увек добити. Границе које задајемо за угловно растојање, код лажних тачака, одређујемо тако што постојећа посматрања представимо у правоуглом координатном систему и проценимо колика би могла бити минимална и максимална вредност за угаоно растојање, за фиксирану вредност положајног угла.

5. Масе визуелно двојних звезда

Код визуелно двојних велика полуоса a одређена је као угао у лучним секундама. Изражена је у астрономским јединицама (АЈ) као $\frac{a}{p}$, где је p паралакса система. Према договору, период T се изражава у годинама, а масе у јединицама масе Сунца. У тим јединицама једначина (1) се своди на:

$$M_1 + M_2 = \frac{a^3}{p^3 T^2} \tag{30}$$

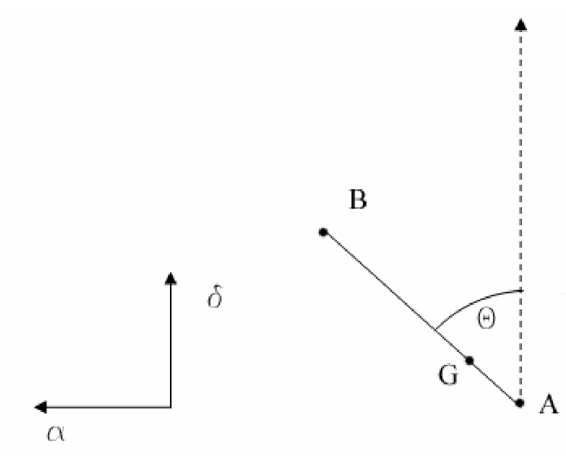
Коришћење последње релације претпоставља да се тригонометријска паралакса двојног система може мерити. Иако постоје визуелно двојне блиске Сунцу за које се може применити дата релација, у већини случајева то не важи.

Ако је систем на сувише великом растојању да би се могла измерити тригонометријска паралакса, масе звезда су процењене на основу њихове спектралне класификације. Тада се из једначине (30) може добити паралакса система:

$$p = \frac{a}{T^{\frac{2}{3}} \left(M_1 + M_2\right)^{\frac{1}{3}}} \tag{31}$$

Паралакса одређена на овај начин назива се динамичка паралакса. Динамичка паралакса је погодна за одређивање даљине звезда.

Једначина (30) даје само укупну масу двојног система. Масу појединачних компонената немогуће је одредити познавањем само релативне орбите већ је потребно испитати кретање звезда у односу на друге звезде на небеској сфери.



Одређивање маса визуелно двојног система
Слика 6

На слици 6 тачке A и B стандардно означавају примарну и секундарну компоненту а са G је обележен центар масе овог система. Угаоно растојање компоненти мерено је у лучним секундама. Тада важи:

$$GA = \frac{M_2}{M_1} GB = \frac{M_2 \rho}{M_1 + M_2} \tag{32}$$

Координате (α, δ) главне звезде A мерене су са низа фотографских плоча. Координате центра масе (α_G, δ_G) су на почетку непознате али коришћењем чињенице да се ова тачка креће равномерно по небеској сфери добијамо следећу зависност од времена:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \mu_\alpha t - \frac{M_2}{M_1 + M_2} \rho \sin\theta \sin 1'' \\ \delta &= \delta_0 + \mu_\delta t - \frac{M_2}{M_1 + M_2} \rho \sin\theta \sin 1'' \end{aligned} \tag{33}$$

где су α_0 и δ_0 константе које одређују ректасцензију и деклинацију звезда на почетку посматрања. Астрографска посматрања главне звезде система за дуги временски период фитују се на облик приказан последњом једначином методом најмањих квадрата одакле се добијају непознате величине (α_0, δ_0), (μ_α, μ_δ) и $\dfrac{M_2}{M_1 + M_2}$. На овај начин су одређене појединачне масе звезда у систему.

Литература

[1] Мирјана Вукићевић-Карабин, Олга Атанацковић-Вукмановић, *Општа астрофизика,* Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2004.

[2] Робин М. Грин, *Астрономија класика у новом руху,* Издање Vesta Co., Београд, 1998.

[3] Wulff D. Heintz, *Double stars,* D. Reidel publishing Co., Swarthmore College, USA, 1978.

[4] М. Ф. Субботин, *Введение в теоретическую астрономию*, Издатељство "Наука", Москва, 1968.

[5] Бојан Новаковић, *Поређење метода за одређивање орбиталних елемената визуелно двојних звезда,* Астрономска астрономија, Београд, 2006.

[6] R. Gili, D. Bonneau, *CCD measurements of visual double stars made with the 74 cm and 50 cm refractors of the Nice Observatory (2nd series),* Astronomy & Astrophysics 378, 954-957 (2001)

[7] S. Siregar, D. Hadi Nugroho, *On the orbit of Visual Binary ADS 8119 AB,* ICMNS, 2006.

[8] J. A. Docobo, *On the analytic calculation of visual double star orbits,* Celest. Mech., 36, 143, *1985.*

[9] Jolyon M. Johnson, Russell M. Genet, *Measurements of the visual double star STF 2079,* The Journal of Double Star Observations, August 20, 2007.