ТЕОРИЈА
ДЕТЕРМИНАНАТА

НАПИСАО

Др. БОГДАН ГАВРИЛОВИЋ

ПРОФЕСОР ВЕЛИКЕ ШКОЛЕ.

У БЕОГРАДУ

ШТАМПАНО У ДРЖАВНОЈ ШТАМПАРИЈИ

1899.

ПРЕДГОВОР.

Теорија детерминаната је део Модерне Више Алгебре. Она се примењује готово у свима деловима математичких наука — у чистој Алгебри исто онако, као и у Аналитичној Геометрији, у Вишој Анализи исто онако, као и у Теорији Бројева. Кад се то уочи, онда, мислим, не ће требати нарочито истицати, од колике је вредности једна књига у којој би били изнесени сви принципи тог важног дела оперативне математике и с те стране ће зар и ова Теорија Детерминаната морати заузети угледно једно место у нашој сиромашној научној књижевности.

Специјално бих о овој књизи имао да кажем ово. Хтео сам да изнесем основе целе теорије заједно са теоријом специјалних важнијих детерминаната, али сам при томе нарочито пазио, да онај, који би хтео да што дубље уђе у модерну Аналитичну Геометрију, до што бољих основа дође. Тим ће се моћи протумачити, зашто се уз саму теорију детерминаната, која је у овој књизи обрађена у првих шест одељака, налазе у последња два одељка и основи теорије квадратних облика заједно са основима теорије инваријаната.

У излагању сам, као што ће се вйдети, био прост. У томе сам се много угледао на Енглезе и Французе.

Примера има много. Без њих се Науке не уче: *Jn scientiis addiscendis exempla magis prosunt quam praecepta* — вели Њутн.

Грешака при штампању нема и у томе ће се ово дело моћи равнати са најбољим енглеским издањима.

При писању ове књиге била су ми нарочито при руци дела ових писаца: Baltzer, Brioschi, Burnside-Panton, Cayley, Carnoy, Clebsch, Dostor, Gordan, Günther, Hanus, Hesse, Houël, Jacobi, Mansion, Muir, Нешић, Salmon, Scott, Studnička и Weld.

Београд
На Ђурђев дан 1899. год.

Д-р Богдан Гавриловић.

САДРЖАЈ.

ОДЕЉАК ПРВИ.

Основни појмови и дефиниције.

ОДЕЉАК ДРУГИ.

Особине детерминаната.

ОДЕЉАК ТРЕЋИ.

Минори.

ОДЕЉАК ЧЕТВРТИ.

Множење детерминаната.

Адјунговане детерминанте.

ОДЕЉАК ПЕТИ.

Примена на Алгебру.

ОДЕЉАК ШЕСТИ.

Детерминанте специјалних облика.

Симетричне детерминанте.

Алтернанте.

Континуанте.

Јакобијани, хесијани, диференцијалне детерминанте.

ОДЕЉАК СЕДМИ.

Линеарни и квадратни облици. Линеарне трансформације.

Квадратни облици.

ОДЕЉАК ОСМИ.

Инваријанте и коваријанте.

ТЕОРИЈА ДЕТЕРМИНАНАТА.

ОДЕЉАК ПРВИ.

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ И ДЕФИНИЦИЈЕ.

1. *Лајбниц* је први на измаку друге половине седамнаестога века нашао детерминанте, испитујући изразе што се јављају, кад се избацују непознате количине из системе линеарних еквација. О томе је Лајбниц известио писмом једним од 28. априла 1693. год. у оно доба славног француског научника *De l' Hospital-a*. Лајбниц даље није радио на томе, а ни De l' Hospital се није много бавио о мислима Лајбницовим, које су му и онако биле мало чудновате. С тога од теорије детерминаната у први мах не би ништа, док је најзад у средини осамнаестога века поново не оживе знаменити геометар *Г. Крамер*.

Крамер је нашао закон по коме се развијају детерминанте бавећи се о теорији кривих линија [1], а помоћу образаца, који се добивају кад се реше две линеарне еквације са две, или три линеарне еквације са три непознате. У прво време звали су геометри Крамерове функције *резултантама*. *Гаус* их је први, тражећи особине квадратних облика, у својим Аритме-

[1]) Позната Крамерова *Анализа алгебарских кривих (Introduction à l' Analyse des lignes courbes algébriques)* изашла је 1750. год. — Изгледа да је Крамер пронашао поменути закон радећи на овој проблеми: Повући криву v-тог реда кроз дату систему од $\frac{v^2}{2}+\frac{3v}{2}$ тачака.

тичким Дисквизицијама назвао *детерминантама*, и отуда им је и данас то име остало. После Крамера бавили су се о теорији детерминаната нарочито ови геометри: Безу, Лаплас, Вандермонд, Лагранж, Коши, Бине и Јакоби[1],) а у новије време Келе, Силвестер[2]), Хесе, Јоахимстал, Салмон, Хермит, Бриоши, Гордан, Мир, Студничка и други.

2. Да бисмо се што лакше упознали са основним појмовима, почећемо овако.

Решићемо линеарне еквације

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y &= m_1, \\ a_2x + b_2y &= m_2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

по непознатима x и y. Резултат ће бити ово:

$$x = \frac{m_1b_2 - m_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \qquad y = \frac{a_1m_2 - a_2m_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Последња два разломка имају исти именитељ. У том именитељу јављају се само количине a_1, b_1, a_2, b_2; он је дакле само функција коефицијената што у системи (1) стоје уз непознате x и y. Та функција зове се *детерминанта* коефицијената a_1, b_1, a_2, b_2, а бележи се симболички овако:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

По дефиницији је дакле

[1]) Јакоби је први 1841. год. у једном свом по већем мемоару *(De formatione et proprietatibus determinantium)* систематски обрадио теорију детерминаната. Види *Crelle's Journal*, t. 22. и *Gesam. Werke*, t. III. p. 355.

[2]) По Силвестеру је теорија детерминаната »an algebra upon an algebra; a calculus which enables us to combine and foretell the results of algebraical operations in the same way as algebra itself enables us to dispense with the performance of the special operations of arithmetic.«

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \equiv a_1 b_2 - a_2 b_1. \qquad (3)$$

Коефицијенти a_1, b_1, a_2, b_2 зову се *елементи* детерминанте (2). Дијагонала што у квадратној схеми (2) спаја елеменат a_1 с елементом b_2 зове се *главна дијагонала*; она друга дијагонала је *споредна.* У сваком члану израза $a_1 b_2 - a_2 b_1$ има по *два* елемента; с тога се каже да је детерминанта (2) *детерминанта другога реда* или *другога степена.*

По идентичној релацији (3) види се уједно и како се „развија" детерминанта другога реда: треба просто помножити елементе на главној дијагонали, па од производа њихова одузети производ елемената што се јављају на споредној дијагонали.

Напомена 1. За систему (1) је детерминанта (2) тако звана *детерминанта системе.*

Напомена 2. Сем поменутог симбола (2) има у теорији детерминаната још и других симбола̂ којима се представљају изрази облика $a_1 b_2 - a_2 b_1$. За сада поменућемо овај симбол: $(a_1 b_2)$. По томе је

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 \equiv (a_1 b_2) \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

3. Ако се добро уоче бројитељи разломака што представљају вредности непознатих x и y, видеће се да су и ти изрази детерминанте. Биће на име

$$m_1 b_2 - m_2 b_1 \equiv \begin{vmatrix} m_1 & b_1 \\ m_2 & b_2 \end{vmatrix} \equiv (m_1 b_2)$$

с једне, а

$$a_1 m_2 - a_2 m_1 \equiv \begin{vmatrix} a_1 & m_1 \\ a_2 & m_2 \end{vmatrix} \equiv (a_1 m_2)$$

с друге стране, па је с тога и

$$x = \frac{(m_1 b_2)}{(a_1 b_2)}, \quad y = \frac{(a_1 m_2)}{(a_1 b_2)}.$$

Отуда ово правило:

Правило. *Кад су дате две линеарне еквације с двема непознатима, онда је вредност сваке непознате одређена једним разломком; именитељ тога разломка је детерминанта системе, а бројитељ се добива из именитеља кад се у овоме коефицијенти, што се јављају у првој и другој еквацији уз непознату која се тражи, замене апсолутним члановима тих еквација.*

ПРИМЕРИ.

1. $$\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} = ab - h^2.$$

2. $$\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -12.$$

3. $$\begin{vmatrix} \sin x & \sin y \\ \cos x & \cos y \end{vmatrix} = \sin (x - y).$$

4. $$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -\cos x \end{vmatrix} = 2\sin^2 \frac{x}{2}.$$

5. $$a = \begin{vmatrix} a & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ y & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -a \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \text{и т. д.}$$

6. Решити еквације

$$2x - 3y + 6 = 0, \quad x - y + 1 = 0.$$

Одг. $x = 3$, $y = 4$.

7. Наћи x' и y' кад је

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \quad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

8. Написати у облику (2) погодбу под којом ће бити једнаки корени квадратне еквације

$$ax^2 + 2bx + c = 0.$$

9. $$\begin{vmatrix} a + bi & -c + di \\ c + di & a - bi \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

4. Узмимо сад три линеарне еквације

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= m_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= m_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= m_3 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

са три непознате x, y, z. Кад их решимо добићемо ово:

$$x = \frac{m_1b_2c_3 - m_1b_3c_2 + m_2b_3c_1 - m_2b_1c_3 + m_3b_1c_2 - m_3b_2c_1}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1},$$

$$y = \frac{a_1m_2c_3 - a_1m_3c_2 + a_2m_3c_1 - a_2m_1c_3 + a_3m_1c_2 - a_3m_2c_1}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1},$$

$$z = \frac{a_1b_2m_3 - a_1b_3m_2 + a_2b_3m_1 - a_2b_1m_3 + a_3b_1m_2 - a_3b_2m_1}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1}.$$

Последња три разломка имају исти именитељ. У том именитељу јављају се само количине a_1, b_1, c_1, $a_2, \cdots a_3, \cdots c_3$; он је дакле само функција коефицијената што у системи (4) стоје уз непознате x, y, z. Та функција зове се *детерминанта* коефицијената a_1, b_1, c_1, $a_2, \cdots a_3, \cdots c_3$, а бележи се овим симболом:

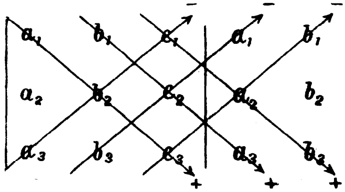
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{5}$$

По дефиницији је дакле

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \equiv a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1. \tag{6}$$

Коефицијенти $a_1, \cdots a_2, \cdots a_3, \cdots c_3$ зову се елементи детерминанте (5); права што у квадратној схеми (5) спаја елементе a_1, b_2, c_3 зове се главна дијагонала, а права што спаја елементе a_3, b_2, c_1 зове се споредна дијагонала. У сваком члану израза $a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + \cdots$ има по *три* елемента; с тога се каже да је детерминанта (5) *детерминанта трећега реда* или *трећега степена*. У тој детерминанти има свега три хоризонтална и три вертикална реда; први редови зову се *врсте*, а други *колоне*. У свакој врсти и свакој колони има по три елемента: детерминанта трећега реда има дакле свега $9 = 3^2$ елемената.

По идентичној релацији (6) види се уједно да се детерминанта (5) може развити по овом практичном правилу[1]): У десно уз саму квадратну схему треба написати прве две колоне и то најпре прву, па одмах до ње другу. За тим треба повући обе дијагонале и с њима напоредо по две праве овако:



[1]) То правило зове се *Sarrus-ово правило*.

Најзад треба помножити елементе што леже на дијагоналама и њиховим напоредницама и сабрати их, држећи се при томе овога правила: са знаком плус треба узети производе елемената што леже на главној дијагонали и њезиним напоредницама, а са знаком минус остала три производа.

Напомена. Детерминанта (5) бележи се и симболом $(a_1 b_2 c_3)$.

5. Ако се добро уоче разломци што представљају вредности непознатих x, y, z, видеће се да су и бројитељи тих разломака детерминанте трећега реда. Разломци којима су одређене вредности непознатих x, y, z моћи ће се дакле према нашем бележењу написати овако:

$$x = \frac{(m_1 b_2 c_3)}{(a_1 b_2 c_3)}, \quad y = \frac{(a_1 m_2 c_3)}{(a_1 b_2 c_3)}, \quad z = \frac{(a_1 b_2 m_3)}{(a_1 b_2 c_3)}.$$

Тим обрасцима формулисано је правило по коме се у опште решавају три линеарне еквације са три непознате.

ПРИМЕРИ.

1. $$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2.$$

2. $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. $$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = (y' - y'')\,x - (x' - x'')\,y + x'y'' - y'x''.$$

4. Развити детерминанте $(a_2b_3c_6)$, $(a_4b_2c_1)$.

5. Упоредити $\begin{vmatrix} a_1 & mb_1 & c_1 \\ a_2 & mb_2 & c_2 \\ a_3 & mb_3 & c_3 \end{vmatrix}$ са $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

6. Упоредити $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ са $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

7. Доказати да је $(a_1b_2c_3) = -(c_1b_2a_3)$.

8. Решити еквације

$$3x + 4y - 16z = 0,\quad 5x - 8y + 10z = 0,\quad 2x - 6y + 7z + 8 = 0.$$

Одг. $x = 4$, $y = 5$, $z = 2$.

6. Узмимо даље четири линеарне еквације

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1t = m_1,$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$a_4x + b_4y + c_4z + d_4t = m_4$$

са четири непознате x, y, z, t. Ако их решимо, видећемо да ће свака непозната бити одређена по једним разломком. Сви ти разломци имаће исти именитељ. У том именитељу јављаће се само коефицијенти

$$a_1, b_1, c_1, d_1, \; a_2, \cdots d_2, \; a_3, \cdots d_3, \; a_4, \cdots d_4;$$

он ће дакле поново бити само функција коефицијената што се у горњој системи јављају уз непознате x, y, z, t. Та функција зове се *детерминанта четвртог реда* или *четвртог степена*, а елементи њезини су поменути коефицијенти $a_1, \cdots d_1$, $a_2, \cdots d_2$, $a_3, \cdots d_3$, $a_4, \cdots d_4$. Та детерминанта бележи се симболом

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}; \tag{7}$$

у њој има четири врсте и четири колоне, а свега $16 = 4^2$ елемената.

Кад бисмо решили систему од пет линеарних еквација са пет непознатих, онда би заједнички именитељ разломака, што представљају вредности непознатих, био детерминанта петога реда и у њој би било свега $25 = 5^2$ елемената и т. д. У опште, кад бисмо решили систему од n линеарних еквација

$$\begin{array}{l} a_1x + b_1y + \cdots + h_1w = m_1, \\ a_2x + b_2y + \cdots + h_2w = m_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_nx + b_ny + \cdots + h_nw = m_n \end{array}$$

са n непознатих $x, y, \cdots w$, онда би поново заједнички именитељ разломака, који одређују вредности непознатих, био једна детерминанта и то — *детерминанта n-тог реда* или *n-тог степена.* Та детерминанта бележи се овим симболом:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & h_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & h_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & \cdots & h_n \end{vmatrix} \tag{8}$$

Тај симбол представља дакле један потпуно одређен полином, а уобичајено је да се и он зове детерминанта [1]). У тој детерминанти има n врста и n колона, а у свакој врсти и свакој колони по n елемената: *У детерминанти n-тог реда има дакле n^2 елемената.* И ова детерминанта као и пређашња има своју главну и своју споредну дијагоналу: на *главној дијагонали* леже елементи $a_1, b_2, \cdots h_n$, а на *споредној* елементи $a_n, b_{n-1}, \cdots h_1$. Производ елемената што леже на главној дијагонали јесте, као што ћемо касније видети, један члан у „развијеном облику“ детерминанте (8). Тај члан зваћемо *главним чланом* детерминанте.

Сем тога је и у овој детерминанти, као и у детерминантама (2), (5) и (7), сваки елеменат означен двојако: једним писменом и једном казаљком што се налази десно од писмена, а у дну његову. По писмену се види у којој је колони некакав елеменат, а по казаљци у којој врсти. Тако би н. пр. елеменат c_4 био у трећој колони, а четвртој врсти, док би н. пр. елеменат d_3 био елеменат четврте врсте, а треће колоне.

Често се међутим елементи бележе и на овај начин: узима се неко писме, н. пр. писме a, и пишу се уз њега две казаљке, обе десно, једна више, а друга ниже њега. У том случају би елеменат i-те врсте, а k-те колоне био означен са a_i^k, а детерминанта n-тога реда би била ово:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 \cdots & a_2^n \\ \cdots & \cdots \cdots & \cdots \\ a_n^1 & a_n^2 \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Но још чешће се елементи бележе једним писменом и двема казаљкама које се обе пишу десно писмену у дну. Тип такве детерминанте је ово:

[1]) Саму схему зове **Гордан** (*Jnvariantentheorie* св. 1., р. 18.) *Matrix*, а не *Determinante*. Енглески писци зову међутим схему или *determinant* или *determinant array*. И ми ћемо кад и кад схему звати *матрицом*.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} . \qquad (9)$$

Првом казаљком је означена врста, а другом колона: елеменат a_{ik} је дакле елеменат i-те врсте, а k-те колоне. — Чак се кад и кад изостављају сасвим писмена, а пишу се само казаљке. Општи тип такве детерминанте био би ово:

$$\begin{vmatrix} 11 & 12 & \cdots & 1n \\ 21 & 22 & \cdots & 2n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n1 & n2 & \cdots & nn \end{vmatrix} .$$

Напомена. Детерминанте се често бележе и другим симболима, краћим од оних које мало час поменусмо. Тако се н. пр. детерминанта (8) бележи једним од ових симбола: $\Sigma \pm a_1 b_2 \cdots h_n$, $(a_1 b_2 \cdots h_n)$, $|a_1 b_2 \cdots h_n|$; детерминанта (9) бележила би се према томе једним од ових симбола: $\Sigma \pm a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$, $(a_{11} a_{22} \cdots a_{nn})$, $|a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}|$. Чак се та детерминанта често бележи просто овако: $|a_{1n}|$.

7. Поменули смо правила по којима се развијају детерминанте другог и трећег реда. На реду је да нађемо правила по којима би се могле у опште развијати детерминанте ма ког реда. До тих правила доћи ћемо тек кад се упознамо са још неким основним појмовима и теоремама. —

У елементарној алгебри има једно овако правило: кад је дато на број n писменâ $a, b, c, \cdots h$, онда је број пермутацијâ тих писмена ово:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \;\cdot\; \cdot n = n!$$

Све те пермутације имају исту алгебарску вредност, а разликују се само тим једна од друге, што су у једне писмена размештена на један, а у друге на други начин. Напишимо сад у свакој тој пермутацији уз прво писме казаљку 1, уз друго казаљку 2, уз треће казаљку 3 итд. и најзад уз последње писме казаљку n. Тим путем добићемо на број n пермутација. У тим пермутацијама јављаће се казаљке једна за другом онако, како се у природном реду јављају један за другим бројеви; те пермутације добићемо дакле, ако у производу $a_1b_2c_3\cdots h_n$ при пермутовању писменâ $a, b, c, \cdots h$ не будемо реметили природни ред $1, 2, 3, \cdots n$ казаљака. Бројне вредности тих пермутација биће у опште *различите*. Једну такву пермутацију представљао би н. пр. производ $c_1b_2a_3\cdots h_n$. Ако у тој пермутацији напишемо писмена азбучним редом, задржавајући при томе уз свако писме казаљку што се уза њ јавља, добићемо ову пермутацију: $a_3b_2c_1\cdots h_n$. У тој новој пермутацији поремећен је, као што видимо, природни ред казаљака, а писмена се у њe јављају узастопце азбучним редом. Јасно је, да ћемо све пермутације такве врсте добити, ако у производу $a_1b_2c_3\cdots h_n$ при пермутовању казаљака $1, 2, 3, \cdots n$ не будемо реметили азбучни ред $a, b, c, \cdots h$ писмена.

Напомена. Ако се у основном производу $a_1b_2c_3\cdots h_n$ сваки елеменат означи једним писменом, а двема казаљкама, онда се све мало час поменуте пермутације добивају овако: у производу $a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$ пермутују се или само прве казаљке, а у друге се не дира, или се пермутују само друге казаљке, а у прве се не дира.

8. Инверсије. Елементи, из којих је састављена нека пермутација, разликују се и по месту које они заузимају у основном, првобитном распореду свом [1]). За један елеменат каже се на име да је *виши* од неког другог елемента, ако се он у основном распореду јавља иза тог елемента. Према томе је некакав елеменат виши од свих оних, што у основном распореду стоје пред

[1]) Основни распоред писмена је $a, b, c, d, e, \ldots$, а основни ред бројева је *1, 2, 3, 4, 5, ...*.

њим. Н. пр. у пермутацији ab је елеменат b виши од елемента a, а у пермутацији 3 1 је елеменат 3 виши од елемента 1. Кад се у некој пермутацији сваки елеменат упореди са свима елементима што се за њим јављају, онда се лако може одредити колико се пута у тој пермутацији јављају виши елементи испред нижих. Број, који нам то казује, зове се *број инверсија*; н. пр. у пермутацији $cbaed$ има четири инверсије: cb, ca, ba, ed; у пермутацији $a_2a_4a_1a_3$ има три инверсије: a_2a_1, a_4a_1, a_4a_3.

Крамер је по броју инверсија поделио пермутације на две врсте: на *парне* и на *непарне* пермутације. *Пермутација је парна, кад је у њој број инверсија паран, а непарна је, кад је број њезиних инверсија непаран.* —

Циклична размена елемената. Ако у некој пермутацији напишемо први елеменат иза последњег, не мењајући при томе места осталих елемената у пермутацији, онда се тако премештање елемената зове *циклична размена елемената*. Н. пр. пермутације

1 2 3, 2 3 1, 3 1 2

постају једна из друге цикличком разменом елемената: то су *цикличке* пермутације.

Напомена. Парне пермутације зову се често и *позитивне пермутације*, а непарне пермутације зову се *негативне пермутације*.

9. Теорема. *Свака пермутација мења своју врсту, кад у њој два елемента размене своја места, т. ј. разменом два елемента мења се парна пермутација у непарну, а непарна у парну.*

Означимо елементе, који ће узајамно мењати своја места са a и α, па претпоставимо најпре да се ти елементи у датој пермутацији узастопце јављају један за другим. Ако са P обележимо производ свих елемената што стоје испред a и α, а са R производ свих елемената што стоје иза a и α, онда ћемо дату пермутацију моћи овако написати:

$$P\,a\,\alpha\,R. \tag{10}$$

Ако елементи a и α промене своја места, онда ће се дата пермутација преобразити у ову:

$$P\,\alpha\,a\,R. \tag{11}$$

Узмимо сад да у датој пермутацији са елемената, што се јављају у производу P (у производу R), има свега p (свега r) инверсија. Јасно је да се ти бројеви не ће мењати кад елементи a и α буду променили своја места. Ако је сад елеменат a виши од елемента α, онда ће пермутација (10) имати $p + r + 1$ инверсијâ, а пермутација (11) имаће једну инверсију мање; дакле, ако је број $p + r + 1$ био паран, онда ће број $p + r$ бити непаран и обратно. Напротив, ако је елеменат a нижи од елемента α, онда ће пермутација (10) имати $p + r$ инверсијâ, а пермутација (11) имаће једну инверсију више. Дакле, поново ће пермутација (11) бити непарна ако је пермутација (10) била парна и обратно. Кад, дакле, два елемента што се узастопце јављају у некој пермутацији промене своја места, онда се свакад парна пермутација мења у непарну или, обратно, непарна у парну.

Узмимо сад да су у датој пермутацији елементи a и α раздвојени. Ако се са Q означи производ свих елемената што раздвајају a и α, онда ће се дата пермутација моћи овако написати:

$$P\,a\,Q\,\alpha\,R. \tag{12}$$

Нека у производу Q има q елемената. Ако елеменат α померимо у лево q пута узастопце, онда ће се пермутација (12) преобразити у ову:

$$P\,a\,\alpha\,Q\,R.$$

Најзад ако елеменат a у последњој пермутацији померимо у десно $(q+1)$ пута узастопце, онда ће се та пермутација преобразити у ову:

$$P\,\alpha\,Q\,a\,R. \tag{13}$$

Кад, дакле, елементи a и α у првобитној пермутацији (12) промене своја места, онда ћемо свега узастопце, које у десно, које у лево, те елементе морати померати

$$q+(q+1)=2q+1$$

пута. Број $2q+1$ је међутим непаран, а мало час смо доказали, да се сваком разменом два консекутивна елемента мења врста пермутације: то значи да ће пермутација (13) бити непарна, ако је пермутација (12) била парна и обратно, а то смо у осталом и тврдили.

Напомена. Ако је n непаран број, онда ће према нашој теореми цикличке пермутације

$$a_1a_2a_3\cdots a_n,\ \ a_2a_3\cdots a_na_1$$

бити или обе парне или обе непарне; напротив, једна између те две пермутације биће парна, а друга непарна ако је n паран број.

10. Теорема. *Кад се напишу све пермутације датих елемената, онда парних пермутација има исто онолико, колико и непарних.*

Некој пермутацији у којој се елементи a и α јављају узастопце овим редом: $\cdots a\cdots\alpha\cdots$ одговараће на име само једна једина пермутација у којој ће се елементи a и α јављати обрнутим редом $\cdots\alpha\cdots a\cdots$. Но ако је она прва била парна, онда ће она друга бити непарна и обратно; то значи да ће парних пермутација бити исто онолико, колико и непарних, $q\cdot e\cdot d$.

11. На основу свега што досад рекосмо интерпретоваћемо на овај начин симбол

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

који нам, као што знамо (чл. 6.), представља детерминанту n-тог реда.

Помножићемо на све могуће начине елементе тако, да у сваком производу буде један једини елеменат сваке врсте и један једини елеменат сваке колоне. Тих производа биће свега $n!$. Како се на име у сваком производу мора јављати по један елеменат сваке врсте, то ћемо у сваком производу моћи чинитеље распоредити тако, да први чинитељ буде елеменат прве врсте, други да буде елеменат друге врсте и т. д. Сваки производ моћи ћемо дакле написати у овом облику:

$$a_{1i}\, a_{2j}\, a_{3k} \cdots a_{nl}.$$

Но у сваком производу јавља се и по један члан сваке колоне; с тога ће са $ijk \cdots l$ морати бити означена нека пермутација казаљака $1, 2, 3, \cdots n$. Тих пермумутација има свега $n!$, што значи да и поменутих производа има $n!$.

У једној половини тих производа биће пермутације $ijk \cdots l$ парне, а у другој половини непарне. Испред првих производа написаћемо знак плус, а испред других знак минус. Алгебарски збир тих производа представљаће развијен облик дате детерминанте.

Ако дакле узмемо да је са p означен број инверсија пермутације $ijk \cdots l$, онда треба испред производа $a_{1i} a_{2j} a_{3k} \cdots a_{nl}$ у развијеном облику детерминанте писати знак плус, ако је p паран број, а знак минус, ако је p непаран број. Према томе ће тек производ

$$(-1)^p\, a_{1i}\, a_{2j}\, a_{3k} \cdots a_{nl}$$

бити један члан у развијеном облику детерминанте.

Кад је $i = 1$, $j = 2, k = 3, \cdots l = n$, онда је

$$ijk\cdots l = 1\;2\;3\cdots n;$$

та пермутација $1\;2\;3\cdots n$ нема инверсија, она је дакле парна, па ће с тога један члан у развијеном облику детерминанте бити и производ $a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\cdots a_{nn}$ елемената што леже на главној дијагонали. Тај члан смо звали (чл. 6.) главним чланом детерминанте. *Главни члан детерминанте $\varDelta$ је дакле позитиван.*

12. Вратимо се сад производу

$$a_{1i}\,a_{2j}\,a_{3k}\cdots a_{nl} \qquad (\alpha)$$

и означимо поново са p број инверсија пермутације $ijk\cdots l$. У том производу могу се написати чинитељи тако, да први чинитељ буде елеменат прве колоне, други да буде елеменат друге колоне и т. д. Јасно је да ће у том случају на известан начин бити пермутоване само прве казаљке. Ако пермутацију, која се буде добила, означимо са $rst\cdots u$, онда ћемо производ (α) моћи овако написати:

$$a_{r1}\,a_{s2}\,a_{t3}\cdots a_{un}. \qquad (\alpha')$$

Пита се сад како стоји пермутација $rst\cdots u$ према пермутацији $ijk\cdots l$? Доказаћемо да су те две пермутације исте врсте (обе парне, или обе непарне), а на овај начин. Премештаћемо у производу (α) чинитеље са којих има инверсијâ у пермутацији $ijk\cdots l$ све дотле, докле год тих инверсија не нестане, т. ј. докле год друга казаљка у првом чинитељу не буде 1, у другом 2, у трећем 3 и т. д. Број који нам казује колико смо пута свега премештали два и два елемента означићемо са p'.

Но ако је број елемената, што издвајају елементе a и α у некој пермутацији $P\,a\,Q\,\alpha\,R$ означен са q, онда ће се a и α морати (чл. 9.) премештати узастопце свега

$(2q+1)$ пута док a не заузме место елемента α и, обратно, α место елемента a. То значи да ће p' бити паран број кад је и p паран број и, обратно, да ће p' бити непаран број кад је број p непаран. Сваком разменом два елемента мења се међу тим врста неке пермутације, па како је прва пермутација $1\ 2\ 3 \cdots n$ првих казаљака у производу (α) била парна, то ће и она последња, т. ј. пермутација $rst \cdots u$, бити парна ако је број p' био паран, а непарна ако је број p' био непаран. Ми међу тим мало час рекосмо да ће број p' бити паран (непаран), ако је и број p паран (непаран); према томе можемо рећи да ће пермутација $rst \cdots u$ бити парна ако је p паран број, а непарна ако је p непаран број. Пермутације $ijk \cdots l$ и $rst \cdots u$ су дакле исте врсте,а то смо и тврдили. Био дакле један члан развијеног облика детерминанте написан у облику (α), или био он написан у облику (α'), свакад се знак томе члану одређује по истом правилу, т. ј. одређује се тај знак било по броју инверсија пермутације $ijk \cdots l$, било по броју инверсија пермутације $rst \cdots u$. —

Кад се добро уочи мало час поменута дефиниција детерминанте Δ, онда ће нам јасно бити, зашто се та детерминанта бележи овим симболом:

$$\Delta = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Симболом Σ означена је на име сума свих позитивних и негативних чланова што се добивају, кад се у главном члану пермутују на све могуће начине било само прве, било само друге казаљке.

Последица. *Ако је сваки елеменат једне врсте или сваки елеменат једне колоне нула, онда је и детерминанта равна нули.*

Напомена. Кад су елементи неке детерминанте означени по једним писменом и по једном казаљком што се налази у дну тог писмена, т. ј. кад је детерминанта овог облика:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \cdots h_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots h_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_n & b_n & \cdots h_n \end{vmatrix},$$

онда се та детерминанта према мало час поменутој дефиницији развија по овом правилу: пермутују се писмена $a, b, \cdots h$ на све могуће начине, а казаљке $1, 2, \cdots n$ се пишу узастопце уз свако писме сваке пермутације; или, обратно, пермутују се казаљке $1, 2, \cdots n$ на све могуће начине, а писмена се узастопце пишу по азбучном реду уз сваки елеменат сваке пермутације. У првом случају одређује се знак сваком члану по броју инверсија писменâ $a, b, \cdots h$, а у другом случају по броју инверсија казаљака $1, 2, \cdots n$.

На пример, детерминанту

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

развићемо овако.

Пермутоваћемо најпре писмена a, b, c. Пермутације ће бити ово:

$$abc,\ acb,\ bca,\ bac,\ cab,\ cba.$$

Прва, трећа и пета пермутација је парна, остале су непарне. С тога ће полином

$$a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3 + b_1c_2a_3 - b_1a_2c_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 \tag{14}$$

представљати дату детерминанту трећега реда.

Обратно, пермутоваћемо казаљке 1, 2, 3. Пермутације њихове су

1 2 3, 1 3 2, 2 3 1, 2 1 3, 3 1 2, 3 2 1.

Прва, трећа и пета пермутација је парна, а друга, четврта и шеста непарна. Према томе ће и израз

$$a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \qquad (15)$$

представљати дату детерминанту трећега реда. — Изрази (14) и (15) разликују се само по спољашњем облику: алгебарске вредности њихове су потпуно једнаке, а те изразе смо у осталом у уводу (чл. 4.) и звали детерминантама трећега реда.

Прим. 1. Какве знаке имају у детерминанти $\Sigma \pm a_1b_2c_3d_4$ чланови $a_1b_3c_4d_2$, $a_2b_1c_3d_4$, $a_3b_2c_4d_1$ и $a_4b_2c_3d_1$?

Одг. Први и трећи члан је позитиван; остала два су негативна.

Прим. 2. Какве знаке имају чланови bfg, cdh и ceg у детерминанти

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} ?$$

[Ред колона је 2 3 1, 3 1 2, 3 2 1.]

Одг. Прва два члана су позитивна; трећи је негативан.

Прим. 3. Какав знак има у детерминанти $\Sigma \pm a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ члан $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$, т. ј. какав знак има у датој детерминанти производ елемената споредне дијагонале?

Прим. 4. Са $a_{ri}a_{sj}a_{tk}\cdots a_{ul}$ је означен један члан детерминанте $\Sigma \pm a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. Какав знак има тај члан?

Пермутације $rst\cdots u$ и $ijk\cdots l$ морају бити пермутације бројева $1, 2, 3, \cdots n$. Ако у пермутацији $rst\cdots u$ има p' инверсија, а у пермутацији $ijk\cdots l$ свега p инверсија, биће знак поменутог члана одређен модулом $(-1)^{p'+p}$. То значи да ће члан $a_{ri}a_{sj}a_{tk}\cdots a_{ul}$ имати позитиван знак, ако су пермутације $rst\cdots u$ и $ijk\cdots l$ исте врсте, а негативан знак, ако су те две пермутације различите врсте.

ОДЕЉАК ДРУГИ.

ОСОБИНЕ ДЕТЕРМИНАНАТА.

13. Узмимо да су нам дате две детерминанте

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Кад се упореде те две детерминанте, видеће се да су елементи у i-тој врсти (колони) једне од тих детерминаната једнаки са елементима i-те колоне (врсте) оне друге детерминанте. Матрица D постала је на име из матрице Δ тим, што се ова око своје главне дијагонале обрнула једанпут, па су с тога у тим матрицама елементи размештени тако, да су врсте (колоне) матрице Δ колоне (врсте) матрице D и обратно. Таква размена елемената у матрици зове се *транспозиција*.

14. Теорема. *Кад се матрица неке детерминанте транспонира, онда се вредност те детерминанте не мења.*

Треба дакле доказати да је $\Delta = D$. Тај доказ је веома прост. У сваком члану детерминанте Δ јављаће се на име по један елеменат сваке врсте и по један елеменат сваке колоне. То значи да ће се у сваком члану детерминанте Δ јављати по један елеменат сваке колоне и по један елеменат сваке врсте матрице D.

Не гледајући дакле на знаке можемо рећи, да ће сваки члан детерминанте Δ бити уједно и члан детерминанте D и обратно. Но ми ћемо доказати да ће у тих чланова и знаци бити једнаки. Кад на име будемо одређивали знак неком члану детерминанте Δ по инверсијама казаљака, онда ћемо том истом члану у детерминанти D морати одређивати знак по инверсијама тих истих казаљака. Колико год дакле некакав члан у развијеном облику детерминанте Δ буде имао инверсија међу бројевима којима су обележене врсте (колоне) матрице Δ, толико ће исто тај члан у детерминанти D имати инверсија међу бројевима којима су обележене колоне (врсте) матрице D; та два члана имаће, другим речима, исти знак.

15. Теорема. *Кад се у матрици неке детерминанте узајамно смене две врсте или две колоне, онда детерминанта мења свој знак.*

Означимо дату детерминанту са Δ, па разменимо у тој детерминанти узајамно места елементима j-те и l-те колоне. У том случају добићемо једну нову детерминанту. Ту детерминанту ћемо означити са D, а треба доказати да је $D = -\Delta$.

Нека је

$$a_{1i}a_{2j}a_{3k}a_{4l}\cdots a_{nm} \qquad (\alpha)$$

један члан детерминанте Δ. Томе члану одговара у детерминанти D члан

$$a_{1i}a_{2l}a_{3k}a_{4j}\cdots a_{nm}. \qquad (a)$$

Не водећи рачуна о знаку можемо, као што је јасно, рећи да ће тај члан бити уједно и члан детерминанте Δ. Треба још само испитати какав знак има тај члан у детерминанти Δ? То питање решићемо овако: проматраћемо пермутације $ijkl\cdots m$ и $ilkj\cdots m$. Те две пермутације нису исте врсте: у детерминанти Δ не ће дакле чланови (α) и (a) бити једнако означени — ако је један позитиван, биће други негативан и обратно.

Јасно је међу тим да члан (α) мора у детерминанти $\varDelta$ бити исто онако означен, као што је означен члан (a) у детерминанти D. То значи, да ће сваком члану

$$\pm\, a_{1i}a_{2l}a_{3k}a_{4j}\cdots a_{nm}$$

у развијеном облику детерминанте D одговарати члан

$$\mp\, a_{1i}a_{2l}a_{3k}a_{4j}\cdots a_{nm}$$

у детерминанти $\varDelta$, а по томе се види да је заиста $D = -\varDelta$.

То исто могли смо доказати и да смо узајамно били променили две врсте.

Прим. 1. $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \equiv - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Прим. 2. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \equiv (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{11} \\ a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{21} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{n1} \end{vmatrix}.$$

Прим. 3. $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \equiv (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{1n} & a_{1,n-1} & \cdots & a_{11} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nn} & a_{n,n-1} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix}.$$

Прим. 4. $(a_1b_2c_3d_4) = (a_2b_3c_1d_4) = -(a_2b_1c_3d_4) = -(a_2b_3c_4d_1)$.

16. Премештајући редове узајамно можемо учинити да некакав елеменат у датој матрици заузме место ма ког другог елемента. У сваком таквом случају може се према поменутом правилу, а по главном члану последње матрице D, одредити да ли се знак првобитне детерминанте $\varDelta$ изменио. Ако се на име некакав члан детерминанте D знаком разликује од члана који му у детерминанти $\varDelta$ одговара, онда ће се и *сви* остали чланови те детерминанте разликовати знаком од чланова који им одговарају у детерминанти $\varDelta$ и обратно. Главни члан детерминанте D је међу тим позитиван. Тај члан јављаће се и у детерминанти $\varDelta$, а знак његов се, као што знамо, лако одређује по инверсијама казаљака. Ако је тај члан позитиван у детерминанти $\varDelta$, онда ће бити $D = + \varDelta$, а ако је он негативан, онда ће бити $D = - \varDelta$.

На пример, дата је детерминанта

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix},$$

па узмимо да смо узајамним премештањем редова (врсȃ и колонȃ) добили детерминанту

$$D = \begin{vmatrix} h & d & l & p \\ f & b & j & n \\ g & c & k & o \\ e & a & i & m \end{vmatrix}$$

Главни члан детерминанте D је $+ hbkm$. Међу тим је у првобитној матрици h елеменат друге врсте, а четврте колоне; стога бисмо тај елеменат за један часак само могли означити са a_{24}. Исто је тако у првобитној детерминанти b елеменат прве врсте, а друге колоне; стога бисмо за један часак тај елеменат могли означити са a_{12} и т. д. Главни члан детерминанте D био би дакле $+ a_{24}a_{12}a_{33}a_{41}$. Ако тај члан напишемо у овом облику:

$$a_{12}a_{24}a_{33}a_{41},$$

видећемо да ће међу другим казаљкама 2 4 3 1 бити четири инверсије. То значи да ће поменути производ $hbkm$ као члан детерминанте $\varDelta$ такође имати позитиван знак, т. ј. у овај мах је $D = + \varDelta$.[1])

Узмимо још један пример. Напишимо на име у у детерминанти $\varDelta = \Sigma \pm a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ i-ту врсту више прве врсте и померимо за тим k-ту колону у лево тако, да она у матрици D, коју тим померањем редова будемо добили, буде прва колона. Јасно је да ће у матрици D елеменат a_{ik} првобитне детерминанте $\varDelta$ бити елеменат прве врсте и прве колоне. Пита се да ли је $D = + \varDelta$, или је $D = - \varDelta$?

Одговор је веома прост. Главни члан детерминанте D је

$$a_{ik}a_{11}a_{22}\cdots a_{i-1,\,i-1}a_{i+1,i}\,a_{i+2,i+1}\cdots a_{k,k-1}a_{k+1,k+1}\cdots a_{nn}$$

кад је $i < k$, а

$$a_{ik}\,a_{11}a_{22}\cdots a_{k-1,k-1}a_{k,k+1}\cdots a_{i-1,i}\,a_{i+1,i+1}a_{i+2,i+2}\cdots a_{nn}$$

кад је $k < i$. И у једном и у другом случају имају прве казаљке $(i - 1)$, а друге $(k - 1)$ инверсија̂. Свега дакле има

$$(i - 1) + (k - 1) = i + k - 2$$

инверсија̂. Према томе ће главни члан детерминанте D у детерминанти $\varDelta$ имати позитиван (негативан) знак, кад је $i + k - 2$ паран (непаран) број, па како је број $i + k - 2$ паран (непаран) кад је и број $i + k$ паран (непаран), то ћемо моћи рећи, да ће главни члан детерминанте D имати у детерминанти $\varDelta$ позитиван знак

[1]) Знак, који ће производ $a_{24}a_{12}a_{33}a_{41}$ имати у првобитној детерминанти $\varDelta$, могли смо и овако одредити. Пермутација 2 1 3 4 првих казаљака је непарна. Иста је таква и пермутација 4 2 3 1 других казаљака. То значи (прим. 4. чл. 12.) да ће члан $a_{24}a_{12}a_{33}a_{41} = hbkm$ имати позитиван знак у детерминанти $\varDelta$.

кад је $i+k$ паран број и обратно, негативан знак кад је $i+k$ непаран број. То значи да је у овај мах

$$D = (-1)^{i+k}\Delta.$$

Дакле, *кад се у детерминанти* $\Delta = \Sigma \pm a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ *помери само i-та врста и само k-та колона и то тако, да елеменат* a_{ik} *првобитне детерминанте* Δ *у новој детерминанти* D *буде први елеменат, онда је* $D = (-1)^{i+k}\Delta$.

17. Теорема. *Кад су два реда (две врсте или две колоне) у неке детерминанте* Δ *једнаке, онда је* $\Delta = 0$.

Детерминанта се не ће на име изменити, кад једнаки редови узајамно промене своја места. Но кад два реда узајамно мењају своја места, онда по мало час поменутој теореми детерминанта мења свој знак. У овај мах је дакле

$$\Delta = -\Delta,$$

т. ј.

$$\Delta = 0,$$

а то смо и тврдили.

Тако је на пример

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(a_1a_2c_3d_4) = 0, \quad (a_1b_2c_2d_4) = 0, \quad (a_1b_2c_3b_4) = 0.$$

18. Теорема. *Помножити сваки елеменат неког реда (неке врсте или неке колоне) ма каквим бројем значи помножити детерминанту тим бројем.*

Узмимо да нам је дата детерминанта

$$\Delta = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \cdots a_{nn},$$

па помножимо сваки елеменат неког реда њезиног, н. пр. сваки елеменат прве колоне, неким бројем m. Тим путем добићемо ову детерминанту:

$$D = \begin{vmatrix} ma_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ma_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ma_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

У сваком члану те детерминанте јављаће се један једини елеменат сваке врсте и сваке колоне. Према томе ће се у сваком члану те детерминанте јављати и по један елеменат прве колоне. Но како је сваки елеменат прве колоне помножен бројем m, то ћемо израз што представља детерминанту D моћи написати у облику једног производа. Један чинитељ тог производа биће m, а други чинитељ биће опет, као што се јасно види, детерминанта Δ. Биће дакле $D = m\,\Delta$, а то смо и тврдили.

Прим. 1. $$\begin{vmatrix} ma_1 & mb_1 & mc_1 \\ na_2 & nb_2 & nc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = mn \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Прим. 2. Доказати да је

$$\begin{vmatrix} bcd & a & a^2 & a^3 \\ cda & b & b^2 & b^3 \\ dab & c & c^2 & c^3 \\ abc & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix}.$$

Напом. Треба прву колону поделити са $abcd$, а прву врсту помножити са a, другу са b, трећу са c, четврту са d.

Прим. 3. $$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Последица I. *Променити знаке свима елементима неког реда значи променити знак детерминанти*, н. пр.

$$\begin{vmatrix} -a_1 & b_1 \\ -a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Последица II. *Кад се елементи у две колоне или у две врсте у некој детерминанти Δ разликују само неким чинитељем, онда је $\Delta = 0$*; н. пр.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & ma_1 & c_1 \\ a_2 & ma_2 & c_2 \\ a_3 & ma_3 & c_3 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

19. Теорема. *Кад је сваки елеменат неког реда (неке врсте или неке колоне) збир двеју или више количина, онда је детерминанта збир двеју или више детерминаната.*

Нека је на пример

$$\Delta = \begin{vmatrix} (a_{11} + b_{11} + c_{11} + \cdots) & a_{12} \cdots a_{1n} \\ (a_{21} + b_{21} + c_{21} + \cdots) & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \cdots \cdots \cdots \\ (a_{n1} + b_{n1} + c_{n1} + \cdots) & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ако ту детерминанту напишемо симболички овако:

$$\Delta = \Sigma \pm (a_{11} + b_{11} + \cdots)\ a_{22} \cdots a_{nn},$$

биће јасно да ћемо израз на десној страни моћи написати у овом облику:

$$\Sigma \pm a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} + \Sigma \pm b_{11}a_{22}\cdots a_{nn} + \Sigma \pm c_{11}a_{22}\cdots a_{nn} + \cdots$$

Свака од тих сума представља међу тим по једну детерминанту. Према томе је *de facto*

$$\Delta = \begin{vmatrix} (a_{11} + b_{11} + c_{11} + \cdots) & a_{12} \cdots a_{1n} \\ (a_{21} + b_{21} + c_{21} + \cdots) & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \cdots \cdots \cdots \\ (a_{n1} + b_{n1} + c_{n1} + \cdots) & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ c_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

Прим. 1. $\begin{vmatrix} a_1 + \lambda & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$

Прим. 2. Доказати да је

$$\begin{vmatrix} x - a & y - b & 1 \\ x_1 - a & y_1 - b & 1 \\ x_2 - a & y_2 - b & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Прим. 3. Растворити детерминанту

$$\begin{vmatrix} a_{11}+k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+k \end{vmatrix}$$

у збир детерминаната.

20. Теорема. *Ако се сваки елеменат једне колоне (једне врсте) помножи неким датим чинитељем, и ако се поједини производи додаду насрамним елементима друге неке колоне (неке врсте), онда детерминанта не мења своју вредност.*

Треба доказати да је н. пр.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} (a_{11}+ka_{12}+la_{13}+\cdots) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ (a_{21}+ka_{22}+la_{23}+\cdots) & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_{n1}+ka_{n2}+la_{n3}+\cdots) & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Нека је са $\varDelta$ означена прва, а са D друга детерминанта. По мало час поменутој теореми (чл. 19.) биће

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\, l \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{23} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

Јасно је да ће све детерминанте на десној страни последње еквације бити $= 0$ сем прве, па како је та детерминанта означена са $\varDelta$, биће $D = \varDelta$, $q \cdot e \cdot d$.

Прим. 1. Доказати да је

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0.$$

Ако додамо другу колону трећој, добићемо ово:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Прим. 2. $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x - x' & y - y' & 0 \\ x - x'' & y - y'' & 0 \end{vmatrix}.$

Прим. 3. Наћи вредност детерминанте

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix}.$$

У овај мах можемо детерминанту овако написати:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ -4 & 4 & 4 & -4 \\ 12 & -12 & -12 & 12 \end{vmatrix} = 48 \begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 48 \begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

а по томе се види да је $\Delta = 0$.

Прим. 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 1 & x_3 + x_1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \times (x_3 - x_2).$$

Прим. 5. Наћи корене еквације

$$\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ (a + \lambda)^3 & (b + \lambda)^3 & (c + \lambda)^3 \\ (2a + \lambda)^3 & (2b + \lambda)^3 & (2c + \lambda)^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Помножићемо прву врсту са 8 и одузећемо је од треће врсте; даље, одузећемо од друге врсте прву врсту. После тога одузећемо другу врсту од треће и добићемо овај резултат:

$$3\lambda^2 \begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ 3a^2 + 3a\lambda + \lambda^2 & 3b^2 + 3b\lambda + \lambda^2 & 3c^2 + 3c\lambda + \lambda^2 \\ 3a^2 + a\lambda & 3b^2 + b\lambda & 3c^2 + c\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Одузмимо сад трећу врсту од друге. Резултат ће бити ово:

$$3\lambda^3 \begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ 2a+\lambda & 2b+\lambda & 2c+\lambda \\ 3a^2+a\lambda & 3b^2+b\lambda & 3c^2+c\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Даље, одузмимо прву колону од обе остале колоне и одузмимо затим другу колону од треће. Тада ће бити

$$3\lambda^3 (b-a)\ (c-a)\ (c-b) \begin{vmatrix} a^3 & a^2+ab+b^2 & a+b+c \\ 2a+\lambda & 2 & 0 \\ 3a^2+a\lambda & 3a+3b+\lambda & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Најзад помножимо другу колону са $-a$, трећу са ab, па додајмо обе те колоне првој колони и помножимо затим трећу колону са $(a+b)$ и одузмимо је од друге. Тада ће бити

$$3\lambda^3\ (b-a)\ (c-a)\ (c-b) \begin{vmatrix} abc & -(bc+ca+ab) & a+b+c \\ \lambda & 2 & 0 \\ 0 & \lambda & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

а по томе се види да су три корена дате еквације $= 0$; остала два корена одређена су овом квадратном еквацијом:

$$(a+b+c)\ \lambda^2 + 3\ (bc+ac+ab)\ \lambda + 6abc = 0.$$

ОДЕЉАК ТРЕЋИ.

МИНОРИ.

21. Узмимо да нам је дата нека детерминанта n-тога реда, па замислимо да смо у њезиној матрици пребрисали m врста и m колона $(m < n)$. У том случају остаће у схеми свега $n - m$ врста и $n - m$ колона. Та схема биће поново једна матрица, а та матрица представљаће симболички једну детерминанту $(n - m)$-тог реда. У тој детерминанти јављаће се само елементи првобитне детерминанте; таква детерминанта зове се *минор* [1]) првобитне детерминанте.

Нека нам је н. пр. дата детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ако из матрице избришемо прву врсту и прву колону, т. ј. ако из матрице избришемо ону врсту и ону колону, у којој се налази елеменат a_{11}, онда ћемо добити ову детерминанту $(n - 1)$-вог реда:

[1] Минор зову енглески писци *minor*, француски *mineur*, немачки *Unterdeterminante* или *Subdeterminante*.

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Та детерминанта била би један од т. зв. *првих минора* дате детерминанте. Но јасно је да сваком елементу првобитне детерминанте одговара по један први минор; па како детерминанта n-тога реда има свега n^2 елемената, то ће према томе и детерминанта n-тога реда имати n^2 првих минора. Ти минори бележе се са $\Delta_{11}, \Delta_{12}, \cdots \Delta_{1n}, \cdots$ У опште је у том низу писменâ Δ са Δ_{ik} означен међу првим минорима онај, који одговара елементу a_{ik}, т. j. онај, што се добива, кад се из матрице дате детерминанте избрише i-та врста и k-та колона. Према томе би детерминанта (1) била означена са Δ_{11}.

Побришимо сад у датој матрици две врсте и две колоне. У том случају остаће у схеми свега $n - 2$ врсте и $n - 2$ колоне. Таква схема представљаће симболички једну детерминанту $(n - 2)$-гог реда, а та детерминанта зове се *други минор* првобитне детерминанте. На пример, ако побришемо у датој матрици прве две врсте и прве две колоне, онда ћемо добити детерминанту

$$\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Та детерминанта била би један од других минора првобитне детерминанте, а тај минор добива се, као што мало час поменусмо, кад се из првобитне матрице побришу прва и друга врста и прва и друга колона, па како је у тој детерминанти прва између пребрисаних врстâ (колонâ) била означена казаљком 1, а друга казаљком 2, то се тај минор симболички бележи са Δ_{12}^{12}. Тај исти минор добићемо у осталом и ако у детерминанти

$$D = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\Delta$$

побришемо прва два реда. Но како су сви елементи прве врсте те детерминанте означени казаљком 2, а сви елементи друге врсте казаљком 1, то ћемо тај минор морати означити са D_{12}^{21}, или са $-\Delta_{12}^{21}$, а по томе се види да је

$$\Delta_{12}^{12} = -\Delta_{12}^{21}.$$

У опште се може доказати да је

$$\Delta_{ik}^{rs} = -\Delta_{ik}^{sr} = -\Delta_{ki}^{rs}.$$

Свега тих других минора има $\binom{n}{2}^2$.

Сличним путем могли бисмо у првобитној матрици побрисати три врсте и три колоне. Тада бисмо добили један од *трећих минора* првобитне детерминанте. Такав један минор биће н. пр. детерминанта

$$\begin{vmatrix} a_{44} & a_{45} & \cdots & a_{4n} \\ a_{54} & a_{55} & \cdots & a_{5n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n4} & a_{n5} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Тај минор бележићемо са Δ_{123}^{123}.

Кад бисмо у првобитној матрици побрисали m врста и m колона, онда бисмо добили један од *m-тих минора* дате детерминанте. Ако су тада пребрисане врсте означене са $i, j, k, \cdots$, а пребрисане колоне са $r, s, t, \cdots$ онда ћемо тај минор бележити са

$$\varDelta^{ijk\ldots}_{rst\ldots}.$$

Поменућемо само још то да ће m-ти минори бити детерминанте $(n - m)$-тог реда.

22. У сваком члану детерминанте јавља се, као што знамо, један једини елеменат сваке врсте и један једини елеменат сваке колоне. Према томе ће се у сваком члану детерминанте $\varDelta = \Sigma \pm a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ морати јављати и по један елеменат прве врсте. То значи да се у сваком члану детерминанте $\varDelta$ мора јављати као чинитељ један од елемената $a_{11}, a_{12}, \cdots a_{1n}$. Извуцимо сад a_{11} као заједнички чинитељ из свих чланова у којима се a_{11} јавља и означимо кофактор његов (т. ј. израз којим ће у детерминанти бити помножен елеменат a_{11}) са A_{11}. По ономе, што мало час рекосмо, јасно је да се у кофактору A_{11} не ће јављати ни један елеменат прве врсте, а производ $a_{11}A_{11}$ представљаће збир свих чланова детерминанте $\varDelta$, у којима се јавља елеменат a_{11}. — Даље, извуцимо a_{12} као заједнички чинитељ из свих чланова у којима се јавља елеменат a_{12} и означимо његов кофактор са A_{12}. У том кофактору не ће се такођер јављати ни један елеменат прве врсте. — Најзад, извуцимо из осталих чланова детерминанте $\varDelta$ елементе $a_{13}, a_{14}, \cdots a_{1n}$ као заједничке чинитеље и означимо њихове кофакторе са $A_{13}, A_{14}, \cdots A_{1n}$. У тим кофакторима не ће се поново јављати ни један елеменат прве врсте, а у производима $a_{13}A_{13}$, $a_{14}A_{14}, \cdots a_{1n}A_{1n}$ биће сви они чланови детерминанте у којима се јављају елементи $a_{13}, a_{14}, \cdots a_{1n}$. Како међу тим у детерминанти $\varDelta$ нема ни једнога члана у којем се не би јављао ма који између поменутих елемената прве врсте, то је јасно да ћемо детерминанту $\varDelta$ моћи изразити оваким збиром:

$$\varDelta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Кад се тако напише детерминанта, онда се каже *да је детерминанта развијена по елементима прве врсте.*

Но како се у сваком члану детерминанте $\varDelta$ јавља по један елеменат сваке врсте и по један елеменат сваке колоне, биће јасно да ћемо сваку детерминанту моћи развити по елементима ма које врсте или ма које колоне, а по оном истом методу, по коме смо је мало час развили по елементима прве врсте. Биће дакле

$$\varDelta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \tag{2}$$

или

$$\varDelta = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \cdots + a_{ni}A_{ni} \tag{3}$$

$$(i = 1,2,3,\cdots n).$$

Кофакторе $A_{i1}, A_{i2}, \cdots A_{in}$ и $A_{1i}, A_{2i}, \cdots A_{ni}$ одредићемо одмах у идућем члану, а за сада поменућемо само то, да се у кофакторима $A_{i1}, A_{i2}, \cdots A_{in}$ не јавља ни један елеменат i-те врсте, а у кофакторима $A_{1i}, A_{2i}, \cdots A_{ni}$ ни један елеменат i-те колоне.

У свакој детерминанти n-тога реда има n^2 елемената. Детерминанта n-тога реда може се дакле сматрати као функција, која зависи од n^2 променљивих. *Делимичан извод те функције по елементу a_{ik} јесте управо кофактор A_{ik}, који одговара елементу a_{ik}*:

$$\frac{\partial \varDelta}{\partial a_{ik}} = A_{ik}.$$

Стога се обрасци (2) и (3) могу и овако написати:

$$\varDelta = a_{i1}\frac{\partial \varDelta}{\partial a_{i1}} + a_{i2}\frac{\partial \varDelta}{\partial a_{i2}} + \cdots + a_{in}\frac{\partial \varDelta}{\partial a_{in}},$$

$$\varDelta = a_{1i}\frac{\partial \varDelta}{\partial a_{1i}} + a_{2i}\frac{\partial \varDelta}{\partial a_{2i}} + \cdots + a_{ni}\frac{\partial \varDelta}{\partial a_{ni}}.$$

23. Теорема. *Кофактор неког елемента a_{ik} у развијеном облику детерминанте $\varDelta = \Sigma \pm a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ добива* *се, кад се међу првим минорима минор* $\varDelta_{ik}$, *што одговара елементу* a_{ik}, *помножи модулом* $(-1)^{i+k}$.

Треба дакле доказати да је

$$A_{ik} = (-1)^{i+k}\varDelta_{ik}.$$

Узмимо да смо дату детерминанту развили по елементима прве врсте, т. ј. узмимо да је

$$\varDelta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}. \qquad (4)$$

Све чланове детерминанте $\varDelta$, у којима се јавља елеменат a_{11}, добићемо овако: пермутоваћемо у главном члану $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ дате детерминанте било прве, било друге казаљке, не дирајући при томе у казаљке првог елемента a_{11}; другим речима, мораћемо пермутовати било прве било друге казаљке у производу $a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$ и помножити сваку ту пермутацију са a_{11}, ако хоћемо да добијемо члан $a_{11}A_{11}$ алгебарског збира (4). Сума тих пермутација представља међу тим детерминанту $\Sigma \pm a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$, а та је детерминанта један од првих минора детерминанте $\varDelta$ и то минор $\varDelta_{11}$. То значи да је

$$A_{11} = \Sigma \pm a_{22}a_{33}\cdots a_{nn} = \varDelta_{11}.$$

Сменимо сад у првобитној детерминанти узајамно прве две колоне. У детерминанти $\Sigma \pm a_{12}a_{21}a_{33}\cdots a_{nn}$, коју ћемо том разменом колонâ добити, биће први елеменат a_{12}, па како је првобитна детерминанта у том случају (чл. 15.) морала променити свој знак, биће

$$\Sigma \pm a_{12}a_{21}a_{33}\cdots a_{nn} = -\varDelta,$$

т. ј. биће

$$\Sigma \pm a_{12}a_{21}a_{33}\cdots a_{nn} = -a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} - \cdots - a_{1n}A_{1n}.$$

Према оном што мало час поменусмо, биће међу тим кофактор елемента a_{12} у детерминанти $\Sigma \pm a_{12}a_{21}a_{33}\cdots a_{nn}$

ова детерминанта: $\Sigma \pm a_{21}a_{33}\cdots a_{nn}$. По последњој еквацији јасно је дакле, да је

$$A_{12} = -\Sigma \pm a_{21}a_{33}\cdots a_{nn},$$

па како је збиром $\Sigma \pm a_{21}a_{33}\cdots a_{nn}$ представљен први минор, што у детерминанти Δ одговара елементу a_{12}, биће јасно да је

$$A_{12} = -\Delta_{12}.$$

Даље, ако узајамно сменимо прву и трећу колону, онда ћемо сличним путем моћи доказати да је $A_{13} = \Delta_{13}$ и т. д. Најзад, кад бисмо сменили прву и последњу колону, онда бисмо могли доказати да је $A_{1n} = (-1)^{1+n}\Delta_{1n}$. По томе се види да се еквација (4) може овако написати:

$$\Delta = a_{11}\Delta_{11} - a_{12}\Delta_{12} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\Delta_{1n}.$$

Знаци свих кофактора елемената прве врсте одређују се дакле по закону формулисаном обрасцем

$$A_{ik} = (-1)^{i+k}\Delta_{ik}.$$

Остаје нам још да покажемо, да се тај образац може применити и на кофактор A_{ik} неког општег елемента a_{ik} дате детерминанте. Тај доказ је веома прост. Треба само имати у виду ово (чл. 16.) правило: кад се у детерминанти $\Delta = \Sigma \pm a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ помери само i-та врста и само k-та колона и то тако, да елеменат a_{ik} првобитне детерминанте Δ у новој детерминанти D буде први елеменат, онда је $D = (-1)^{i+k}\Delta$. То значи да је и

$$\Delta = (-1)^{i+k}D. \qquad (5)$$

Међу тим је кофактор првог елемента a_{ik} детерминанте D управо први минор Δ_{ik} првобитне детерминанте Δ. Према томе је

$$D = a_{ik}\,\Delta_{ik} + \cdots.$$

Ако се опет с друге стране детерминаната Δ развије по елементима своје i-те врсте, онда ће бити

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{ik}A_{ik} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

Према обрасцу (5) биће дакле

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{ik}A_{ik} + \cdots = (-1)^{i+k}(a_{ik}\Delta_{ik} + \cdots),$$

а по томе се види да је заиста у опште

$$A_{ik} = (-1)^{i+k}\Delta_{ik}.$$

Напомена I. Кофактори $A_{11}, A_{12}, \cdots A_{ik}, \cdots A_{nn}$ су детерминанте $(n-1)$-вог реда. Свака таква детерминанта $(n-1)$-вог реда може се према поменутим правилима развити по елементима ма ког свог реда, а кофактори појединих елемената тих детерминаната били би детерминанте $(n-2)$-гог реда. Те детерминанте могле би се такође развити по елементима појединих редова њихових, а кофактори појединих елемената тих детерминаната биће детерминанте $(n-3)$-ћег реда и т. д. Свакад се дакле израчунавање вредности појединих детерминаната може свести на израчунавање вредности детерминаната нижих редова.

Напомена II. Многи писци зову кофакторе A_{ik} првим минорима или просто минорима.

Прим. 1. Кофактори појединих елемената детерминанте

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

јесу

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

По томе се види да су кофактори елемената, што се налазе на главној и споредној дијагонали, позитивни; кофактори осталих елемената су негативни.

Према томе је

$$\begin{aligned}
\Delta = & \ a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
= & -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
= & \ a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\
= & \ a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\
= & -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\
= & \ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Прим. 2. Наћи кофактор елемента c_4 у детерминанти $(a_1 b_2 c_3 d_4)$.

Одг. — $(a_1 b_2 d_3)$.

Прим. 3. Доказати да је

$$(a_1b_2c_3d_4) = a_1(b_2c_3d_4) - a_2(b_1c_3d_4) + a_3(b_1c_2d_4) - a_4(b_1c_2d_3)$$

$$= a_1[b_2(c_3d_4) - b_3(c_2d_4) + b_4(c_2d_3)] - a_2[b_1(c_3d_4) - b_3(c_1d_4) + b_4(c_1d_3)]$$

$$+ a_3[b_1(c_2d_4) - b_2(c_1d_4) + b_4(c_1d_2)] - a_4[b_1(c_2d_3) - b_2(c_1d_3) + b_3(c_1d_2)]$$

$$= a_1b_2c_3d_4 - a_1b_2c_4d_3 - a_1b_3c_2d_4 + a_1b_3c_4d_2 + a_1b_4c_2d_3 - a_1b_4c_3d_2$$

$$- a_2b_1c_3d_4 + a_2b_1c_4d_3 + a_2b_3c_1d_4 - \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$+ a_3b_1c_2d_4 - a_3b_1c_4d_2 - a_3b_2c_1d_4 + \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$- a_4b_1c_2d_3 + a_4b_1c_3d_2 + a_4b_2c_1d_3 - a_4b_2c_3d_1 - a_4b_3c_1d_2 + a_4b_3c_2d_1.$$

24. Узмимо сад, *да су у неком реду неке детерминанте сви елементи нуле сем једног јединог елемента тога реда.* При израчунавању вредности таквих детерминаната најбоље је развити детерминанту по елементима онога реда, у коме се поменуте нуле налазе. На пример, нека су сви елементи прве врсте нуле сем првог елемента те врсте. Детерминанта ће у том случају бити овог облика:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ако је развијемо по елементима прве врсте, добићемо према мало час поменутим правилима ово:

$$\Delta = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

По томе се види да се дата детерминанта Δ свела на једну детерминанту $(n-1)$-вог реда. Но сем тога види се уједно и то, да вредност детерминанте Δ никако не зависи од вредности елемената $a_{21}, a_{31}, \cdots a_{n1}$. То значи да детерминанта Δ не ће променити своју вредност, ако у првој колони њезине матрице место бројева $a_{21}, a_{31}, \cdots a_{n1}$ напишемо неке сасвим друге бројеве $p, q, \cdots r$. Биће дакле свакад

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ q & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Пођимо сад даље, па претпоставимо да је у првобитној детерминанти Δ и

$$a_{23} = a_{24} = \cdots = a_{2n} = 0.$$

У том случају је

$$\Delta = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

У овај мах не зависи, као што се види, детерминанта Δ ни од елемената $a_{21}, a_{31}, \cdots a_{n1}$ прве колоне, ни од елемената $a_{32} \cdots a_{n2}$ друге колоне. Према томе детерминанта Δ не ће променити своју вредност ако у првој и другој колони њезине матрице место бројева $a_{21}, a_{31}, \cdots a_{n1}$ и $a_{32}, \cdots a_{n2}$ напишемо неке сасвим друге бројеве $p, q, \cdots r$ и $s \cdots t$. Биће дакле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ q & s & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r & t & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

У опште би се могло доказати ово правило:

Правило. *Ако су у некој детерминанти сви елементи, што леже с једне стране главне дијагонале нуле, онда се детерминанта своди на главни члан, а вредност њезина не зависи од вредности осталих елемената њезиних.*

По томе правилу је н. пр.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & c_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & p & q & r \\ 0 & b_2 & s & t \\ 0 & 0 & c_3 & u \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 d_4.$$

Прим. 1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -14.$

Прим. 2. Доказати да је

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Прим. 3. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$

Напом. Кад је детерминанта n-тога степена и кад су у њој сви елементи више споредне дијагонале $= 0$, онда се детерминанта добива, кад се модуо $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ помножи елементима те дијагонале. Зашто?

25. По оном, што мало час доказасмо, јасно је да је

$$a \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ p & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ако се узме да је $a = 1$, онда ће бити

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Сличним путем могло би се доказати и да је

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & p & \cdots & q \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

По томе се види да се ред неке детерминанте свакад може повисити за јединицу. Детерминанта n-тога реда може се дакле свакад изразити једном детерминантом $(n+1)$-вога реда. Та детерминанта $(n+1)$-вога реда добива се из првобитне детерминанте овако: треба у матрици првобитне детерминанте у правцу главне дијагонале у лево више првог елемента написати 1, па у десно од те јединице више сваке колоне (или ниже ње у правцу сваке врсте) написати по једну нулу, а испод те јединице у правцу сваке врсте (или у десно од ње више сваке колоне) по један — ма какав — број. По томе правилу може се у осталом повисити за јединицу и ред поменуте детерминанте $(n+1)$-вога реда, па бисмо према томе првобитну детерминанту могли изразити једном детерминантом $(n+2)$-гога реда. Ако и тој детерминанти повисимо ред за јединицу, па не само њој, него и свакој оној, која се узастопце тим путем буде добијала, онда ће нам јасно бити, *да се у опште ред сваке детерминанте може повисити за колико се год хоће јединица.*

Прим. 1. $$a = \begin{vmatrix} 1 & p \\ 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q & 1 & p \\ r & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & s & t & u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & q & 1 & p \\ 0 & r & 0 & a \end{vmatrix} = \text{ит.д.}$$

Прим. 2. $$\begin{vmatrix} ab_1 - a_1b & ab_2 - a_2b \\ ac_1 - a_1c & ac_2 - a_2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & aa_1 - a_1a & aa_2 - a_2a \\ b & ab_1 - a_1b & ab_2 - a_2b \\ c & ac_1 - a_1c & ac_2 - a_2c \end{vmatrix} : a$$

$$= a \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

26. Теорема. *Ако се елементи неке врсте (неке колоне) помноже кофакторима насрамних елемената друге неке врсте (друге неке колоне), онда је здир тих производа* $= 0$.

Узмимо да нам је дата нека детерминанта

$$\varDelta = \Sigma \pm a_{11}a_{22}\cdots a_{ii}\cdots a_{kk}\cdots a_{nn},$$

па побришимо у њезиној матрици k-ту врсту и напишимо место побрисаних елемената наспрамне елементе i-те врсте. Тим путем добићемо ову детерминанту

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

а вредност те детермананте биће $= 0$. Ако и прву и другу детерминанту развијемо по елементима k-те врсте, добићемо ово:

$$\varDelta = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn},$$

$$D = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0.$$

По томе се види да се израз $a_{i1}A_{k1} + \cdots$ добива, кад се у изразу $a_{k1}A_{k1} + \cdots$ елементи k-те врсте матрице $\varDelta$ смене елементима i-те врсте те исте матрице. Другим речима, кад се елементи i-те врсте матрице $\varDelta$ помноже кофакторима наспрамних елемената k-те врсте те матрице, онда је збир тих производа $= D = 0$, а то смо и тврдили.

Дакле, кад нам је дата нека детерминанта

$$\varDelta = \Sigma \pm a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

онда је

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = \Delta, \quad \text{кад је } i = k,$$

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0, \quad \text{кад је } i \gtrless k,$$

$$a_{1i}A_{1k} + a_{2i}A_{2k} + \cdots + a_{ni}A_{nk} = \Delta, \quad \text{кад је } i = k,$$

$$a_{1i}A_{1k} + a_{2i}A_{2k} + \cdots + a_{ni}A_{nk} = 0, \quad \text{кад је } i \gtrless k.$$

На пример, нека је

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Кофактори елемената друге врсте су (прим. 1. чл. 23.)

$$A_{21} = -(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}), \quad A_{22} = (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}),$$

$$A_{23} = -(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}).$$

Стога је

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = -a_{11}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{12}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{13}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) \equiv 0.$$

ПРИМЕРИ.

1. Наћи вредност детерминанте

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Одг. — 16.

2. Наћи вредност детерминанте

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 8 & -5 \\ 8 & 0 & 8 & -5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Одг. 0.

3. Доказати да је

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\omega & 0 \\ \cos\omega & 1 & 0 \\ g & f & r^2 \end{vmatrix} = r^2 \sin^2\omega.$$

4. Доказати да је

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = -(Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Fvw + 2Gwu + 2Huv).$$

Напом. У изразу на десној страни означени су са A, B, C, F, G, H кофактори елемената a, b, c, f, g, h у минору

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

тако, да је управо

$$-\Delta = (bc - f^2)\, u^2 + (ca - g^2)\, v^2 + (ab - h^2)\, w^2 + 2(gh - af)\, vw$$
$$+ 2\,(hf - bg)\, wu + 2\,(fg - ch)\, uv.$$

5. Нека је

$$\begin{vmatrix} a & h & g & u & 0 \\ h & b & f & v & 0 \\ g & f & c & w & 0 \\ u & v & w & 0 & m \\ 0 & 0 & 0 & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

Доказати да је

$$n \begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = m^2 \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}.$$

6. Доказати да се свака детерминанта n-тога степена може изразити производом mD. У томе производу је са m означен некакав чинитељ, а са D нека детерминанта n-тога степена, у којој су елементи једнога реда $= 1$. — (в. прим. 2. чл. 18.)

7. Доказати да је

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}.$$

8. Доказати да је

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (bc + ca + ab) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

Напом. Треба помножити прву врсту детерминанте

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

(в. прим. 1. чл. 20.) са a, другу са b, трећу са c, па ту детерминанту додати левој детерминанти у прим. 7. и те две детерминанте написати у облику једне детерминанте.

9. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a-b)(a-c)(a-d) \times (b-c)(b-d)(c-d).$$

10. $$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3.$$

11. Ако је у некој детерминанти $\Delta = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$ први елеменат $a_{11} = 0$, и ако су остали елементи прве врсте и прве колоне $= 1$, онда се детерминанта не ће изменити, ако елементима ма које врсте (колоне) минора Δ_{11} додамо неку сталну количину.

12. Са $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ су означене неке сталне количине. Доказати да је

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 1 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_1+a+\alpha & b_1+b+\alpha & c_1+c+\alpha \\ 1 & a_2+a+\beta & b_2+b+\beta & c_2+c+\beta \\ 1 & a_3+a+\gamma & b_3+b+\gamma & c_3+c+\gamma \end{vmatrix}.$$

13. $$\begin{vmatrix} x & y+z+t & x+y & z+t \\ y & z+t+x & y+z & t+x \\ z & t+x+y & z+t & x+y \\ t & x+y+z & t+x & y+z \end{vmatrix} = 0.$$

14. Изразити у облику једне детерминанте збир

$$(a_1b_4c_5) + (a_2b_4c_5) - (a_3b_4c_5).$$

15. Написати кофакторе елемената треће врсте у детерминанти $|a_{18}|$.

16. Доказати да је

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & h_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & h_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \cdots & h_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n & \cdots & h_n \end{vmatrix} = \frac{1}{a_1{}^{n-2}} \begin{vmatrix} (a_1b_2) & (a_1c_2) & \cdots & (a_1h_2) \\ (a_1b_3) & (a_1c_3) & \cdots & (a_1h_3) \\ (a_1b_4) & (a_1c_4) & \cdots & (a_1h_4) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_1b_n) & (a_1c_n) & \cdots & (a_1h_n) \end{vmatrix}.$$

17. Доказати да је

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & g_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & g_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \cdots & g_3 & h_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n & \cdots & g_n & h_n \end{vmatrix} = \frac{1}{b_1c_1d_1\cdots g_1} \begin{vmatrix} (a_1b_2) & (b_1c_2) & \cdots & (g_1h_2) \\ (a_1b_3) & (b_1c_3) & \cdots & (g_1h_3) \\ (a_1b_4) & (b_1c_4) & \cdots & (g_1h_4) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_1b_n) & (b_1c_n) & \cdots & (g_1h_n) \end{vmatrix}.$$

18. На основу последња два обрасца доказати да је

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9.$$

27. Комплементарне детерминанте. Ако у матрици неке детерминанте $\Delta = \Sigma \pm a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ побришемо m врста и m колонâ, онда ћемо (чл. 21.) добити један од m-тих минора детерминанте Δ. Тај минор ћемо означити са M_{n-m}; са M_{n-m} биће дакле означена једна детерминанта $(n-m)$-тога реда. Ако из матрице Δ издвојимо елементе, што се налазе и у пребрисаним врстама и у пребрисаним колонама, не мењајући при томе међусобни распоред тих елемената, онда ћемо поново добити једну детерминанту. Та детерминанта биће m-тога реда; она ће бити један од $(n-m)$-тих минора првобитне детерминанте Δ. Тај минор означићемо са M_m. Упоредивши миноре M_{n-m} и M_m уочићемо ово двоје: 1-во, збир редова тих минора је $(n-m)+m=n=$ реду првобитне детерминанте и 2-го, ни један елеменат минора M_{n-m} не налази се ни у једном од оних редова детерминанте Δ, у коме се налазе елементи минора M_m и обратно. Таква два минора зову се *комплементарни минори.*

На прилику, елеменат a_{ik} и први минор Δ_{ik} су комплементарни минори.

Или, за детерминанту

$$\Delta = \Sigma \pm a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55}$$

су

$$\Delta_{12}^{12} = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

и

$$\Delta_{345}^{345} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

комплементарни минори.

Прим. 1. Дата је детерминанта $(a_1b_2c_3d_4e_5f_6)$. Који су минори комплементарни с минорима (c_3e_5), $(b_1e_4f_6)$, $(a_1c_2e_3f_5)$?

Прим. 2. Јесу ли минори $(a_1b_2c_3)$ и (b_4e_5) детерминанте $(a_1b_2c_3d_4e_5)$ комплементарни?

28. Нека нам је дата детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Главни члан те детерминанте је $a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$. Ако у том члану пермутујемо само прве две прве казаљке 1 и 2, добићемо овај члан дате детерминанте: $-a_{21}a_{12}a_{33}\cdots a_{nn}$. Алгебарски збир

$$a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn} - a_{21}a_{12}a_{33}\cdots a_{nn} = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\, a_{33}\cdots a_{nn}$$

$$= \Sigma \pm (a_{11}a_{22}) \cdot a_{33}\cdots a_{nn} \tag{6}$$

биће дакле један део оног збира од $n!$ чланова што представља детерминанту Δ. Пермутујмо сад у производу (6) на све могуће начине прве казаљке чинитеља $a_{33}\cdots a_{nn}$. Како ће алгебарски збир тих пермутација бити детерминанта $\Sigma \pm a_{33}\cdots a_{nn}$, то ће сви чланови детерминанте Δ, што су помножени чинитељем

$$\Sigma \pm a_{11}a_{22} = (a_{11}a_{22}),$$

бити представљени овим производом:

$$(a_{11}a_{22})\, \Sigma \pm a_{33}\cdots a_{nn}. \tag{7}$$

Оба чинитеља тога производа су детерминанте; те детерминанте су комплементарни минори. Како се минор $\Sigma \pm a_{33}\cdots a_{nn}$ бележи са Δ_{12}^{12}, то је јасно *да ће кофактор минора* $(a_{11}a_{22})$ *у детерминанти* Δ *бити комплементаран минор* Δ_{12}^{12}. — Поменућемо још то да у производу (7) има свега $2!\ (n-2)!$ чланова детерминанте Δ.

Разменимо сад узајамно другу и трећу колону у матрици Δ. Тим путем добићемо детерминанту $D = -\Delta$, а главни члан те детерминанте биће $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}\cdots a_{nn}$. По ономе, што мало час рекосмо, биће јасно да ће производ

$$(a_{11}a_{23})\ \Sigma \pm a_{32}a_{44}\cdots a_{nn}$$

представљати један део чланова детерминанте D. Но како је $\varDelta = -D$, то ће производ

$$-(a_{11}a_{23})\ \Sigma \pm a_{32}a_{44}\cdots a_{nn}$$

представљати један део чланова детерминанте $\varDelta$. У том производу биће такођер свега $2!\ (n-2)!$ чланова првобитне детерминанте. Детерминанте $(a_{11}a_{23})$ и $\Sigma \pm a_{32}a_{44}\cdots a_{nn}$ су међу тим комплементарни минори; па како је

$$\Sigma \pm a_{32}a_{44}\cdots a_{nn} = \varDelta_{13}^{12},$$

биће јасно да минор $(a_{11}a_{23})$ не ће у детерминанти $\varDelta$ бити непосредно помножен комплементарним минором $\varDelta_{13}^{12}$, већ са $-\varDelta_{13}^{12}$.

Премештајући и даље узајамно по две колоне матрице $\varDelta$, и тражећи кофакторе минорâ

$$(a_{11}a_{24}),\ (a_{11}a_{25})\cdots(a_{11}a_{2n}),\ (a_{12}a_{23})\cdots(a_{1,n-1}a_{2n})$$

у детерминанти $\varDelta$, нашли бисмо да је сваки између тих минора помножен својим комплементарним минором $\varDelta_{ik}^{12}$ или, управо тачније, са $\pm \varDelta_{ik}^{12}$. Кад ће се испред $\varDelta_{ik}^{12}$ узети знак плус, а кад знак минус, то ћемо касније одредити.

Означимо сад са A_{ik}^{12} кофактор $\pm \varDelta_{ik}^{12}$ минора $(a_{1i}a_{2k})$ и саберимо поменуте производе. Збир њихов биће

$$(a_{11}a_{22})A_{12}^{12} + (a_{11}a_{23})A_{13}^{12} + \cdots + (a_{11}a_{2n})A_{1n}^{12} + (a_{12}a_{23})A_{23}^{12} + \cdots$$
$$+ (a_{1,n-1}a_{2n})A_{n-1,n}^{12}.$$

У томе збиру има свега

$$2!\ (n-2)!\ \binom{n}{2} \equiv n!$$

чланова детерминанте $\varDelta$. У томе збиру биће дакле сви чланови детерминанте $\varDelta$, а то значи да је

$$\varDelta = \sum (a_{1i} a_{2k}) A_{ik}^{12} = \sum_{\substack{i=1 \\ k=2}}^{\substack{k=n \\ i=n-1}} \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1k} \\ a_{2i} & a_{2k} \end{vmatrix} A_{ik}^{12}, \qquad k > i.$$

Како се међу тим може учинити, да ма које две врсте или ма које две колоне буду прве две врсте у детерминанти, то је према горњем обрасцу јасно *да се свака детерминанта може изразити одређеним алгебарским збиром производа комплементарних минора. У сваком таквом производу је један од минорâ детерминанта другога реда; онај други минор је према томе детерминанта $(n-2)$-гога реда.*

29. Треба још наћи правило по коме се одређује знак минору $\varDelta_{ik}^{rs}$. Означимо тога ради ма који између поменутих производа комплементарних минора за један часак са $M_2 M_{n-2}$, па премештајмо редове у којима се налазе елементи $(n-2)$-гог минора M_2 дотле, док ти редови не буду прва два реда у детерминанти. У том случају добићемо једну нову детерминанту D у којој ће главна дијагонала бити састављена из главних дијагонала комплементарних минора M_2 и M_{n-2}. Ако смо сад врсте премештали свега u пута, а колоне свега v пута, онда ће бити

$$\varDelta = (-1)^{u+v} D.$$

Но како се у детерминанти D минор M_2 множи са $+M_{n-2}$, то је јасно да ће у детерминанти $\varDelta$ кофактор минора M_2 бити $(-1)^{u+v} M_{n-2}$. Према томе смо добили ово правило:

Правило. *Ако су са M_2 и M_{n-2} означена два комплементарна минора од којих је први другог, а други $(n-2)$-гога степена, онда је кофактор M_{n-2} минора M_2 у детерминанти $\varDelta$ помножен са $(-1)^{u+v}$. У томе експоненту $u+v$ означени су са u и v бројеви, који нам казују колико је пута било потребно премештати* *врсте и колоне у матрици Δ, док главне дијагонале комплементарних минора не постану саставни делови главне дијагонале матрицине.*

Но још ћемо боље то правило формулисати овако. Ако је

$$M_{n-2} = \Delta_{ik}^{rs}$$

онда се у матрици детерминанте Δ у лево морају премештати колоне

$$(i-1)+(k-2)$$

пута, а врсте на више

$$(r-1)+(s-2)$$

пута, док минор M_2 међу минорима друге врсте не заузме прво место у матрици. У том случају ће уједно и главне дијагонале минорâ M_2 и M_{n-2} бити саставни делови главне дијагонале матрицине. *Према томе ће знак минора Δ_{ik}^{rs} бити одређен модулом*

$$(-1)^{(i-1)+(k-2)+(r-1)+(s-2)}$$

т. ј. знаком модула

$$(-1)^{i+k+r+s}.$$

То значи да је у опште

$$A_{ik}^{rs} = (-1)^{i+k+r+s} \Delta_{ik}^{rs}.$$

Кад је дакле $r = 1$, $s = 2$, онда је

$$A_{ik}^{12} = (-1)^{i+k+1+2} \Delta_{ik}^{12} = (-1)^{i+k+1} \Delta_{ik}^{12}.$$

Прим. 1.
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (a_1b_2)(c_3d_4) - (a_1c_2)(b_3d_4) \\ &+ (a_1d_2)(b_3c_4) + (b_1c_2)(a_3d_4) \\ &- (b_1d_2)(a_3c_4) + (c_1d_2)(a_3b_4). \end{aligned}$$

Напом. По том се обрасцу обично најлакше израчунавају детерминанте четвртог степена.

Прим. 2. Одредити вредност детерминанте (в. прим. 18. стр. 53.)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

По поменутом обрасцу је

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \cdot 5 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 9.$$

Прим. 3. Доказати да је

$$(a_1 b_2 c_3 d_4 e_5) = (a_1 b_2)(c_3 d_4 e_5) - (a_1 c_2)(b_3 d_4 e_5) + (a_1 d_2)(b_3 c_4 e_5)$$

$$- (a_1 e_2)(b_3 c_4 d_5) + (b_1 c_2)(a_3 d_4 e_5) - (b_1 d_2)(a_3 c_4 e_5)$$

$$+ (b_1 e_2)(a_3 c_4 d_5) + (c_1 d_2)(a_3 b_4 e_5) - (c_1 e_2)(a_3 b_4 d_5)$$

$$+ (d_1 e_2)(a_3 b_4 c_5)$$

$$= -(a_2 b_4)(c_1 d_3 e_5) + (a_2 c_4)(b_1 d_3 e_5) - (a_2 d_4)(b_1 c_3 e_5)$$

$$+ (a_2 e_4)(b_1 c_3 d_5) - (b_2 c_4)(a_1 d_3 e_5) + (b_2 d_4)(a_1 c_3 e_5)$$

$$- (b_2 e_4)(a_1 c_3 d_5) + (c_2 d_4)(a_1 b_3 e_5) + (c_2 e_4)(a_1 b_3 d_5)$$

$$- (d_2 e_4)(a_1 b_3 c_5)$$

= и т. д.

Прим. 4. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ x & y & \alpha_1 & \beta_1 \\ z & t & \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = (a_1 b_2)(\alpha_1 \beta_2).$

30. Вратимо се сад поново детерминанти

$$\Delta = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

и њезином главном члану $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}\cdots a_{nn}$, па пермутујмо у чинитељу $a_{11}a_{22}a_{33}$ тога члана на све могуће начине прве три прве казаљке 1, 2, 3. Алгебарски збир тих пермутација биће детерминанта $\Sigma \pm a_{11}a_{22}a_{33} = (a_{11}a_{22}a_{33})$. Ако сваки члан те детерминанте помножимо са $a_{44}\cdots a_{nn}$, добићемо свега 3! чланова детерминанте Δ, т. ј. добићемо један део оног збира од $n!$ чланова, што представља детерминанту Δ. Пермутујмо даље на све могуће начине прве казаљке у чинитељу $a_{44}\cdots a_{nn}$ главнога члана. Збир тих чланова биће детерминанта $\Sigma \pm a_{44}\cdots a_{nn}$. По томе се види да ће у детерминанти Δ кофактор минора $(a_{11}a_{22}a_{33})$ бити детерминанта $\Sigma \pm a_{44}\cdots a_{nn}$, т. ј. *кофактор минора* $(a_{11}a_{22}a_{33})$ *биће комплементаран минор* Δ_{123}^{123}. Сви чланови производа

$$(a_{11}a_{22}a_{33}) \ \Sigma \pm a_{44}\cdots a_{nn}$$

— тих чланова има свега на број $3!\,(n-3)!$ — биће дакле чланови детерминанте Δ.

Разменимо сад узајамно трећу и четврту колону у матрици детерминанте Δ. Тим путем добићемо детерминанту $D = -\Delta$, а главни члан те детерминанте је $a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}a_{55}\cdots a_{nn}$. По ономе, што мало час рекосмо, биће јасно да ће производ

$$(a_{11}a_{22}a_{34}) \ \Sigma \pm a_{43}a_{55}\cdots a_{nn}$$

представљати један део чланова детерминанте D. У том производу биће такођер свега $3!\,(n-3)!$ чланова, а чинитељи његови $(a_{11}a_{22}a_{34})$ и $\Sigma \pm a_{43}a_{55}\cdots a_{nn}$ су комлементарни минори првобитне детерминанте. С тога је

$$\Sigma \pm a_{43}a_{55}\cdots a_{nn} = \varDelta_{124}^{123},$$

па како је $\varDelta = -D$, биће јасно да минор $(a_{11}a_{22}a_{34})$ не ће у детерминанти $\varDelta$ бити непосредно помножен комплементарним минором $\varDelta_{124}^{123}$, већ са $-\varDelta_{124}^{123}$.

Комбинујући даље без понављања по три и три колоне, и тражећи кофакторе минорâ

$$(a_{11}a_{22}a_{35}),\quad (a_{11}a_{22}a_{36}),\cdots,$$

нашли бисмо поново да је сваки између тих минора детерминанте $\varDelta$ помножен својим комплементарним минором $\varDelta_{ikl}^{123}$ или, управо тачније, кофактором $A_{ikl}^{123} = \pm \varDelta_{ikl}^{123}$.

Помножимо сад сваки између поменутих минора трећега степена својим кофактором и саберимо те производе. У том збиру биће свега

$$3!\,(n-3)!\binom{n}{3} = n!$$

чланова детерминанте $\varDelta$, т. ј. тај збир биће сама детерминанта $\varDelta$. Биће дакле

$$\varDelta = \sum_{\substack{i=1\\k=1\\l=1}}^{\substack{i=n\\k=n\\l=n}} (a_{1i}a_{2k}a_{3l} - a_{1i}a_{2l}a_{3k} + a_{1k}a_{2l}a_{3i} - a_{1k}a_{2i}a_{3l} + a_{1l}a_{2i}a_{3k}$$

$$- a_{1l}a_{2k}a_{3i})\, A_{ikl}^{123}$$

$$= \sum \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1k} & a_{1l} \\ a_{2i} & a_{2k} & a_{2l} \\ a_{3i} & a_{3k} & a_{3l} \end{vmatrix} \cdot A_{ikl}^{123}.$$

Но како се премештањем редова може учинити да ма које три врсте или ма које три колоне буду прве три врсте у детерминанти Δ, то је јасно, *да се свака детерминанта може изразити алгебарским збиром производâ комплементарних минора. Један од та два минора што се јављају као чинитељи у сваком производу је детерминанта трећега реда; онај други је према томе детерминанта $(n - 3)$-ћега реда.*

То правило може се и проширити и у том случају било би формулисано овако:

Теорема. *Кад се сви минори p-тог степена, што одговарају неком склопу од p редова неке детерминанте Δ, помноже комплементарним минорима, онда ће алгебарски збир тих производа бити детерминанта Δ.*

Лаплас је први *(Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde)* развијао детерминанте по производима њезиних минора; стога се поменута теорема зове *Лапласова теорема.*

Знак појединих производа у поменутом алгебарском збиру одређује се по истом оном методу, по коме се одређује знак кофарктора A_{ik}^{rs}, што се јављају, кад се детерминанта развија по елементима ма која своја два реда (чл. 29.). *Знак комплементарног минора $\Delta_{ikl\ldots}^{rst\ldots}$ одређен је дакле знаком модула*

$$(-1)^{(i-1)+(k-2)+(l-3)+\ldots+(r-1)+(s-2)+(t-3)+\ldots}$$

т. ј. знаком модула

$$(-1)^{i+k+l+\ldots+r+s+t\ldots}$$

То значи да је

$$A_{ikl\ldots}^{rst\ldots} = (-1)^{i+k+l+\ldots+r+s+t+\ldots}\,\Delta_{ikl\ldots}^{rst\ldots}.$$

Прим. 1. Наћи кофактор минора $(a_1b_3c_4)$ у детерминанти $(a_1b_2c_3d_4e_5f_6)$.

Прим. 2. Доказати да се детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{p+1,1} & \cdots & \cdots & a_{p+1,p+1} & \cdots & a_{p+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{n,p+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

може изразити овим производом детерминаната:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{p+1,p+1} & \cdots & a_{p+1,n} \\ a_{p+2,p+1} & \cdots & a_{p+2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,p+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Прим. 3. Са q, r, s, t, u, v означићемо неке количине које могу имати ма какву вредност. Доказати да је свакад

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 & 0 \\ q & r & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ s & t & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ u & v & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Прим. 4. Доказати да се свакад производ двеју детерминаната i-тог и j-тог степена може изразити једном детерминантом $(i+j)$-тог степена.

Прим. 5. Како се најлакше може развити детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ 0 & 0 & c_4 & d_4 & e_4 \\ 0 & 0 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} ?$$

Одг. Детерминанта се најлакше развија по елементима прве две колоне. Резултат је ово:

$$\Delta = (a_1 b_2)\,(c_3 d_4 e_5) - (a_1 b_3)\,(c_2 d_4 e_5) + (a_2 b_3)\,(c_1 d_4 e_5).$$

Напомена. У опште се Лапласова теорема згодно примењује при израчунавању неке детерминанте, кадгод у матрици те детерминанте има по више нула у појединим редовима.

Прим. 6. *Треба развити детерминанту*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} + x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + x & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} + x \end{vmatrix} = F(x)$$

и уредити ту детерминанту по степенима промењиве x.

Јасно је да је Δ функција n-тог степена промењиве x; коефицијенат степена x^n је 1, а апсолутан члан је $F(0) = |a_{1n}|$. Да бисмо нашли остале чланове, промотрићемо производ ова два комплементарна минора M_k и M_{n-k} (први минор нека је k-тог, а други $(n-k)$-тог степена):

$$M_k = \begin{vmatrix} a_{ii} + x & a_{ij} & \cdots \\ a_{ji} & a_{jj} + x & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad M_{n-k} = \begin{vmatrix} a_{pp} + x & a_{pq} & \cdots \\ a_{qp} & a_{qq} + x & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

У овом производу јавља се члан

$$x^k \begin{vmatrix} a_{pp} & a_{pq} & \dots & a_{pn} \\ a_{qp} & a_{qq} & \dots & a_{qn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{np} & a_{nq} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = x^k D_{n-k},$$

т. ј. у производу $M_k M_{n-k}$ је коефицијенат степена x^k детерминанта D_{n-k}; та детерминанта је $(n-k)$-тог степена, а главна дијагонала њезина састоји се из $(n-k)$ елемената главне дијагонале детерминанте $|a_{1n}|$. Збир свих таквих минора $(n-k)$-тог степена детерминанте $|a_{1n}|$ биће дакле коефицијенат степена x^k у детерминанти Δ. Стога је

$$\Delta = |a_{1n}| + x\Sigma D_{n-1} + x^2 \Sigma D_{n-2} + \cdots + x^n. \qquad (a)$$

На пример, ако је

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 + x & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 + x & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + x \end{vmatrix},$$

онда је

$$\Delta = (a_1 b_2 c_3) + [(a_1 b_2) + (a_1 c_3) + (b_2 c_3)]\, x + (a_1 + bc_2 + {}_3)\, x^2 + x^3.$$

31. Често се тражи *да се нека детерминанта развије по производима елемената неке врсте и неке колоне.* У том случају служићемо се једним *Кошијевим обрасцем,* који ћемо овако наћи.

Нека је $\Delta = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$, па узмимо да хоћемо да развијемо детерминанту по елементима r-те врсте и s-те колоне. Кофактор елемента a_{rs}, у коме се секу поменута два реда, биће $A_{rs} = (-1)^{r+s} \Delta_{rs}$. У том минору Δ_{rs} нема ни једног елемента r-те врсте и ни једног елемента s-те колоне првобитне Δ, а сви чланови детерминанте Δ у којима се јавља елеменат a_{rs} врсте r-те, а колоне s-те, налазиће се у производу

$$a_{rs} A_{rs}. \qquad (8)$$

У сваком другом члану те детерминанте јављаће се сем других елемената још и по један од осталих елемената r-те врсте и по један од осталих елемената s-те колоне. Ако те елементе означимо са a_{rk} и a_{is}, онда ћемо према томе моћи рећи ово: кад се из детерминанте Δ издвоје чланови што се налазе у производу $a_{rs}A_{rs}$, онда ће се у свима осталим члановима те детерминанте јављати производ $a_{rk}a_{is}$. Сви чланови детерминанте Δ што су помножени производом $a_{rk}a_{is}$ налазе се (чл. 28. и 29.) међу тим у производу

$$(-1)^{r+i+s+k} \cdot \begin{vmatrix} a_{rs} & a_{rk} \\ a_{is} & a_{ik} \end{vmatrix} \cdot \Delta_{sk}^{ri}$$

или, управо тачније, у делу

$$-(-1)^{r+i+s+k} a_{is}a_{rk}\Delta_{sk}^{ri}$$

тога производа. Означимо сад израз

$$(-1)^{r+i+s+k}\Delta_{sk}^{ri}$$

са B_{ik} и додајмо збир

$$-\Sigma_{ik}a_{is}a_{rk}B_{ik}$$

$$(i = 1, 2, \cdots r-1, r+1, \cdots n, \ k = 1, 2, \cdots s-1, s+1, \cdots n)$$

производу (8). Тада ћемо добити све чланове детерминанте Δ. Биће дакле

$$\Delta = a_{rs}A_{rs} - \Sigma_{ik}a_{is}a_{rk}B_{ik}.$$

То је поменути *Кошијев образац*. Поменућемо још само то, да смо чланове који би се добили, кад би се узело да је било $i = r$, било $k = s$ морали искључити из збира Σ стога, што се ти чланови већ јављају у производу $a_{rs}A_{rs}$.

Узмимо сад да хоћемо да развијемо детерминанту четвртог степена

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

по елементима прве врсте и прве колоне. У том случају ће Кошијев образац бити овог облика:

$$\Delta = a_{11}A_{11} - \Sigma_{ik} a_{i1} a_{1k} B_{ik};$$

казаљке i и k биће бројеви 2, 3, 4, а чинитељ B_{ik} је у овај мах ово:

$$B_{ik} = (-1)^{1+i+1+k} \Delta_{1\,k}^{1\,i} = (-1)^{i+k} \Delta_{1\,k}^{1\,i}.$$

Да бисмо добили све чланове збира Σ_{ik}, узећемо најпре да је $i = 2$, $k = 2, 3, 4$; затим да је $i = 3$, $k = 2, 3, 4$ и најзад да је $i = 4$, $k = 2, 3, 4$. Биће дакле

$$\begin{aligned} \Delta = a_{11}A_{11} &- a_{21}a_{12}B_{22} - a_{21}a_{13}B_{23} - a_{21}a_{14}B_{24} \\ &- a_{31}a_{12}B_{32} - a_{31}a_{13}B_{33} - a_{31}a_{14}B_{34} \\ &- a_{41}a_{12}B_{42} - a_{41}a_{13}B_{43} - a_{41}a_{14}B_{44}, \end{aligned}$$

па како је

$$A_{11} = \Sigma \pm a_{22}a_{33}a_{44},$$

а

$$B_{22} = (-1)^{2+2} \Delta_{12}^{12} = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{33}a_{44} - a_{43}a_{34},$$

$$B_{23} = (-1)^{2+3} \Delta_{13}^{12} = - \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = -(a_{32}a_{44} - a_{42}a_{34})$$

и т. д., биће и

$$\Delta = a_{11}\,\Sigma \pm a_{22}a_{33}a_{44} - a_{21}a_{12}\,(a_{33}a_{44} - a_{43}a_{34})$$

$$+ a_{21}a_{13}\,(a_{32}a_{44} - a_{42}a_{34}) - a_{21}a_{14}\,(a_{32}a_{43} - a_{42}a_{33})$$

$$+ a_{31}a_{12}\,(a_{23}a_{44} - a_{43}a_{24}) - a_{31}a_{13}\,(a_{22}a_{44} - a_{42}a_{24})$$

$$+ a_{31}a_{14}\,(a_{22}a_{43} - a_{42}a_{23}) - a_{41}a_{12}\,(a_{23}a_{34} - a_{33}a_{24})$$

$$+ a_{41}a_{13}\,(a_{22}a_{34} - a_{32}a_{24}) - a_{41}a_{14}\,(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}).$$

32. Заоквирене детерминанте. Кошијев образац примењује се нарочито згодно при израчунавању т. зв. *заоквирених детерминаната*. Такве детерминанте постају овако: нека матрица од n^2 елемената заоквири се једном врстом и једном колоном од n елемената, а за елеменат у коме се секу поменута врста и поменута колона узима се нула. На пример, ако матрицу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{9}$$

заоквиримо количинама u_1, u_2, u_3, добићемо ову детерминанту:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ако ту детерминанту развијемо по елементима четврте врсте и четврте колоне, добићемо по Кошијеву обрасцу ово:

$$\Delta = a_{44}A_{44} - \Sigma\, a_{i4}a_{4k}B_{ik}.$$

Но како је у овај мах $a_{44} = 0$, биће

$$\Delta = -\Sigma\, a_{i4}a_{4k}B_{ik}, \qquad i \text{ и } k < 4.$$

Тај збир ћемо поделити на два дела: на део у коме ће се јављати u^2_i, и на део у коме ће се јављати u_iu_k. Биће дакле

$$\Delta = -\sum_{i=1}^{i=3} a_{i4}a_{4i}B_{ii} - \sum_{i>k \text{ или } i<k}^{\substack{k=123\\ i=123}} a_{i4}a_{4k}B_{ik},$$

т. ј. биће

$$\begin{aligned}\Delta = -\,[(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})\, u_1^2 + (a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13})\, u_2^2 \\ + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\, u_3^2] \\ + (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12} + a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})\, u_2u_3 \\ - (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} + a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})\, u_3u_1 \\ + (a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23} + a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13})\, u_1u_2.\end{aligned}$$

Ако узмемо да је у матрици (9) $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$, т. ј. ако узмемо да је $a_{rs} = a_{sr}$, онда ћемо последњи израз моћи овако написати:

$$\begin{aligned}\Delta = -\,(B_{11}u_1^2 + B_{22}u_2^2 + B_{33}u_3^2 + 2B_{23}u_2u_3 + 2B_{31}u_3u_1 \\ + 2B_{12}u_1u_2).\end{aligned}$$

У том изразу означили смо са B_{ik} кофактор елемента a_{ik} у детерминанти (9). — (в. прим. 4. стр. 50.)

Напомена. Заоквирене детерминанте јављају се често у Аналитичној Геометрији. [1])

[1]) Види моју *Аналитичну Геометрију тачке, праве, круга и коничних пресека, 1896.*

33. Детерминанте с празном дијагоналом. Кад је у некој детерминанти сваки елеменат главне дијагонале нула, онда се каже да је у те детерминанте дијагонала „празна“ (determinant zero-axial, déterminant à diagonale vide).

Теорема. *Свака детерминанта може се изразити збиром детерминаната празне дијагонале.*

Нека је на име $\varDelta^{(n)} = \Sigma \pm a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$, па напишимо у тој детерминанти место сваког елемента главне дијагонале по једну нулу. У том случају добићемо ову детерминанту с празном дијагоналом:

$$\varDelta_0^{(n)} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdot\ \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

Сви чланови те детерминанте налазиће се у детерминанти $\varDelta^{(n)}$, а у свима осталим члановима детерминанте $\varDelta^{(n)}$ мораће се јављати бар један елеменат њезине главне дијагонале. Да бисмо дакле добили детерминанту $\varDelta^{(n)}$, мораћемо додати детерминанти $\varDelta_0^{(n)}$ све чланове детерминанте $\varDelta^{(n)}$, којих нема у детерминанти $\varDelta_0^{(n)}$, а те чланове добићемо овако. Означићемо са C_i неку комбинацију састављену из i елемената главне дијагонале, а са $\varDelta_0^{(n-i)}$ минор који тој комбинацији одговара у детерминанти $\varDelta_0^{(n)}$. Јасно је да ће тада производ $C_1\varDelta_0^{(n-1)}$ бити један од оних чланова детерминанте $\varDelta^{(n)}$, у којима се налази само један елеменат главне дијагонале. Стога ће збиром $\Sigma C_1\varDelta_0^{(n-1)}$ бити представљени сви чланови детерминанте $\varDelta^{(n)}$, у којима се јавља по један елеменат главне дијагонале. На исти начин може се доказати да ће у збиру $\Sigma C_2\varDelta_0^{(n-2)}$ бити сви чланови детерминанте $\varDelta^{(n)}$, у којима се јављају све два и два члана главне дијагонале и т. д. У опште ће се у збиру $\Sigma C_i\varDelta_0^{(n-i)}$ налазити сви чланови детерминанте $\varDelta^{(n)}$, у којима има свега i елемената главне дијагонале. По томе се види да је

$$\Delta^{(n)} = \Delta_0^{(n)} + \Sigma C_1 \Delta_0^{(n-1)} + \Sigma C_2 \Delta_0^{(n-2)} + \cdots + \Sigma C_i \Delta_0^{(n-i)}$$

$$+ \cdots + \Sigma C_{n-2} \Delta_0^{(2)} + C_n.$$

Треба поменути да члан $\Sigma C_{n-1} \Delta_0^{(1)}$ нисмо написали стога, што је $\Delta_0^{(1)} = 0$.

На пример,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + a_{11} \begin{vmatrix} 0 & a_{23} \\ a_{32} & 0 \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} 0 & a_{13} \\ a_{31} & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ a_{33} \begin{vmatrix} 0. & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} + a_{11}a_{22}a_{33}.$$

Ако се узме да је у детерминанти $\Delta^{(n)}$

$$a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = x,$$

онда ће производи C бити различити степени x-а, а мало час поменути образац биће овог облика:

$$\Delta^{(n)} = x^n + x^{n-2} \Sigma \Delta_0^{(2)} + x^{n-3} \Sigma \Delta_0^{(3)} + \cdots + x \Sigma \Delta_0^{(n-1)} + \Delta_0^{(n)}.$$

На пример,

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & x & 4 \\ 5 & 6 & x \end{vmatrix} = x^3 - x(1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 6) + 1 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 6 = x^3 - 37x + 56.$$

34. Делимични изводи и тотални диференцијал детерминанте. Нека је

$$\varDelta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}.$$

Делимичан извод те детерминанте по елементу x_{ik} биће (чл. 22.)

$$\frac{\partial \varDelta}{\partial x_{ik}} = X_{ik},$$

т. ј. делимичан извод детерминанте по елементу x_{ik} биће кофактор X_{ik}, који том елементу одговара, а производ

$$x_{ik} \frac{\partial \varDelta}{\partial x_{ik}}$$

представљаће све чланове детерминанте $\varDelta$ у којима се јавља елеменат x_{ik}.

Ако се међу елементима кофактора X_{ik} мења само елеменат x_{rs}, онда ће производ

$$x_{rs} \frac{\partial X_{ik}}{\partial x_{rs}} = x_{rs} \frac{\partial^2 \varDelta}{\partial x_{ik}\, \partial x_{rs}}$$

представљати све чланове што су у кофактору X_{ik} помножени са x_{rs}; стога ће се у производу

$$x_{ik}\, x_{rs} \frac{\partial^2 \varDelta}{\partial x_{ik}\, \partial x_{rs}}$$

јављати сви чланови што су у детерминанти $\varDelta$ помножени са $x_{ik} x_{rs}$ и т. д.

Узмимо сад да детерминанта Δ зависи од сваког елемента i-те врсте. Тоталан диференцијал $d_i\Delta$ детерминанте Δ биће у том случају збир делимичних диференцијала; биће дакле

$$d_i\Delta = X_{i1}dx_{i1} + X_{i2}dx_{i2} + \cdots + x_{in}dX_{in},$$

т. ј. биће

$$d_i\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{i-1,1} & x_{i-1,2} & \cdots & x_{i-1,n} \\ dx_{i1} & dx_{i2} & \cdots & dx_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ако се најзад узме да Δ зависи од свих својих елемената, онда ће тоталан диференцијал њезин бити

$$d\Delta = d_1\Delta + d_2\Delta + \cdots + d_n\Delta,$$

т. ј. биће према мало час поменутом обрасцу

$$d\Delta = \begin{vmatrix} dx_{11} & dx_{12} & \cdots & dx_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ dx_{21} & dx_{22} & \cdots & dx_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$\cdots + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ dx_{n1} & dx_{n2} & \cdots & dx_{nn} \end{vmatrix}.$$

На исти начин добили бисмо и овај образац:

$$d\Delta = \begin{vmatrix} dx_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ dx_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ dx_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11} & dx_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & dx_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & dx_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

Прим. 1. $v = \frac{M}{N}$; $N^2 dv = \begin{vmatrix} dM & M \\ dN & N \end{vmatrix}$; $d \begin{vmatrix} dM & M \\ dN & N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d^2M & M \\ d^2N & N \end{vmatrix}$.

Прим. 2. $\Delta = \Sigma \pm a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = \begin{vmatrix} a & 2b & c & 0 \\ 0 & a & 2b & c \\ b & 2c & m & 0 \\ 0 & b & 2c & m \end{vmatrix}$,

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a} = A_{11} + A_{22} = \begin{vmatrix} a & 2b & c \\ 2c & m & 0 \\ b & 2c & m \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} a & c \\ b & m \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial b} = 2A_{12} + 2A_{23} + A_{31} + A_{42} = 4b \begin{vmatrix} b & c \\ c & m \end{vmatrix} - 4m \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} + \cdots,$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial c} = A_{13} + A_{24} + 2A_{32} + 2A_{43} = \cdots,$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial m} = A_{33} + A_{44} = \cdots.$$

Прим. 3. Дата је детерминанта

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Наћи извод $\frac{dy}{dx}$.

Прим. 4. Диференцирати

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \sin y & \cos y \end{vmatrix}.$$

Прим. 5. Дата је детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix}.$$

Доказати да је

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Delta}{\partial u} = -(Au + Hv + Gw), \quad \frac{1}{2}\frac{\partial\Delta}{\partial v} = -(Hu + Bv + Fw),$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Delta}{\partial w} = -(Gu + Fv + Cw).$$

Напом. A, B, C, F, G, H су кофактори елемената a, b, c, f, g, h матрице

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}.$$

Прим. 6. Ако је

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix},$$

онда је

$$\frac{d\Delta}{dx} = \begin{vmatrix} f_{11}'(x) & f_{12}'(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}'(x) & f_{22}'(x) \end{vmatrix}.$$

Прим. 7. Нека је

$$f(x) \equiv (x_1 - a_1)(x_2 - a_2) \cdots (x_n - a_n),$$

а

$$f'(x_i) = \frac{df(x)}{dx_i} = (x_1 - a_1) \cdots (x_{i-1} - a_{i-1})(x_{i+1} - a_{i+1}) \cdots (x_n - a_n).$$

Доказати да је

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x_n \end{vmatrix} = f(x) + \sum a_i f'(x_i).$$

Напом. Треба написати детерминанту Δ у овом облику:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & x_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 & x_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \\ 1 & x_1 - a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & x_2 - a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x_3 - a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & x_n - a_n \end{vmatrix},$$

па развити последњу детерминанту по Кошијеву обрасцу.

Прим. 8. Доказати да је

$$\begin{vmatrix} a & f & g & h \\ f_1 & b & 0 & 0 \\ g_1 & 0 & c & 0 \\ h_1 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = abcd - ff_1cd - gg_1bd - hh_1bc.$$

Напом. Треба детерминанту развити по Кошијеву обрасцу.

Прим. 9.
$$\begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3 & x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & x_3 & 0 \\ -x_1 & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix}$$

$$= x_1x_2x_3x_4 \left\{ 1 + \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \frac{a_3}{x_3} + \frac{a_4}{x_4} \right\}.$$

Прим. 10. Са $(ik)^2$ је означен израз

$$(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2,$$

па нека је

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & (12)^2 & (13)^2 & (14)^2 \\ (12)^2 & 0 & (23)^2 & (24)^2 \\ (13)^2 & (23)^2 & 0 & (34)^2 \\ (14)^2 & (24)^2 & (34)^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказати да је

$$(12)(34) \pm (13)(24) \pm (14)(23) = 0. —$$

Детерминанту Δ треба развити по Кошијеву обрасцу. Ако затим додамо и одузмемо $4(12)^2\,(13)^2\,(24)^2\,(34)^2$, добићемо ово:

$$[(12)^2\,(34)^2 + (13)^2\,(24)^2 - (14)^2\,(23)^2]^2$$
$$- 4(12)^2\,(13)^2\,(24)^2\,(34)^2 = 0.$$

По томе се види да је

$$
\begin{aligned}
&\{[(12)(34)-(13)(24)-(14)(23)]\\
&\quad[(12)(34)-(13)(24)+(14)(23)]\}\\
\times&\{[(12)(34)+(13)(24)-(14)(23)]\\
&\quad[(12)(34)+(13)(24)+(14)(23)]\}=0,
\end{aligned}
$$

т. ј. и т. д.

ОДЕЉАК ЧЕТВРТИ.

МНОЖЕЊЕ ДЕТЕРМИНАНАТА.

35. Узмимо ове две детерминанте трећега реда:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ и } B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix},$$

па означимо њихов производ са P. Према Лапласовој теореми (чл. 30.) биће

$$P = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ 0 & -1 & 0 & b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ 0 & 0 & -1 & b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Та детерминанта је шестога реда, а ред њезин може се редуковати на овај начин. Помножићемо четврту врсту са a_{11}, пету са a_{12}, шесту са a_{13}; сабраћемо затим наспрамне елементе четврте, пете и шесте врсте и додаћемо збирове њихове наспрамним елементима прве врсте. Даље, помножићемо четврту врсту са a_{21}, пету са a_{22}, шесту са a_{23}; сабраћемо затим наспрамне елементе четврте, пете и шесте врсте и додаћемо збирове њихове наспрамним елементима друге врсте. Најзад ћемо помножити четврту врсту првобитне детерминанте P са a_{31}, пету са a_{32}, шесту са a_{33}; сабраћемо затим наспрамне елементе четврте, пете и шесте врсте и додаћемо збирове њихове наспрамним елементима треће врсте. Вредност детерминанте (1) не ће се тада изменити. Биће дакле

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{13}b_{13} & a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{23} & a_{11}b_{31}+a_{12}b_{32}+a_{13}b_{33} \\ 0 & 0 & 0 & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+a_{23}b_{13} & a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{23} & a_{21}b_{31}+a_{22}b_{32}+a_{23}b_{33} \\ 0 & 0 & 0 & a_{31}b_{11}+a_{32}b_{12}+a_{33}b_{13} & a_{31}b_{21}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{23} & a_{31}b_{31}+a_{32}b_{32}+a_{33}b_{33} \\ -1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ 0 & -1 & 0 & b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ 0 & 0 & -1 & b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{vmatrix}.$$

Ослањајући се сад на Лапласову теорему, развићемо ту детерминанту по минорима трећега степена, састављеним из елемената прве три врсте. У том случају моћи ћемо P овако изразити:

$$P = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}b_{13} & a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{23} & a_{11}b_{31} + a_{12}b_{32} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12} + a_{23}b_{13} & a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{23} & a_{21}b_{31} + a_{22}b_{32} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{12} + a_{33}b_{13} & a_{31}b_{21} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{23} & a_{31}b_{31} + a_{32}b_{32} + a_{33}b_{33} \end{vmatrix} \cdot A^{123}_{456},$$

па како је

$$A^{123}_{456} = (-1)^{1+2+3+4+5+6} \Delta^{123}_{456} = - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = +1,$$

то је уједно и

$$P = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}b_{13} & a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{23} & a_{11}b_{31} + a_{12}b_{32} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12} + a_{23}b_{13} & a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{23} & a_{21}b_{31} + a_{22}b_{32} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{12} + a_{33}b_{13} & a_{31}b_{21} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{23} & a_{31}b_{31} + a_{32}b_{32} + a_{33}b_{33} \end{vmatrix}, \qquad (2)$$

а по томе се види *да је производ двеју детерминаната трећега реда детерминанта трећега реда.*

Ако добро загледамо у последњу детерминанту (2), видећемо ово: ако смо ради да добијемо неки члан (ik) детерминанте P, а ми ћемо просто помножити сваки елеменат i-те врсте детерминанте A наспрамним елементом k-те врсте детерминанте B, па те производе сабрати. Стога се каже да је детерминанта (2) постала *композицијом врста* детерминаната A и B.

Но производ детерминаната A и B може се и овако написати:

$$P = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & -1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & -1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Ту детерминанту (3) трансформоваћемо сад исто онако, као што смо мало час трансформовали детерминанту (1), и развићемо је затим по Лапласовој теореми, а по минорима трећега степена, састављеним из елемената прве три врсте. Резултат ће бити ово:

$$P = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{vmatrix}.$$

По томе се види да је поново производ детерминаната A и B детерминанта трећега степена. Та детерминанта трећега степена разликује се међу тим по облику своме од детерминанте (2): и у ове детерминанте је до душе елеменат (ik) збир производа елемената детерминаната A и B, али се ти производи добивају кад се сваки елеменат i-те врсте детерминанте A помножи наспрамним елементом k-те колоне детерминанте B; та детерминанта постаје дакле из детерминаната A и B, кад се врсте детерминанте A „компонују" са колонама детерминанте B.

Најзад, ако транспонирамо матрицу детерминанте A, онда ћемо сличним путем добити још две друге детерминанте трећега степена, које би биле $= AB = P$. И у тим двема детерминантама биће сваки елеменат (ik) збир производа елемената детерминаната A и B, али ће се у једне детерминанте ти производи добивати, кад се сваки елеменат i-те колоне детерминанте A помножи наспрамним елементом k-те врсте детерминанте B, а у друге, кад се сваки елеменат i-те колоне детерминанте A помножи наспрамним елементом k-те колоне детерминанте B. У првом случају компоноване су дакле колоне детерминанте A с врстама детерминанте B, а у другом случају су компоноване колоне детерминанте A с колонама детерминанте B. *Свега се дакле на четири различита начина могу написати елементи неке детерминанте трећега степена што представља производ двеју детерминаната трећега степена.* —

Поменута правила могу се и проширити и у том случају била би овако формулисана:

Теорема. *Производ двеју детерминаната n-тога степена јесте детерминанта n-тога степена. Та детерминанта може се написати у опште на четири различита начина, а елементи њезини постају композицијом редова двеју детерминаната.*

Дакле, ако је

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \text{a } B = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

онда је

$$P = AB = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

У тој последњој матрици је са c_{ik} означен један од ових збирова:

$$a_{i1}b_{k1} + \cdots + a_{in}b_{kn},$$

$$a_{i1}b_{1k} + \cdots + a_{in}b_{nk},$$

$$a_{1i}b_{k1} + \cdots + a_{ni}b_{kn},$$

$$a_{1i}b_{1k} + \cdots + a_{ni}b_{nk}.$$

Напомена. Кад се множе детерминанте различитих редова, онда треба по познатим правилима изједначити редове детерминаната, пре него што се детерминанте почну множити. На пример:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 & c_1 & d_1 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 & c_2 & d_2 \\ a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 & a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 & c_3 & d_3 \\ a_4\alpha_1 + b_4\beta_1 & a_4\alpha_2 + b_4\beta_2 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

ПРИМЕРИ.

1. Помножити $\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$ са $\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}$.

Производ је $\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ Z & X & Y \\ Y & Z & X \end{vmatrix}$; $X = ax + by + cz$, $Y = ay + bz + cx$, $Z = az + bx + cy$.

Како је $\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, и како су и обе друге две детерминанте истог облика, то се види да се производ два израза облика $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ може изразити једним изразом истога облика.

2. Један облик производа

$$\begin{vmatrix} a+b & c & c \\ a & b+c & a \\ b & b & c+a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a+b+\frac{1}{2}c & -\frac{1}{2}a & -\frac{1}{2}b \\ -\frac{1}{2}c & b+c+\frac{1}{2}a & -\frac{1}{2}b \\ -\frac{1}{2}c & -\frac{1}{2}a & c+a+\frac{1}{2}b \end{vmatrix}$$

је

$$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & a^2 & b^2 \\ c^2 & (b+c)^2 & b^2 \\ c^2 & a^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}.$$

3. Наћи производ

$$\begin{vmatrix} b & f \\ f & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & g \\ g & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}.$$

4. Са i је означена имагинарна јединица. Доказати да се производ

$$\begin{vmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 - ib_1 & c_1 - id_1 \\ -c_1 - id_1 & a_1 + ib_1 \end{vmatrix}$$

може изразити детерминантом

$$\begin{vmatrix} D - iC & B - iA \\ -B - iA & D + iC \end{vmatrix},$$

у којој је

$$A = bc_1 - b_1c + ad_1 - a_1d, \quad B = ca_1 - c_1a + bd_1 - b_1d,$$

$$C = ab_1 - a_1b + cd_1 - c_1d, \quad D = aa_1 + bb_1 + cc_1 + dd_1.$$

Даље, треба доказати *да се производ двају збирова четирију квадрата може на четири различита начина изразити збиром четирију квадрата.* (Ајлерова теорема.)

5. Наћи две детерминанте чији је производ детерминанта

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1x_1 + c_1y_1 & b_1x_2 + c_1y_2 \\ a_2 & b_2x_1 + c_2y_1 & b_2x_2 + c_2y_2 \\ a_3 & b_3x_1 + c_3y_1 & b_3x_2 + c_3y_2 \end{vmatrix}.$$

6. Доказати да је

$$\begin{vmatrix} a_1^2 + b_1 + c_1 & a_1a_2 + b_2 + c_2 & a_1a_3 + b_3 + c_3 \\ b_2b_1 + c_1 & b_2^2 + c_2 & b_2b_3 + c_3 \\ c_3c_1 & c_3c_2 & c_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 b_2 c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

7. Доказати да је

$$\begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b+c+d-a & a-b+c+d & a+b-c+d & a+b+c-d \\ b-a+d+c & -b+a+d+c & -b-a-d+c & -b-a+d-c \\ c+d-a+b & -c-d-a+b & -c+d+a+b & -c+d-a-b \\ d+c+b-a & -d-c+b-a & -d+c-b-a & -d+c+b+a \end{vmatrix}$$

$$= (b+c+d-a)\,(c+d+a-b)\,(d+a+b-c)\,(a+b+c-d) \times$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Даље, на основу тога доказати да је прва детерминанта датог производа

$$= -\,(b+c+d-a)\,(c+d+a-b)\,(d+a+b-c)\,(a+b+c-d).$$

36. Проширене и сужене детерминанте. У матрицама досад проматраних детерминаната било је тачно n^2 елемената. Стога су матрице тих детерминаната могле имати облик једнога квадрата: у њих је било исто онолико врста колико и колона. Но често се траже производи матрица̂ *у којима нема исто онолико врста колико и колона.* Такве матрице не представљају символички никакву бројну вредност, а зову се често и *непотпуне детерминанте.* Те детерминанте су двојаке: у једних има више колона него врста, а у других, више врста него колона. Прве детерминанте зову се *проширене* или *дефективне* детерминанте, а друге се зову *сужене* или *ексцесивне* детерминанте. Матрица

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

представља, на прилику, једну проширену, а матрица

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

једну сужену детерминанту.

37. Производи проширених детерминаната. — Најпре ћемо узети две проширене детерминанте овог облика:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \cdots b_{2n} \end{vmatrix}.$$

Ако компонујемо врсте ових двеју детерминаната, добићемо ову детерминанту другога степена:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{13}b_{13}+\cdots+a_{1n}b_{1n} & a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{23}+\cdots+a_{1n}b_{2n} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+a_{23}b_{13}+\cdots+a_{2n}b_{1n} & a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{23}+\cdots+a_{2n}b_{2n} \end{vmatrix}.$$

Елементи те детерминанте су полиноми. У сваком том полиному има n чланова. Стога ће се та детерминанта моћи растворити у збир од n^2 детерминаната другога реда, у којима ће елементи бити све сами мономи. Између тих детерминаната биће неке $= 0$; такве би н. пр. биле детерминанте

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{21} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{21} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12}b_{12} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{12} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}, \cdots$$

У тим свима детерминантама су друге казаљке у елемената прве колоне једнаке с другим казаљкама у елемената друге колоне, а свега тих детерминаната има n. Остале детерминанте не ће бити $= 0$. Такве би н. пр. биле ове детерминанте:

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{13}b_{23} \\ a_{21}b_{11} & a_{23}b_{23} \end{vmatrix}, \cdots \begin{vmatrix} a_{12}b_{12} & a_{11}b_{21} \\ a_{22}b_{12} & a_{21}b_{21} \end{vmatrix}, \cdots,$$

а те детерминанте се могу и овако написати:

$$b_{11}b_{22}\,(a_{11}a_{22}), \quad b_{11}b_{23}\,(a_{11}a_{23}), \cdots - b_{12}b_{21}\,(a_{11}a_{22}), \cdots$$

Тих детерминаната има свега $n^2 - n = n\,(n-1)$, а збир њихов представљаће детерминанту $\varDelta$. Биће дакле

$$\varDelta = b_{11}b_{22}\,(a_{11}a_{22}) + b_{11}b_{23}\,(a_{11}a_{23}) + \cdots - b_{12}b_{21}\,(a_{11}a_{22}) + \cdots,$$

т. ј. биће

$$\varDelta = (a_{11}a_{22})\,(b_{11}b_{22}) + (a_{11}a_{23})\,(b_{11}b_{23}) + \cdots + (a_{11}a_{2n})\,(b_{11}b_{2n})$$
$$+ (a_{12}a_{23})\,(b_{12}b_{23}) + \cdots + (a_{1,n-1}a_{2n})\,(b_{1,n-1}b_{2n})$$

или

$$\varDelta = \Sigma\,(a_{1i}a_{2j})\,(b_{1i}b_{2j})\,. \tag{4}$$

У збиру Σ су са ik означене све комбинације друге класе без понављања елемената $1, 2, 3, \cdots n$; у томе збиру има дакле $\binom{n}{2}$ чланова.

Узмимо сад две проширене детерминанте овог облика:

$$A' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots a_{3n} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad B' = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \cdots b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \cdots b_{3n} \end{vmatrix}.$$

Ако компонујемо врсте тих двеју детерминаната, добићемо ову детерминанту трећега реда:

$$\varDelta' = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+\cdots+a_{1n}b_{1n} & a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+\cdots+a_{1n}b_{2n} & a_{11}b_{31}+a_{12}b_{32}+\cdots+a_{1n}b_{3n} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+\cdots+a_{2n}b_{1n} & a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}+\cdots+a_{2n}b_{2n} & a_{21}b_{31}+a_{22}b_{32}+\cdots+a_{2n}b_{3n} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{12}+\cdots+a_{3n}b_{1n} & a_{31}b_{21}+a_{32}b_{22}+\cdots+a_{3n}b_{2n} & a_{31}b_{31}+a_{32}b_{32}+\cdots+a_{3n}b_{3n} \end{vmatrix}, \tag{5}$$

а та се дтерминанта може растворити у збир од n^3 детерминаната трећега степена, у којима ће елементи бити све сами мономи. Између тих детерминаната биће $= 0$ оне детерминанте, у којима су друге казаљке елемената једне колоне једнаке с другим казаљкама елемената неке друге колоне. Остале детерминанте не ће бити $= 0$, а друге казаљке елемената ма које колоне неке такве детерминанте не ће бити једнаке с другим казаљкама елемената ма које друге колоне те детерминанте. У свакој колони тих детерминаната имаће сва три елемента један заједнички чинитељ; тај чинитељ биће један елеменат детерминанте B'. Саберимо сад све те детерминанте и напишимо у томе збиру поменуте чинитеље испред сваке детерминанте посебице. Збир тај представљаће детерминанту Δ', а облик тога збира биће ово:

$$\Delta' = k\,(a_{11}a_{22}a_{33}) + l\,(a_{11}a_{22}a_{34}) + \cdots + m\,(a_{12}a_{23}a_{34})$$
$$+ \cdots + s\,(a_{1,n-2}a_{2,n-1}a_{3n}). \qquad (6)$$

За непознате чинитеље $k, l, \cdots m, \cdots s$ знамо досад само толико, да су то неке функције елемената детерминанте B'. Те функције наћи ћемо овако. Узећемо да је

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1,$$

и претпоставићемо да су сви остали елементи детерминанте A' нуле. У том случају је $(a_{11}a_{22}a_{33}) = 1$, а све остале детерминанте у збиру (6) су $= 0$; па како је према обрасцу (5) тада

$$\Delta' = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{vmatrix},$$

то се према обрасцу (6) види да је

$$k = (b_{11}b_{22}b_{33}).$$

Даље, узећемо да је $a_{11} = a_{22} = a_{34} = 1$ и претпоставићемо да су сви остали елементи детерминанте A' нуле. У том случају је $(a_{11}a_{22}a_{34}) = 1$, а све остале детерминанте збира (6) су $= 0$. Упоредивши сад обрасце (5) и (6), добићемо да је

$$l = (b_{11}b_{22}b_{34})$$

и т. д. Према томе ћемо детерминанту Δ' моћи овако изразити:

$$\Delta' = (a_{11}a_{22}a_{33})(b_{11}b_{22}b_{33}) + (a_{11}a_{22}a_{34})(b_{11}b_{22}b_{34}) + \cdots$$

$$+ (a_{12}a_{23}a_{34})(b_{12}b_{23}b_{34}) + \cdots + (a_{1,n-2}a_{2,n-1}a_{3n})(b_{1,n-2}b_{2,n-1}b_{3n}),$$

т. ј. биће

$$\Delta' = \Sigma\, (a_{1i}a_{2j}a_{3k})(b_{1i}b_{2j}b_{3k}). \tag{7}$$

У томе збиру Σ означене су са ijk све комбинације треће класе без понављања елемената $1, 2, 3, \cdots n$; у у томе збиру има дакле $\binom{n}{3}$ чланова.

Правила формулисана обрасцем (4) и обрасцем (7) могла би се и проширити, и у том случају бисмо добили овакy теорему:

Теорема. *Кад се у двема проширеним детерминантама, у којима има m врста, а n колона, компонују врсте, онда се добива једна детерминанта m-тога степена. Та детерминанта може се изразити збиром*

$$\Sigma\, (a_{1i}a_{2j} \cdots a_{mk})\, (b_{1i}b_{2j} \cdots b_{mk})$$

производа́ детерминаната m-тога реда. У том збиру има свега $\binom{n}{m}$ чланова, а са $ij\cdots k$ су означене све различите комбинације m-те класе без понављања елемената $1, 2, 3, \cdots n$.

Прим. 1. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 + d_1\delta_1 & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2 + d_1\delta_2 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1 + d_2\delta_1 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 + d_2\delta_2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1b_2)(\alpha_1\beta_2) + (a_1c_2)(\alpha_1\gamma_2) + (a_1d_2)(\alpha_1\delta_2)$$

$$+ (b_1c_2)(\beta_1\gamma_2) + (b_1d_2)(\beta_1\delta_2) + (c_1d_2)(\gamma_1\delta_2).$$

Прим. 2. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & xx'+yy'+zz' \\ xx'+yy'+zz' & x'^2+y'^2+z'^2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}^2.$$

Добили смо дакле овај важан *Лагранжев образац*:

$$(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2) - (xx'+yy'+zz')^2$$

$$= (xy' - x'y)^2 + (yz' - y'z)^2 + (zx' - x'z)^2.$$

38. Производи сужених детерминаната. — Узмимо ове две сужене детерминанте:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

Ако компонујемо врсте тих двеју детерминаната, добићемо ову детерминанту трећега степена:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 & a_1\alpha_3 + b_1\beta_3 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 & a_2\alpha_3 + b_2\beta_3 \\ a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 & a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 & a_3\alpha_3 + b_3\beta_3 \end{vmatrix},$$

а та је детерминанта $= 0$, јер она представља производ ових двеју детерминаната:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Производ датих сужених детерминаната је дакле $= 0$. То би се правило могло и проширити и у том случају било би формулисано овако:

Теорема. *Кад се у двема суженим детерминантама, у којима има m врста, а n колона, композују врсте, онда се добива једна детерминанта m-тога степена чија је вредност нула.*

Адјунговане детерминанте.

39. Дефиниција. Нека нам је дата детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

па сменимо у матрици те детерминанте сваки елеменат кофактором који му одговара. У том случају добићемо детерминанту

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Та детерминанта зове се *адјунгована детерминанта* (*determinant adjugate*, *déterminant adjoint* или *réciproque*. *adjungirte Determinante*) дате детерминанте.

40. Теорема. *Адјунгована детерминанта неке детерминанте n-тог степена је равна (n — 1)-вом степену те детерминанте.*

Помножимо на име Δ са Δ'. Производ ће бити

$$\Delta\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11}A_{11} + \cdots + a_{1n}A_{1n} & a_{11}A_{21} + \cdots + a_{1n}A_{2n} & \cdots & a_{11}A_{n1} + \cdots + a_{1n}A_{nn} \\ a_{21}A_{11} + \cdots + a_{2n}A_{1n} & a_{21}A_{21} + \cdots + a_{2n}A_{2n} & \cdots & a_{21}A_{n1} + \cdots + a_{2n}A_{nn} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \cdots & \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}A_{11} + \cdots + a_{nn}A_{1n} & a_{n1}A_{21} + \cdots + a_{nn}A_{2n} & \cdots & a_{n1}A_{n1} + \cdots + a_{nn}A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Сви елементи главне дијагонале (чл. 26.) ове детерминанте су $= \Delta$, а сви остали елементи њезини су $= 0$. Према томе је

$$\Delta\Delta' = \Delta^n,$$

т. ј.

$$\Delta' = \Delta^{n-1}.$$

41. Теорема. *Ма који минор m-тог степена адјунговане детерминанте Δ' може се изразити производом двеју детерминаната; један чинитељ тог производа је кофактор минора што поменутом минору m-тог степена одговара у првобитној детерминанти Δ, а други чинитељ је (m — 1)-ви степен детерминанте Δ.*

Нека је $\Delta = |\, a_{1n} \,|$, а $\Delta' = |\, A_{1n} \,|$, па означимо са Δ_m некакав минор m-тог степена адјунговане детерминанте и узмимо да се елементи његови налазе у i-тој, j-тој, k-тој, $\cdots$ врсти, а r-тој, s-тој, t-тој, $\cdots$ колони те детерминанте ($i < j < k < \cdots$, а $r < s < t < \cdots$). Тај минор моћи ћемо овако написати:

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} A_{ir} & A_{is} & A_{it} & \cdots & A_{i,m+1} & \cdots & A_{in} \\ A_{jr} & A_{js} & A_{jt} & \cdots & A_{j,m+1} & \cdots & A_{jn} \\ A_{kr} & A_{ks} & A_{kt} & \cdots & A_{k,m+1} & \cdots & A_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Даље, узмимо да је

$$i + j + k + \cdots + r + s + t + \cdots = \mu.$$

Ако у првобитној детерминанти преместимо редове тако, да елементи i-те, j-те, k-те, $\cdots$ врсте буду елементи прве, друге, треће, $\cdots$ врсте, а елементи r-те, s-те, t-те, $\cdots$ колоне да буду елементи прве, друге, треће, $\cdots$ колоне, онда ће према једном познатом правилу бити

$$\Delta = (-1)^{\mu} \begin{vmatrix} a_{ir} & a_{is} & a_{it} & \cdots & a_{i,m+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{jr} & a_{js} & a_{jt} & \cdots & a_{j,m+1} & \cdots & a_{jn} \\ a_{kr} & a_{ks} & a_{kt} & \cdots & a_{k,m+1} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m+1,r} & a_{m+1,s} & a_{m+1,t} & \cdots & a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nr} & a_{ns} & a_{nt} & \cdots & a_{n,m+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Помножимо сад детерминанте (1) и (2). Производ њихов биће

$$\Delta_m \Delta = (-1)^\mu \begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 & \cdots 0 & \cdots 0 \\ 0 & \Delta & 0 & \cdots 0 & \cdots 0 \\ 0 & 0 & \Delta & \cdots 0 & \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{i,m+1} & a_{j,m+1} & a_{k,m+1} & \cdots a_{m+1,m+1} & \cdots a_{n,m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{in} & a_{jn} & a_{kn} & \cdots a_{m+1,n} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix},$$

т. ј. биће

$$\Delta_m \Delta = (-1)^\mu \Delta^m \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{n,m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m+1,n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

По томе се види да је

$$\Delta_m = (-1)^\mu \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,m+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \Delta^{m-1},$$

а то смо и тврдили, јер је

$$(-1)^\mu \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,m+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

управо кофактор минора што минору Δ_m одговара у детерминанти Δ.

42. Кад је $\Delta = 0$, а $m > 1$, онда ће према пређашњем правилу бити и $\Delta_m = 0$, т. ј. *кад је нека детерминанта* $= 0$, *онда су и у адјунгованој детерминанти сви минори другога или вишега степена* $= 0$.

Узмимо да је $\Delta = 0$, а $m = 2$. У том случају биће

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{n1} & A_{n2} \end{vmatrix} = \cdots = 0;$$

у опште је дакле

$$\begin{vmatrix} A_{ir} & A_{is} \\ A_{jr} & A_{js} \end{vmatrix} = 0,$$

а то значи да је

$$A_{ir} : A_{is} = A_{jr} : A_{js},$$

т. ј. *кад је $\Delta = 0$, онда су кофактори елемената ма ког реда сразмерни с кофакторима наспрамних елемената неког другог реда.*

Даље, по тој истој теореми (чл. 41.) је и

$$\begin{vmatrix} A_{ir} & A_{is} \\ A_{jr} & A_{js} \end{vmatrix} = \Delta \times \textit{кофактор минора} \begin{vmatrix} a_{ir} & a_{is} \\ a_{jr} & a_{js} \end{vmatrix};$$

по томе се види да је

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ir}} & \frac{\partial \Delta}{\partial a_{is}} \\ \frac{\partial \Delta}{\partial a_{jr}} & \frac{\partial \Delta}{\partial a_{js}} \end{vmatrix} = \Delta \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{ir} \partial a_{js}},$$

а тај се образац може и овако написати:

$$\Delta \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{ir} \partial a_{js}} = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ir}} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{js}} - \frac{\partial \Delta}{\partial a_{jr}} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{is}}.$$

ПРИМЕРИ.

1. Ако је нека детерминанта $|a_{1n}| = 1$, онда је и адјунгована детерминанта $|A_{1n}| = 1$.

2. Дата је детерминанта $\varDelta = |a_{13}|$ и адјунгована детерминанта $\varDelta' = |A_{13}|$, па нека је $|B_{13}|$ адјунгована детерминанта детерминанте $\varDelta'$. Доказати да је

$$B_{ik} = a_{ik}\,\varDelta.$$

3. Дата је детерминанта $|a_{15}|$ и адјунгована детерминанта $|A_{15}|$. Доказати да је

$$\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{41} & A_{42} \end{vmatrix} = -\varDelta \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

4. Ако су $|a_{1n}|$, $|b_{1n}|, \cdots$ дате детерминанте, а $|A_{1n}|$, $|B_{1n}|, \cdots$ адјунговане детерминанте, онда је производ $|A_{1n}| \cdot |B_{1n}| \cdots$ адјунгованих детерминаната адјунгована детерминанта производа датих детерминаната.

ОДЕЉАК ПЕТИ.

ПРИМЕНА НА АЛГЕБРУ.

43. Досад смо тражили главније особине детерминаната, а сада ћемо покушати да на основу познатих особина решимо једну основну проблему Елементарне Алгебре. *Узећемо на име једну систему линеарних еквација са више непознатих и потражићемо заједничке корене тих еквација.*

Најпре ћемо претпоставити да *у датој системи линеарних еквација има исто онолико еквација, колико и непознатих.* Таква система биће овог облика:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n = m_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2n}x_n = m_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kk}x_k + \cdots + a_{kn}x_n = m_k, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nk}x_k + \cdots + a_{nn}x_n = m_n. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Детерминанта $\Delta = | a_{1n} |$ зове се *детерминанта системе* (1) (в. чл. 2. напом. 1.). — Помножимо сад прву еквацију са A_{1k}, другу са $A_{2k}, \cdots$, k-ту са $A_{kk}, \cdots$, n-ту са A_{nk}, т. ј. помножимо прву еквацију кофактором елемента a_{1k} у детерминанти Δ, другу кофактором елемента a_{2k} и т. д. и саберимо после тога поменуте еквације. Тада ћемо добити овај збир:

$$\begin{aligned}
&(a_{11}A_{1k} + a_{21}A_{2k} + \cdots + a_{k1}A_{kk} + \cdots + a_{n1}A_{nk})\, x_1 \\
&+ (a_{12}A_{1k} + a_{22}A_{2k} + \cdots + a_{k2}A_{kk} + \cdots + a_{n2}A_{nk})\, x_2 \\
&+ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
&+ (a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{kk}A_{kk} + \cdots + a_{nk}A_{nk})\, x_k \\
&+ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
&+ (a_{1n}A_{1k} + a_{2n}A_{2k} + \cdots + a_{kn}A_{kk} + \cdots + a_{nn}A_{nk})\, x_n \\
&= m_1A_{1k} + m_2A_{2k} + \cdots + m_kA_{kk} + \cdots + m_nA_{nk}. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Сви коефицијенти што се у овој еквацији јављају уз непознате $x_1, x_2, \cdots$ су $= 0$ сем коефицијента, што се јавља уз непознату x_k, а тај је коефицијенат управо $= | a_{1n} | = \Delta$. Даље, ако се са тим коефицијентом упореди други члан еквације (2), видеће се одмах, да се тај члан добива из детерминанте Δ, кад се у тој детерминанти коефицијенти $a_{1k}, a_{2k}, \cdots a_{kk}, \cdots a_{nk}$, што се у датим еквацијама јављају уз непознату x_k, замене апсолутним члановима $m_1, m_2, \cdots m_k, \cdots m_n$ тих еквација. Према томе је

$$\begin{aligned}
&(a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{kk}A_{kk} + \cdots + a_{nk}A_{nk})\, x_k \\
&= m_1A_{1k} + m_2A_{2k} + \cdots + m_kA_{kk} + \cdots + m_nA_{nk}
\end{aligned}$$

или

$$x_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & m_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & m_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & m_k & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & m_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

а тим обрасцем је формулисана ова теорема:

Теорема. *Кад је дата система од n линеарних еквација са n непознатих, онда је вредност сваке непознате одређена једним разломком; именитељ тога разломка је детерминанта системе, а детерминанта у бројитељу добива се из детерминанте системе, кад се у овој коефицијенти a_{1k}, a_{2k}, $\cdots a_{kk}$, $\cdots a_{nk}$, што се јављају у системи уз непознату x_k која се тражи, замене апсолутним члановима m_1, m_2, $\cdots m_k$, $\cdots m_n$ тих еквација.*

44. Има још један леп метод по коме се мало час поменута теорема доказује. Да не бисмо писали велике изразе, узећемо три линеарне еквације са три непознате

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = m_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = m_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = m_3, \end{array}\right\}; \text{ у тој системи је } \Delta = (a_1b_2c_3).$$

Кадгод су дате такве три еквације, биће свакад

$$\begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_1 & b_1 & c_1 \\ m_2 & b_2 & c_2 \\ m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

т. ј. биће свакад

$$x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (m_1b_2c_3),$$

а по томе се види да је

$$x = \frac{(m_1b_2c_3)}{(a_1b_2c_3)}.$$

По истом методу могли бисмо наћи и y и z.

45. Узмимо даље да *у датој системи има више непознатих него еквација*. Таква система биће овог облика:

$$
\left.\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + a_{1,n+1}x_{n+1}& \\
+ \cdots + a_{1,n+i}x_{n+i} &= m_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + a_{2,n+1}x_{n+1}& \\
+ \cdots + a_{2,n+i}x_{n+i} &= m_2, \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \quad \cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + a_{n,n+1}x_{n+1}& \\
+ \cdots + a_{n,n+i}x_{n+i} &= m_n.
\end{aligned}\right\} \tag{3}
$$

У тој системи има $(n + i)$ непознатих, а n еквација. — Ту систему написаћемо овако:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= m_1 - a_{1,n+1}x_{n+1} \\
&\quad - \cdots - a_{1,n+i}x_{n+i} = \mu_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= m_2 - a_{2,n+1}x_{n+1} \\
&\quad - \cdots - a_{2,n+i}x_{n+i} = \mu_2, \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= m_n - a_{n,n+1}x_{n+1} \\
&\quad - \cdots - a_{n,n+i}x_{n+i} = \mu_n.
\end{aligned}
$$

Означимо сад детерминанту $| a_{1n} |$ са $\varDelta$, па помножимо, као и мало час, прву еквацију са A_{1k}, другу са $A_{2k}, \cdots$ n-ту са A_{nk} $(k \leqq n)$ и саберимо после тога те еквације. У резултату добићемо ово:

$$\varDelta\, x_k = \mu_1 A_{1k} + \mu_2 A_{2k} + \cdots + \mu_n A_{nk},$$

а то значи да је

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x_1 = \mu_1 A_{11} + \mu_2 A_{21} + \cdots + \mu_n A_{n1}, \\ \Delta x_2 = \mu_1 A_{12} + \mu_2 A_{22} + \cdots + \mu_n A_{n2}, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \Delta x_n = \mu_1 A_{1n} + \mu_2 A_{2n} + \cdots + \mu_n A_{nn}. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Количине $x_1, x_2, \cdots x_n$ зависе у овај мах као што видимо, од непознатих $x_{n+1}, \cdots x_{n+i}$.

На пример, нека је

$$a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 = m_1,$$

$$a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = m_2.$$

У овај мах је

$$a_1 x_1 + b_1 x_2 = m_1 - c_1 x_3,$$

$$a_2 x_1 + b_2 x_2 = m_2 - c_2 x_3.$$

Стога је

$$(a_1 b_2)\, x_1 = (m_1 - c_1 x_3)\, b_2 - (m_2 - c_2 x_3)\, b_1 = (m_1 b_2) - (c_1 b_2)\, x_3,$$

$$(a_1 b_2) x_2 = -(m_1 - c_1 x_3) a_2 + (m_2 - c_2 x_3) a_1 = (a_1 m_2) - (a_1 c_2) x_3.$$

Према томе је

$$x_1 = \frac{(m_1 b_2)}{(a_1 b_2)} - \frac{(c_1 b_2)}{(a_1 b_2)}\, x_3, \quad x_2 = \frac{(a_1 m_2)}{(a_1 b_2)} - \frac{(a_1 c_2)}{(a_1 b_2)}\, x_3.$$

Напомињемо да смо и сад као и пређе (чл. 43.) ћутке претпостављали да је $\Delta \neq 0$.

46. Уочимо сад поново систему (1):

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n - m_1 = 0, \\ X_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2n}x_n - m_2 = 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ X_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nk}x_k + \cdots + a_{nn}x_n - m_n = 0, \end{array}\right\} \quad (5)$$

па претпоставимо да је детерминанта те системе $= 0$, т. ј. узмимо да је $\varDelta = | \, a_{1n} \, | = 0$. Прву између тих еквација помножићемо опет са A_{1k}, другу са $A_{2k}, \cdots$ n-ту са A_{nk} и сабраћемо после тога све еквације те системе; па како смо претпостављали да је $\varDelta = 0$, то ћемо добити овакав резултат:

$$m_1 A_{1k} + m_2 A_{2k} + \cdots + m_n A_{nk} = 0.$$

Међу тим је (чл. 43.)

$$x_k = \frac{m_1 A_{1k} + m_2 A_{2k} + \cdots + m_n A_{nk}}{a_{1k} A_{1k} + a_{2k} A_{2k} + \cdots + a_{nk} A_{nk}},$$

а то значи да је у овај мах $x_k = \frac{0}{0}$, т. ј. *кад је детерминанта системе (5) линеарних нехомогених еквација $= 0$, онда су детерминанте, што се јављају у бројитељима разломака који одређују вредности непознатих такођер $= 0$.*

Но како је

$$X_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - m_i \; (i = 1, \; 2, \cdots n),$$

биће у овај мах и

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ik} X_i = (a_{11}A_{1k} + a_{21}A_{2k} + \cdots + a_{n1}A_{nk}) x_1 + \cdots$$
$$- (m_1 A_{1k} + m_2 A_{2k} + \cdots + m_n A_{nk}) \equiv 0,$$

т. ј. биће

$$A_{1k}X_1 + A_{2k}X_2 + \cdots + A_{nk}X_n \equiv 0,$$

а по томе се види, да је једна међу датим еквацијама постала из оних осталих. *Дате еквације нису дакле независне кад је детерминанта системе* $= 0$. Но кад једна еквација системе (5) зависи од осталих еквација те системе, онда ће се система свести на једну систему, у којој ће бити само $(n - 1)$ еквација. Кад се дакле траже решења системе (5), онда се мора свакад из те системе избацити једна еквација, па како ће у новој системи бити више непознатих него еквација, то ћемо ту систему решавати исто онако, као што смо мало час (чл. 45.) решавали систему (3). Тражећи решења системе (3) претпостављали смо међу тим да детерминанта чији су елементи били коефицијенти непознатих, по којима смо решавали систему (3), није $= 0$. То исто ћемо и у овај мах морати претпоставити. Но како ће у овај мах та детерминанта бити управо један од првих минора детерминанте системе (5), то ћемо морати претпоставити *да бар један први минор детерминанте системе (5) није* $= 0$. На пример, нека је

$$A_{nn} = \mid a_{1,n-1} \mid \neq 0.$$

У том случају избацићемо из системе (5) последњу еквацију, а из осталих еквација одредићемо непознате $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$; те непознате зависиће од непознате x_n, али ће њихове вредности задовољавати дату систему (5), ма непозната x_n имала ма какву вредност.

На пример, нека нам је дата систена

$$a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = m_1,$$

$$a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = m_2,$$

$$a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = m_3,$$

па нека је $\Delta = (a_1 b_2 c_3) = 0$, а $A_3 = (a_1 b_2) \neq 0$. У том случају изоставићемо последњу еквацију, а решићемо систему

$$a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 = m_1,$$

$$a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = m_2$$

по непознатима x_1 и x_2. Решења ће бити ово (чл. 45.):

$$x_1 = \frac{(m_1 b_2)}{(a_1 b_2)} - \frac{(c_1 b_2)}{(a_1 b_2)} x_3, \quad x_2 = \frac{(a_1 m_2)}{(a_1 b_2)} - \frac{(a_1 c_2)}{(a_1 b_2)} x_3,$$

а та решења задовољиће дату систему ма x_3 имало ма какву вредност.

Ако се претпостави да још који први минор детерминанте Δ није $= 0$, онда се може наћи још која система од $(n - 1)$ еквација, из које би се могло одредити $(n - 1)$ непознатих системе (5) тако, да те све непознате зависе само од оне непознате системе (5), која се у групи тих $(n - 1)$ непознатих не налази.

Но може се десити да је не само детерминанта $\Delta = 0$, већ да су и сви њезини први минори $= 0$. *Ако тада међу другим минорима има бар један који није $= 0$, онда ћемо доказати да ће у датој системи бити само $(n - 2)$ независних еквација.*

Узмимо н. пр. да је $| a_{1,n-2} | \neq 0$. У том случају избацићемо из системе (5) најпре само еквацију $X_n = 0$, па онда само еквацију $X_{n-1} = 0$. Тим путем добићемо две групе еквација; у свакој групи биће $(n - 1)$ еквација, а n непознатих $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}, x_n$ првобитне системе (5). Напишимо сад еквације тих група тако, да на левој страни њиховој буде само $(n - 1)$ непознатих, па нека су $x_1, x_2, \cdot \cdot x_{n-1}$ те непознате. Детерминанта коефицијената тих непознатих биће и у једној и у другој групи један од првих минора првобитне детерминанте. Стога ће та детерминанта бити $= 0$, а то значи, да ће и у једној и у другој групи еквацијâ једна еквација зависити од осталих еквација, т. ј. у првобитној системи биће само $(n-2)$ независних еквација, а то смо и тврдили.

Решимо сад поменуте две групе еквација по непознатима $x_1, x_2, \cdots x_{n-2}$. У решењима мораће се, према оном што мало час рекосмо (чл. 45.), јављати непознате x_{n-1} и x_n, *али ће та решења задовољити дату систему (5) ма непознате x_{n-1} и x_n, имале ма какву вредност.*

Могли бисмо и даље ићи; могли бисмо н. пр. претпоставити да је не само детерминанта $\Delta = 0$, већ да су и сви први и други минори њезини $= 0$. *Ако тада бар један од трећих минора не би био $= 0$, онда бисмо могли доказати, да ће у датој системи (5) бити свега $(n-3)$ независних еквација; решења те системе зависила би од три непознате првобитне системе, али ће она задовољити ту систему ма те три непознате имале ма какву вредност*, и т. д.

47. Пођимо сад даље и *узмимо једну линеарну систему у којој има више еквација него непознатих.* Таква система биће н. пр. ова система:

$$X_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} + m_1 = 0,$$

$$X_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}x_{n-1} + m_2 = 0,$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$X_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1} + m_n = 0.$$

У тој системи има n еквација, а $(n-1)$ непознатих. Избацивши еквацију $X_i = 0$ $(i = 1, 2, \cdots n)$, добићемо једну систему од $(n-1)$ еквација, а решења те системе мораће задовољити и еквацију $X_i = 0$, ако дата система има заједничких корена. Но кад се у еквацији $X_i = 0$ смене непознате $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$ решењима поменуте системе од $(n-1)$ еквација, онда ће се добити једна релација, у којој ће се јављати само коефицијенти и апсолутни чланови датих еквација. Ако дакле дата система има заједничких коренâ, онда ће коефицијенти a и апсолутни чланови m морати бити везани једном погодбеном релацијом. Не тражећи поменута решења, добићемо ту погодбену релацију на овај начин.

Нека је са Δ означена ова детерминанта n-тога степена:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & m_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & m_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & m_n \end{vmatrix},$$

и нека су $M_1, M_2, \cdots M_n$ кофактори елемената $m_1, m_2 \cdots m_n$ у тој детерминанти. Помножимо прву еквацију дате системе са M_1, другу са M_2, $\cdots$ n-ту са M_n и саберимо после тога те еквације. Тим путем добићемо ову релацију:

$$m_1 M_1 + m_2 M_2 + \cdots + m_n M_n = 0.$$

Израз на левој страни представља међу тим детерминанту Δ. По томе се види да је у овај мах

$$\Delta = 0.$$

Дакле, ако у системи од n линеарних еквација има $(n-1)$ непознатих, онда ће система имати заједничких корена само ако је детерминанта свих коефицијената дате системе $= 0$ (у те коефицијенте убрајају се и апсолутни чланови датих еквација).

Детерминанта Δ зове се *резултанта* или *елиминанта* датих еквација.

Најзад, могли бисмо узети да у датој системи има $n + i = p$ еквација, а само $(n - 1)$ непознатих. Та система била би овог облика:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} + m_1 = 0,\\
X_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}x_{n-1} + m_2 = 0,\\
&\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\\
X_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1} + m_n = 0,\\
&\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\\
X_p &= a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{p,n-1}x_{n-1} + m_p = 0.
\end{aligned}
$$

Ако смо ради да сазнамо, да ли та система има заједничких корена, онда ћемо из те системе издвојити $(n - 1)$ еквација, н. пр. еквације

$$X_1 = 0,\ X_2 = 0, \cdots X_{n-1} = 0,$$

и решићемо те еквације по непознатима $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$. Ако решења која будемо добили задовољавају и еквацију $X_n = 0$, и еквацију $X_{n+1} = 0, \cdots$ и еквацију $X_p = 0$, онда ће према мало час поменутој теореми резултанте система

$$(X_1\, X_2 \cdots X_n),\ (X_1\, X_2 \cdots X_{n-1}\, X_{n+1}), \cdots (X_1\, X_2 \cdots X_{n-1}\, X_p)$$

посебице морати бити $= 0$. Према тој теореми јасно је у осталом, да ће у опште резултанта ма којих n еквација дате системе морати бити $= 0$, ако та система има заједничких корена. Све те погодбе укупно означићемо овим симболом:

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & m_1\\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & m_2\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & m_n\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{p,n-1} & m_p
\end{vmatrix} = 0, \qquad (D)
$$

а тај симбол треба тумачити овако: свака детерминанта n-тог степена, што се добива из n врста сужене детерминанте (D), јесте $= 0$.

48. Линеарне хомогене еквације. Досад смо проматрали само нехомогене еквације, да видимо сад кад ће система од n хомогених еквација са n непознатих имати заједничких корена и потражимо те корене. Таква система је овог облика:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Јасно је да су вредности

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

корени датих еквација. О том т. зв. „идентичном решењу" не ћемо водити рачуна, већ ћемо тражити остала решења. Пре него што бисмо то учинили, покушаћемо да нађемо погодбу, под којом ће у опште дата система имати заједничких корена. Тога ради поделићемо сваку еквацију дате системе са x_n; ако тада напремице

$$\frac{x_1}{x_n}, \quad \frac{x_2}{x_n}, \quad \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

будемо сматрали као непознате, онда ћемо имати пред собом једну систему од n нехомогених еквација; у свакој еквацији те системе биће само $(n-1)$ непознатих. Стога ће та система нехомогених еквација имати заједничких корена, само ако је детерминанта свих коефицијената те системе $= 0$ (чл. 47.), т. ј. само ако је

$$\varDelta = | a_{1n} | = 0.$$

Но како су система поменутих нехомогених еквација и система датих хомогених еквација идентичне системе, то ћемо моћи формулисати ову теорему:

Теорема. *Система од n хомогених еквација са n непознатих има заједничких корена само ако је детерминанта системе $= 0$.*

Ту детерминанту развићемо сад по елементима прве врсте и добићемо ово:

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = 0. \qquad (7)$$

С друге стране опет (чл. 26.) биће и

$$\left.\begin{array}{l} a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + \cdots + a_{2n}A_{1n} = 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}A_{11} + a_{n2}A_{12} + \cdots + a_{nn}A_{1n} = 0. \end{array}\right\} \qquad (8)$$

Упоредивши сад еквације (7) и (8) са еквацијама дате системе, видећемо да је

$$x_1 : x_2 : \cdots : x_n = A_{11} : A_{12} : \cdots : A_{1n}.$$

То значи да су количине

$$A_{11}, \ A_{12}, \cdots A_{1n}$$

или тачније, количине

$$kA_{11}, \ kA_{12}, \cdots kA_{1n} \qquad (k = const.)$$

заједнички корени датих еквација. Но како је детерминанта системе $= 0$, то ће кофактори елемената ма које врсте бити сразмерни с кофакторима наспрамних елемената неке друге врсте те детерминанте. Кад је дакле дата система од n линеарних хомогених еквација са n непознатих, онда је

$$\left.\begin{aligned} x_1 : x_2 : \cdots : x_i : \cdots : x_n &= A_{11} : A_{12} : \cdots : A_{1i} : \cdots : A_{1n} \\ &= A_{21} : A_{22} : \cdots : A_{2i} : \cdots : A_{2n} \\ &= \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &= A_{n1} : A_{n2} : \cdots : A_{ni} : \cdots : A_{nn}. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Дакле, *корени неке системе од n линеарних хомогених еквација са n непознатих сразмерни су са кофакторима елемената ма које врсте детерминанте* $\varDelta$.

Узмимо, на пример, хомогену линеарну систему

$$a_i x + b_i y + c_i z + d_i t = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4);$$

у том случају је $\varDelta = (a_1 b_2 c_3 d_4) = 0$, а

$$x : y : z : t = A_i : B_i : C_i : D_i.$$

Дакле, ако је н. пр. $i = 4$, онда је

$$x : y : z : t = -(b_1 c_2 d_3) : (a_1 c_2 d_3) : -(a_1 b_2 d_3) : (a_1 b_2 c_3)$$

или

$$\frac{x}{(b_1 c_2 d_3)} = \frac{-y}{(a_1 c_2 d_3)} = \frac{z}{(a_1 b_2 d_3)} = \frac{-t}{(a_1 b_2 c_3)}.$$

49. Избацимо сад из системе (6) једну еквацију, н. пр. избацимо последњу еквацију. Тим путем добићемо ову систему линеарних хомогених еквација:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad &\ldots \\ a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \cdots + a_{n-1,n}x_n &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

У тој системи има $(n-1)$ еквација, а n непознатих, а заједнички корени тих еквација (или управо напремице тих корена) биће поново одређени ма којом групом сразмерâ (9). Између тих сразмера уочићемо у овај мах нарочито ову:

$$x_1 : x_2 : \cdots : x_n = A_{n1} : A_{n2} : \cdot \cdot \cdot : A_{nn}.$$

У кофакторима $A_{n1}, A_{n2}, \cdots A_{nn}$ елемената последње врсте датерминанте $\Delta = | a_{1n} |$ нема елемената те врсте; то значи да се у тим кофакторима јављају само коефицијенти еквација системе (10).

Да видимо сад како ћемо, не водећи рачуна о детерминанти $\Delta = | a_{1n} |$, решити систему (10). — Кофактор A_{ni} елемента a_{ni} у детерминанти $| a_{1n} |$ одређује се, као што знамо, по овом правилу: треба у матрици проширене детерминанте

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,i} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

побрисати i-ту колону, па детерминанту δ_i, која се тим путем добива, помножити са $(-1)^{n+i}$:

$$A_{ni} = (-1)^{n+i} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots a_{n-1,i-1} & a_{n-1,i+1} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = (-1)^{n+i} \delta_i.$$

Стога је

$$A_{n1} : A_{n2} : \cdots : A_{nn} = -\delta_1 : \delta_2 : \cdots : (-1)^n \delta_n$$

или

$$A_{n1} : A_{n2} : \cdots : A_{nn} = \delta_1 : -\delta_2 : \cdots : (-1)^{n-1} \delta_n.$$

Ако се дакле узме да је

$$\boldsymbol{\Delta}_i = (-1)^{i-1}\delta_i = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots & \cdots\ \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots a_{n-1,i-1} & a_{n-1,i+1} & \cdots a_{n-1,n} \end{vmatrix},$$

онда ће заједнички корени (или управо напремице тих корена) системе (10) бити одређени овим сразмерама:

$$x_1 : x_2 : \cdots : x_n = \boldsymbol{\Delta}_1 : \boldsymbol{\Delta}_2 : \cdots : \boldsymbol{\Delta}_n. \qquad (11)$$

На пример, нека је дата система

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = 0.$$

У том случају је

$$x : y : z = \boldsymbol{\Delta}_1 : \boldsymbol{\Delta}_2 : \boldsymbol{\Delta}_3 = (b_1c_2) : -(a_1c_2) : (a_1b_2).$$

Кад је $z = 1$, онда ће се дата система преобразити у нехомогену систему

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

а корени x и y те системе одређени су сразмерама

$$x : y : 1 = (b_1c_2) : -(a_1c_2) : (a_1b_2).$$

По томе методу решавају се најбрже системе нехомогених еквација.

Напомена. Решавајући систему (6) претпостављали смо ћутке, да бар један од првих минора детерминанте

$\Delta = |a_{1n}|$ није $= 0$. Но дешава се да су и сви први минори те детерминанте $= 0$. Ако тада бар један од других минора није $= 0$, онда бисмо могли доказати (в. чл. 46.), да ће две еквације системе (6) зависити од осталих еквација те системе. — Даље, понекад су и сви други минори $= 0$, а бар један од трећих није $= 0$. У том случају би три еквације системе зависиле од осталих еквација те системе и т. д.

50. Одредимо сад из сразмера (11) напремице

$$\frac{x_1}{x_i}, \ \frac{x_2}{x_i}, \ldots \frac{x_{i-1}}{x_i}, \ \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots \frac{x_n}{x_i}$$

и сменимо затим те напремице у свакој еквацији системе (10) вредностима, које будемо добили. После те замене добићемо систему ових $(n-1)$ релација:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}\Delta_1 & + & a_{12}\Delta_2 & + \cdots + & a_{1i}\Delta_i & + \cdots + & a_{1n}\Delta_n & = 0, \\
a_{21}\Delta_1 & + & a_{22}\Delta_2 & + \cdots + & a_{2i}\Delta_i & + \cdots + & a_{2n}\Delta_n & = 0, \\
\ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{i1}\Delta_1 & + & a_{i2}\Delta_2 & + \cdots + & a_{ii}\Delta_i & + \cdots + & a_{in}\Delta_n & = 0, \\
\ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n-1,1}\Delta_1 & + & a_{n-1,2}\Delta_2 & + \cdots + & a_{n-1,i}\Delta_i & + \cdots + & a_{n-1,n}\Delta_n & = 0.
\end{array}$$

Све те релације укупно бележе се симболички овом матрицом:

$$M \equiv \left\| \begin{array}{cccccc}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,i} & \cdots & a_{n-1,n}
\end{array} \right\| = 0.$$

Та матрица M представља дакле симболички ове релације:

$$a_{i1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots a_{1i} & \cdots a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots a_{2i} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{i2} & a_{i3} & \cdots a_{ii} & \cdots a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots a_{n-1,i} & \cdots a_{n-1,n} \end{vmatrix} - a_{i2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & \cdots a_{1i} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{23} & \cdots a_{2i} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{i1} & a_{i3} & \cdots a_{ii} & \cdots a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,3} & \cdots a_{n-1,i} & \cdots a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + (-1)^{n-1} a_{i,n}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1i} & \cdots a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2i} & \cdots a_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots a_{ii} & \cdots a_{i,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots a_{n-1,i} & \cdots a_{n-1,n-1} \end{vmatrix};$$

$$i = 1,\ 2,\ 3, \cdots (n-1).$$

На пример, матрица

$$M = \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{Vmatrix} = 0$$

представљала би ове три релације:

$$a_1(b_1c_2d_3) - b_1(a_1c_2d_3) + c_1(a_1b_2d_3) - d_1(a_1b_2c_3) = 0,$$

$$a_2(b_1c_2d_3) - b_2(a_1c_2d_3) + c_2(a_1b_2d_3) - d_2(a_1b_2c_3) = 0,$$

$$a_3(b_1c_2d_3) - b_3(a_1c_2d_3) + c_3(a_1b_2d_3) - d_3(a_1b_2c_3) = 0.$$

51. На основу теореме, поменуте у чл. 48., може се врло лако наћи правило по коме се множе детерминанте. Узмимо тога ради ову систему хомогених линеарних еквација:

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11}-k)x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0, \\ a_{21}x_1+(a_{22}-k)x_2+a_{23}x_3=0, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+(a_{33}-k)x_3=0. \end{array}\right\} \quad (12)$$

Детерминанта системе тих еквација мора бити $=0$. Биће дакле

$$f(k)=\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-k \end{vmatrix}=0, \quad (13)$$

или

$$-f(k)=k^3-Lk^2+Mk-N=0. \quad (14)$$

По последњем изразу види се да је $f(0)=N$, па како је према релацији (13) $f(0)=|a_{13}|$, то је јасно да је

$$N=|a_{13}|.$$

Помножимо сад прву екваціју системе (12) са b_{11}, другу са b_{21}, трећу са b_{31} и саберимо после тога те три екваціје; даље, помножимо прву екваціју са b_{12}, другу са b_{22}, трећу са b_{32} и саберимо их после тога и најзад, помножимо прву екваціју са b_{13}, другу са b_{23}, трећу са b_{33} и саберимо их поново. Тим путем добићемо опет једну систему линеарних хомогених еквација, а детерминанта те системе мора бити $=0$. Биће дакле

$$F(k) = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{21}b_{21}+a_{31}b_{31}-b_{11}k & a_{12}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{32}b_{31}-b_{21}k & a_{13}b_{11}+a_{23}b_{21}+a_{33}b_{31}-b_{31}k \\ a_{11}b_{12}+a_{21}b_{22}+a_{31}b_{32}-b_{12}k & a_{12}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{32}b_{32}-b_{22}k & a_{13}b_{12}+a_{23}b_{22}+a_{33}b_{32}-b_{32}k \\ a_{11}b_{13}+a_{21}b_{23}+a_{31}b_{33}-b_{13}k & a_{12}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{32}b_{33}-b_{23}k & a_{13}b_{13}+a_{23}b_{23}+a_{33}b_{33}-b_{33}k \end{vmatrix} = 0, \qquad (15)$$

или

$$-F(k) = Pk^3 - L_1k^2 + M_1k - N_1 = 0; \qquad (16)$$

у овом изразу је $P = |\, b_{13} \,|$, а $N_1 = F(0)$, т. ј. N_1 добива се, кад се у елементима детерминанте (15) побришу чланови у којима се јавља k. Означимо сад корене еквација̂ (14) и (16) са k_1, k_2, k_3. Како је с једне стране

$$k_1\, k_2\, k_3 = N,$$

а с друге стране

$$k_1\, k_2\, k_3 = \frac{N_1}{P},$$

биће уједно и

$$\frac{N_1}{P} = N,$$

т. ј. биће

$$N_1 = F(0) = NP = |\, a_{13} \,| \cdot |\, b_{13} \,|, \; q.\ e.\ d.$$

Напомена. У опште се теорема, поменута у чл. 48., врло често примењује у Аналитичној Геометрији, Вишој Алгебри, Инфинитезималном Рачуну и т. д. На прилику:

52. Пример I. *Наћи еквацију равни што пролази кроз три тачке* (x_1, y_1, z_1), $(x_2, y_2\; z_2)$, (x_3, y_3, z_3).

Нека је еквација равни ово:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (a)$$

Та раван пролази кроз дате три тачке, па је стога

$$\left.\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &= 0, \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D &= 0, \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

Еквације (a) и (b) су линеарне и хомогене по параметрима A, B, C, D. Њихова резултанта мора дакле бити $= 0$, т. ј. мора бити

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

То је еквација поменуте равни. —

53. Пример II. *Елиминирати x из двеју алгебарских еквација, т. ј. наћи погодбу под којом ће две алгебарске еквације имати заједничких корена.*

a) *Силвестеров дијалитичан метод.* Узмимо ове две еквације:

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,$$

$$b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0.$$

Помножимо прву најпре са x^2, па затим са x, а другу најпре са x^3, затим са x^2 и најзад са x. Тим путем ћемо добити ову систему еквација:

$$\left.\begin{array}{rr} a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 & = 0, \\ a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x & = 0, \\ b_0x^5 + b_1x^4 + b_2x^3 & = 0, \\ b_0x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 & = 0, \\ b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x & = 0. \end{array}\right\} \quad (c)$$

Узмимо сад само за један часак да је

$$x^5 = x_1,\ x^4 = x_2,\ x^3 = x_3,\ x^2 = x_4,\ x = x_5.$$

Еквације (c) представљаће у том случају једну хомогену линеарну систему; та система, а с њом уједно и система датих еквација, имаће заједничких корена само ако је резултанта

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Добили смо дакле погодбу под којом ће дате две еквације имати заједничких корена, т. ј. елиминирали смо x из тих двеју еквација.

У опште, кад су дате овакве две еквације:

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m = 0,$$

$$b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n = 0,$$

онда ћемо по Силвестерову методу овако елиминирати x: помножићемо прву еквацију са x^n, па са $x^{n-1}, \cdots$ и најзад са x, а другу са x^m, па са $x^{m-1}, \cdots$ и најзад са x, и добићемо тим путем једну линеарну систему од $(m+n)$ еквација хомогену по непознатима $x^{m+n}, x^{m+n-1} \cdots x$. Резултанта те системе, т. ј. резултанта првобитне две еквације биће

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & b_0 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

Та детерминанта је $(m+n)$-тог степена по коефицијентима датих еквација, и то n-тог степена по коефицијентима прве, а m-тог степена по коефицијентима друге еквације. —

Исти тај метод примењује се при елиминацији и кад су полиноми датих двеју еквација хомогене функције двеју промењивих.

На пример, нека су нам дате ове хомогене еквације

$$a_{30}x_1^2 + 2a_{21}x_1x_2 + a_{12}x_2^2 = 0,$$

$$a_{21}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{03}x_2^2 = 0.$$

Поделивши те две еквације са x_2^2, добићемо две квадратне еквације са непознатом $\frac{x_1}{x_2}$, а те две еквације имаће заједничких корена ако је

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{30} & 2a_{21} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{30} & 2a_{21} & a_{12} \\ a_{21} & 2a_{12} & a_{03} & 0 \\ 0 & a_{21} & 2a_{12} & a_{03} \end{vmatrix} = 0. \qquad (d)$$

b) *Ајлеров метод*. Нека су нам поново дате ове две еквације:

$$f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,$$

$$\varphi(x) = \qquad b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0,$$

па означимо заједнички корен тих еквација са c. У том случају биће

$$\frac{f(x)}{x-c} \equiv p_0x^2 + p_1x + p_2,$$

$$\frac{\varphi(x)}{x-c} \equiv \qquad q_0x + q_1;$$

како c није познато, биће у тим релацијама p_0, p_1, p_2, q_0, q_1 неодређене количине. — Помножимо сад унакрст те две релације. Тим путем добићемо ову идентичну релацију:

$$(q_0x + q_1)(a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3)$$

$$\equiv (p_0x^2 + p_1x + p_2)(b_0x^2 + b_1x + b_2),$$

а по томе се види да је

$$\begin{aligned} b_0p_0 \qquad\qquad\qquad & - a_0q_0 \qquad\quad = 0, \\ b_1p_0 + b_0p_1 \qquad\quad & - a_1q_0 - a_0q_1 = 0, \\ b_2p_0 + b_1p_1 + b_0p_2 & - a_2q_0 - a_1q_1 = 0, \\ b_2p_1 + b_1p_2 & - a_3q_0 - a_2q_1 = 0, \\ b_2p_2 & \qquad\quad - a_3q_1 = 0. \end{aligned}$$

Резултанта те системе је

$$\begin{vmatrix} b_0 & 0 & 0 & a_0 & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & a_2 & a_1 \\ 0 & b_2 & b_1 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & b_2 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = 0,$$

а тај резултат смо добили и по Силвестерову методу.

Прим. 1. Елиминирати x из ове две еквације:

$$3x^2 + 4xy + 3y^2 - 15x - 9y = 0,$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x + 2y = 0.$$

Одг. $R = 4y(y^3 + 2y^2 - 9y - 18) = 0.$

Прим. 2. Доказати да еквације

$$6x^3 - 3x^2y - xy^2 - 12y^3 = 0,$$

$$4x^2 - 8xy + 3y^2 = 0$$

имају заједничких корена.

c) *Bezout-Cauchy-јев метод.* Најпре ћемо узети да су нам дате две еквације истога степена. Нека је н. пр.

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

једна, а

$$b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3 = 0$$

друга еквација. Ако последња три члана пребацимо на десну страну, добићемо ово:

$$a_0x^3 = -(a_1x^2 + a_2x + a_3)$$

$$b_0x^3 = -(b_1x^2 + b_2x + b_3),$$

а по томе се види да је

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1x^2 + a_2x + a_3}{b_1x^2 + b_2x + b_3}.$$

Сличним путем нашли бисмо и да је

$$\frac{a_0x + a_1}{b_0x + b_1} = \frac{a_2x + a_3}{b_2x + b_3},$$

$$\frac{a_0x^2 + a_1x + a_2}{b_0x^2 + b_1x + b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Уредивши последње три еквације, добићемо овај резултат:

$$(a_0b_1 - b_0a_1)x^2 + (a_0b_2 - b_0a_2)x + (a_0b_3 - b_0a_3) = 0,$$

$$(a_0b_2 - b_0a_2)x^2 + [(a_0b_3 - b_0a_3) + (a_1b_2 - b_1a_2)]x + (a_1b_3 - b_1a_3) = 0,$$

$$(a_0b_3 - b_0a_3)x^2 + (a_1b_3 - b_1a_3)x + (a_2b_3 - b_2a_3) = 0.$$

Заједнички корени датих еквација биће уједно и корени последње три еквације; те три еквације имаће заједничких корена само ако је њихова резултанта

$$R = \begin{vmatrix} (a_0b_1) & (a_0b_2) & (a_0b_3) \\ (a_0b_2) & (a_0b_3) + (a_1b_2) & (a_1b_3) \\ (a_0b_3) & (a_1b_3) & (a_2b_3) \end{vmatrix} = 0,$$

а то је уједно и резултанта датих еквација. Та резултанта је детерминанта трећега степена, па како је у тој детерминанти $a_{rs} = a_{sr}$, то ће та детерминанта бити „симетрична" (види чл. 55.).

Да смо били узели ове **две** еквације:

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0,$$

$$b_0x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x + b_4 = 0,$$

онда бисмо, држећи се Безу-Кошијева метода, могли доказати, да ће резултанту тих еквација представљати ова симетрична детерминанта четвртог степена:

$$R = \begin{vmatrix} (a_0b_1) & (a_0b_2) & (a_0b_3) & (a_0b_4) \\ (a_0b_2) & (a_0b_3) + (a_1b_2) & (a_0b_4) + (a_1b_3) & (a_1b_4) \\ (a_0b_3) & (a_0b_4) + (a_1b_3) & (a_1b_4) + (a_2b_3) & (a_2b_4) \\ (a_0b_4) & (a_1b_4) & (a_2b_4) & (a_3b_4) \end{vmatrix} = 0.$$

Напом. Кад дате две еквације нису истог степена, онда се овако тражи резултанта по Безу-Кошијеву методу. — Нека су дате ове две еквације:

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0,$$

$$b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0. \qquad (\alpha)$$

Помножимо еквацију (α) са x^2. Тада ћемо поново имати две еквације истога степена:

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0,$$

$$b_0x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 \qquad\qquad = 0.$$

У овај мах биће дакле

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4}{b_1x^3 + b_2x^2},$$

$$\frac{a_0x + a_1}{b_0x + b_1} = \frac{a_2x^2 + a_3x + a_4}{b_2x^2},$$

па је стога и

$$(a_0b_1)x^3 + (a_0b_2)x^2 - b_0a_3x - b_0a_4 = 0,$$

$$(a_0b_2)x^3 + [(a_1b_2) - b_0a_3]x^2 - (b_0a_4 + b_1a_3)x - b_1a_4 = 0.$$

Допишимо сад уз те две еквације ове две:

$$b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x = 0,$$

$$b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0,$$

па елиминирајмо из последње четири еквације x^3, x^2, x. Резултанта биће ово:

$$R = \begin{vmatrix} (a_0b_1) & (a_0b_2) & b_0a_3 & b_0a_4 \\ (a_0b_2) & (a_1b_2) - b_0a_3 & b_0a_4 + b_1a_3 & b_1a_4 \\ b_0 & b_1 & -b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & -b_1 & -b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

а та резултанта није симетрична детерминанта.

Кад бисмо елиминирали по Безу-Кошијеву методу x из ове две еквације:

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0,$$

$$a_1x^3 + 3a_2x^2 + 3a_3x + a_4 = 0,$$

онда бисмо, означивши резултанту са $\varDelta$, добили овај резултат:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 3(a_0a_2 - a_1^2) & a_0a_3 - a_1a_2 & a_0a_4 - a_1a_3 \\ a_0a_3 - a_1a_2 & a_0a_4 - a_1a_3 + 9(a_1a_3 - a_2^2) & a_1a_4 - a_2a_3 \\ a_0a_4 - a_1a_3 & a_1a_4 - a_2a_3 & a_2a_4 - a_3^2 \end{vmatrix}.$$

Ако са i и j означимо ова два израза:

$$i = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2,$$

$$j = a_0a_3^2 + a_4a_1^2 + a_2^3 - a_0a_2a_4 - 2a_1a_2a_3,$$

онда ћемо резултанту $\varDelta$ моћи написати у овом облику

$$\varDelta = i^3 - 27j^2. \tag{e}$$

Та резултанта $\varDelta$ је, као што ћемо касније видети, т. зв. *дискриминанта* ове еквације:

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0,$$

а изрази i и j су т. зв. *инваријанте* израза што се јавља на левој страни те еквације.

54. Пример III. *Зна се један партикуларан интеграл неке хомогене линеарне диференцијалне еквације n-тога реда. Доказати да се та диференцијална еквација може свести на једну диференцијалну еквацију $(n-1)$-вог реда.*

Узећемо један специјалан случај: на пример, узећемо ову хомогену линеарну диференцијалну еквацију трећега реда:

$$y_3 + X_1y_2 + X_2y_1 + X_3y = 0. \tag{f}$$

У тој еквацији су са X_1, X_2, X_3, y означене неке функције промењљиве x, а са y_1, y_2, y_3 су означени изводи $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$.

Ако је $y = z$ партикуларан интеграл дате диференцијалне еквације (f), онда ће бити

$$z_3 + X_1 z_2 + X_2 z_1 + X_3 z = 0. \qquad (g)$$

Нека је сад

$$v = z y_1 - z_1 y,$$

т. ј. нека је

$$-v + z y_1 - z_1 y = 0.$$

Ако ту еквацију диференцирамо двапут узастопце, добићемо ову систему еквација̂:

$$-v_1 + z y_2 - z_2 y = 0,$$

$$-v_2 + z y_3 + z_1 y_2 - z_2 y_1 - z_3 y = 0.$$

Те три последње еквације и дата еквација биће задовољене у исти мах само ако је детерминанта системе $= 0$, т. ј. само ако је

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & X_1 & X_2 & X_3 y \\ 0 & 0 & z & -v - z_1 y \\ 0 & z & 0 & -v_1 - z_2 y \\ z & z_1 & -z_2 & -v_2 - z_3 y \end{vmatrix} = 0.$$

Ту детерминанту преобразићемо овако: помножићемо четврту колону са $\frac{z}{y}$, трећу са z_1, другу са z_2, прву са z_3 и додаћемо после тога прве три колоне четвртој. Имајући у виду погодбену релацију (g), биће тада

$$\begin{vmatrix} 1 & X_1 & X_2 & 0 \\ 0 & 0 & z & v \\ 0 & z & 0 & v_1 \\ z & z_1 & -z_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$v_2 z - v_1(z_1 - X_1 z) + v(z_2 + X_2 z) = 0,$$

а та је диференцијална екваџија другога реда.

ОДЕЉАК ШЕСТИ.

ДЕТЕРМИНАНТЕ СПЕЦИЈАЛНИХ ОБЛИКА.

Симетричне детерминанте.

55. Елементи a_{rs} и a_{sr} детерминанте $| a_{1n} |$ зову се *коњуговани елементи*; н. пр. у детерминанти

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

су коњуговани елементи a_{12} и a_{21}, a_{13} и a_{31} и т. д. Кад су у некој детерминанти коњуговани елементи једнаки, онда се каже да је детерминанта *акси-симетрична* или просто *симетрична*; на пример, детерминанта

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

јесте симетрична детерминанта. Елементи i-те врсте и i-те колоне су у симетричних детерминаната једнаки.

Узмимо сад два минора M и M_1 детерминанте $\Delta = | a_{1n} |$, па претпоставимо да смо минор M (минор M_1)

добили тим, што смо у матрици детерминанте Δ побрисали u-ту, v-ту,$\cdots$ врсту (колону) и i-ту, k-ту$\cdots$ колону (врсту). Ти минори биће стога овог облика:

$$M = \begin{vmatrix} a_{lp} & a_{lq}\cdots \\ a_{mp} & a_{mq}\cdots \\ \cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix}, \quad M_1 = \begin{vmatrix} a_{pl} & a_{pm}\cdots \\ a_{ql} & a_{qm}\cdots \\ \cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix}.$$

Ако је детерминанта Δ симетрична онда ће бити $a_{rs}=a_{sr}$. По томе се види да ће у том случају бити $M = M_1$, а то значи *да су коњуговани минори симетричних детерминаната једнаки*. Према томе ће и *адјунгована детерминанта* $|A_{1n}|$ *бити симетрична, ако је детерминанта* $|a_{1n}|$ *симетрична.*

Напомена. Симетричне детерминанте јављају се нарочито често у Аналитичној Геометрији.

56. Теорема. *Квадрат неке детерминанте је симетрична детерминанта.*

Нека је

$$|a_{1n}|^2 = |b_{1n}|.$$

Елементи b_{rs} и b_{sr} биће овог облика:

$$b_{rs} = a_{r1}a_{s1} + a_{r2}a_{s2} + \cdots + a_{rn}a_{sn},$$

$$b_{sr} = a_{s1}a_{r1} + a_{s2}a_{r2} + \cdots + a_{sn}a_{rn}.$$

По томе се види да је $b_{rs} = b_{sr}$, а то значи да је детерминанта $|b_{1n}|$ симетрична.

На пример,

$$|\, a_1b_2c_3 \,|^2 = \begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 & a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 & a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 & a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 & a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 \\ a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 & a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 & a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 \end{vmatrix}.$$

Последица. *Сваки паран степен неке детерминанте јесте симетрична детерминанта.*

57. Теорема. *Кад се нека симетрична детерминанта помножи квадратом неке детерминанте истога степена, онда је производ симетрична детерминанта.*

Нека је $|\, a_{1n} \,|$ дата симетрична детерминанта и нека је $|\, b_{1n} \,|$ она детерминанта чијим ћемо квадратом помножити детерминанту $|\, a_{1n} \,|$. Даље, нека је

$$|\, a_{1n} \,| \cdot |\, b_{1n} \,| = |\, c_{1n} \,|, \quad \text{а} \quad |\, c_{1n} \,| \cdot |\, b_{1n} \,| = |\, C_{1n} \,|.$$

Треба доказати да је детерминанта $|\, C_{1n} \,|$ симетрична т. ј. да је $C_{ik} = C_{ki}$. — Јасно је да је

$$\begin{aligned} C_{ik} &= b_{i1}c_{k1} + b_{i2}c_{k2} + \cdots + b_{in}c_{kn} \\ &= (a_{11}b_{k1} + a_{12}b_{k2} + \cdots + a_{1n}b_{kn})\, b_{i1} \\ &+ (a_{21}b_{k1} + a_{22}b_{k2} + \cdots + a_{2n}b_{kn})\, b_{i2} \\ &\quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ &+ (a_{n1}b_{k1} + a_{n2}b_{k2} + \cdots + a_{nn}b_{kn})\, b_{in} \\ &= (a_{11}b_{i1} + a_{21}b_{i2} + \cdots + a_{n1}b_{in})\, b_{k1} \\ &+ (a_{12}b_{i1} + a_{22}b_{i2} + \cdots + a_{n2}b_{in})\, b_{k2} \\ &\quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ &+ (a_{1n}b_{i1} + a_{2n}b_{i2} + \cdots + a_{nn}b_{in})\, b_{kn}. \end{aligned}$$

Но како је $a_{rs} = a_{sr}$, то ћемо збир што се налази иза последњег знака једнакости моћи написати у овом облику:

$$b_{k1}c_{i1} + b_{k2}c_{i2} + \cdots + b_{kn}c_{in}.$$

Тај израз представља међу тим елеменат C_{ki} у детерминанти $| C_{1n} |$. Стога је $C_{ik} = C_{ki}$, *q. e. d.*

Последица. *Ма који степен симетричне детерминанте је симетрична детерминанта.*

То је правило последица теорема̂ поменутих у последња два члана.

58. Кошијев образац (чл. 31.):

$$\Delta = a_{rs}A_{rs} - \Sigma a_{is}a_{rk}B_{ik}$$

примењује се нарочито често при развијању симетричних детерминаната и у том случају се тај образац може написати и у другом облику. Узмимо да је $r = s = n$. У том случају биће

$$\Delta = a_{nn}A_{nn} - \Sigma a_{in}a_{nk}B_{ik}, \qquad (a)$$

$$(i, k = 1, 2, 3, \cdots (n - 1)).$$

Кад је $i = k = p$, онда ћемо добити овакав један члан детерминанте Δ: $a_{pn}a_{np}B_{pp}$. Ако је дакле детерминанта Δ симетрична, онда ћемо тај члан моћи овако написати: $a^2_{pn}B_{pp}$. Даље, кад је $i = p$, а $k = q$, онда ћемо добити овај члан детерминанте Δ: $a_{pn}a_{nq}B_{pq}$, а кад је обратно $i = q$, а $k = p$, онда ћемо добити овај члан: $a_{qn}a_{np}B_{qp}$. Последња два члана су једнака кад је детерминанта симетрична.

Дакле, кад је $\Delta = | a_{1n} |$ симетрична детерминанта, онда се образац (a) може написати у овом облику:

$$\Delta = a_{nn}A_{nn} - \Sigma a^2_{pn}B_{pp} - 2\Sigma a_{pn}a_{qn}B_{pq}. \qquad (b)$$

Применимо одмах тај образац. Нека је н. пр.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}.$$

Детерминанта Δ је симетрична. Стога је

$$\Delta = c \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} - af^2 - bg^2 + 2fgh$$

$$= abc - af^2 - bg^2 - ch^2 + 2fgh.$$

Даље, нека је

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Та детерминанта је симетрична ако је $a_{rs} = a_{sr}$. Дакле, ако са B_{ik} означимо кофактор елемента a_{ik} у детерминанти $|\, a_{13}\,|$, онда ће у овом случају према обрасцу (b) бити (в. чл. 32.)

$$\Delta = -(B_{11}u_1^{\,2} + B_{22}u_2^{\,2} + B_{33}u_3^{\,2} + 2B_{12}u_1u_2 + 2B_{23}u_2u_3 + 2B_{31}u_3u_1).$$

Прим. 1. $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & h & g \\ b & h & 0 & f \\ c & g & f & 0 \end{vmatrix} = a^2f^2 + b^2g^2 + c^2h^2 - 2abfg - 2acfh - 2bcgh.$

Прим. 2. У некој симетричној детерминанти Δ је збир елемената у сваком реду $= 0$. Доказати (1), да је $\Delta = 0$ и (2), да су сви први минори детерминанте Δ једнаки.

59. Узмимо сад да је у детерминанти (1) минор $|a_{13}| = 0$. У том случају ће (чл. 42.) кофактори елемената ма ког реда детерминанте $|a_{13}|$ бити сразмерни с кофакторима наспрамних елемената неког другог реда те детерминанте. Биће дакле

$$B_{11} : B_{12} : B_{13} = B_{21} : B_{22} : B_{23} = B_{31} : B_{32} : B_{33}.$$

Но како је детерминанта (1) симетрична, биће $B_{rs} = B_{sr}$. Из горњих сразмера добићемо дакле у овај мах ово:

$$B_{12} = \pm \sqrt{B_{11}B_{22}}, \; B_{23} = \pm \sqrt{B_{22}B_{33}}, \; B_{31} = \pm \sqrt{B_{33}B_{11}}.$$

Дакле, кад је минор $|a_{13}|$ симетричне детерминанте (1) $= 0$, онда се детерминанта Δ може овако изразити:

$$\Delta = -(B_{11}u_1^2 + B_{22}u_2^2 + B_{33}u_3^2 \pm 2\sqrt{B_{11}B_{22}} \cdot u_1u_2$$
$$\pm 2\sqrt{B_{22}B_{33}} \cdot u_2u_3 \pm 2\sqrt{B_{33}B_{11}} \cdot u_3u_1). \qquad (2)$$

Знаци испред појединих корена одређују се тим, што се у сваком посебном случају тражи алгебарска вредност кофактора B_{12}, B_{23}, B_{31}. Но има општих правила по којима се види како стоје знаци тих количина један према другом. Да бисмо та правила уочили, поменућемо прво то, да количине B_{11}, B_{22}, B_{33} морају имати исте знаке. То се види непосредно по томе, што количине B_{12}, B_{23}, B_{31} не би могле бити реалне, кад количине B_{11}, B_{22}, B_{33} не би биле једнако означене.

Узмимо сад (*a*), да је $B_{11} > 0$, $B_{22} > 0$, $B_{33} > 0$, па нека је сем тога B_{12} позитивно (негативно). По сразмери

$$B_{12} : B_{13} = B_{22} : B_{23} \qquad (3)$$

види се да ће у том случају количине B_{23} и $B_{13} = B_{31}$ морати бити једнако (неједнако) означене. У изразу, што се налази у загради, биће дакле у том случају знаци испред коренâ или сви позитивни или ће два знака бити негативна, а један позитиван. И у једном и у другом случају моћи ћемо према томе израз у загради написати у облику једнога квадрата.

Даље, нека је (b) $B_{11} < 0$, $B_{22} < 0$, $B_{33} < 0$, па нека је поново B_{12} позитивно (негативно). У том случају ће према сразмери (3) количине B_{23} и B_{31} бити неједнако (једнако) означене. У изразу, што се налази у загради, биће дакле знаци испред коренâ или сви негативни или ће два знака бити позитивна, а један негативан. Ако се дакле у овом случају извуче знак минус испред заграде, онда ће у прва три члана поменутог израза знаци бити позитивни, а у остала три члана или ће сви знаци бити позитивни, или ће два знака бити негативна, а један позитиван. И у том случају моћи ћемо дакле детерминанту Δ изразити једним квадратом, само што ће се у том случају испред квадрата јављати позитиван знак.

Кад је дакле у симетричној детерминанти (1) минор $| a_{13} | = 0$, *онда се свакад* $\pm \Delta$ *може изразити квадратом једног линеарног израза овог облика:*

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3.$$

У том изразу је

$$a_1 = \pm \sqrt{B_{11}},\ a_2 = \pm \sqrt{B_{22}},\ a_3 = \pm \sqrt{B_{33}}.$$

То правило постоји и кад елеменат што одговара кофактору $| a_{13} |$ у симетричној детерминанти (1) није $= 0$, само ако је $| a_{13} | = 0$, јер у том случају поново према обрасцу (b) неће бити првога члана $a_{nn} A_{nn}$ у детерминанти стога, што је $A_{nn} = | a_{13} | = 0$.

60. Узмимо сад детерминанту $| a_{1n} |$, па нека је

$$F(x) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - x \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Еквација $F(x)=0$ је алгебарска еквација (прим. 6. чл. 30.) n-тога степена. Доказаћемо ову теорему:

Теорема. *Ако је детерминанта* $|\,a_{1n}\,|$ *симетрична, онда алгебарска еквација* $F(x)=0$ *има само реалних корена.*

Јасно је да је

$$F(-x)=\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+x & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}.$$

Ако је детерминанта $|\,a_{1n}\,|$ симетрична, биће $a_{rs}=a_{sr}$. Ако дакле помножимо $F(x)$ са $F(-x)$, добићемо овакав резултат:

$$F(x)\,F(-x)$$

$$=\begin{vmatrix} c_{11}-x^2 & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}-x^2 & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}-x^2 \end{vmatrix}=0, \quad c_{rs}=c_{sr} \qquad (5)$$

а у тој детерминанти је

$$c_{ik}=a_{i1}a_{k1}+a_{i2}a_{k2}+\cdots+a_{in}a_{kn}.$$

Ту еквацију (5) моћи ћемо сад према обрасцу (a) чл. 30. написати у овом облику:

$$|\,c_{1n}\,|-x^2\Sigma D_{n-1}+x^4\Sigma D_{n-2}-x^6\Sigma D_{n-3}+\cdots+(-x^2)^n=0. \qquad (6)$$

Доказаћемо да детерминанте D_{n-1}, D_{n-2}, $D_{n-3}, \cdots$ представљају суме квадрата минора̑ детерминанте $|\,a_{1n}\,|$, т. ј. *доказаћемо да су збирови* ΣD_{n-1}, ΣD_{n-2}, $\Sigma D_{n-3}, \cdots$ *позитивни.* — Уочимо тога ради једну између детерминаната D, н. пр. уочимо детерминанту D_{n-2}. Та детерминанта је $(n-2)$-гог степена, а овог облика (прим. 6. чл. 30.):

$$D_{n-2} = \begin{vmatrix} c_{ff} & c_{fg} & \cdots & c_{fr} \\ c_{gf} & c_{gg} & \cdots & c_{gr} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{rf} & c_{rg} & \cdots & c_{rr} \end{vmatrix}. \qquad (7)$$

Та детерминанта добива се међу тим кад се проширена детерминанта

$$\begin{vmatrix} a_{f1} & a_{f2} & a_{f3} & \cdots & a_{fn} \\ a_{g1} & a_{g2} & a_{g3} & \cdots & a_{gn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rn} \end{vmatrix}$$

подигне на квадрат. Према томе ће се детерминанта (7) моћи изразити збиром производа детерминаната $(n-2)$-гог степена (чл. 37.); у сваком таквом производу јављаће се по две детерминанте. Те детерминанте биће у овај мах једнаке т. ј. детерминанта D_{n-2} може се изразити збиром квадрата других минора детерминанте $|a_{1n}|$. Збирови ΣD_{n-1}, ΣD_{n-2}, $\Sigma D_{n-3}, \cdots$ биће дакле заиста позитивни, а то смо и тврдили. По томе се види да сви чланови што се у еквацији (6) јављају на непарном (парном) месту имају позитиван (негативан) знак. По Декартовој теореми не ће дакле еквација (6) моћи имати негативних корена, а то значи, да дата еквација (4) не може имати имагинарних корена овог облика: $b\sqrt{-1}$. Но може се доказати да дата еквација не може имати ни корена овог облика: $a + b\sqrt{-1}$. Сменимо на име у еквацији (4) непознату x са $y + a$, па затим $a_{11}-a$, $a_{22}-a, \cdots$ са a'_{11}, $a'_{22}, \cdots$; у том случају преобразиће се та еквација у ову еквацију:

$$\begin{vmatrix} a'_{11}-y & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a'_{22}-y & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0,$$

а корени те еквације биће за a мањи од корена дате еквације. Дакле, кад је $x = a + b\sqrt{-1}$, онда ће морати бити $y = b\sqrt{-1}$, а то према ономе што мало час рекосмо, не може да буде. Корени еквације $F(x) = 0$ су дакле реални, кад је детерминанта $| a_{1n} |$ симетрична.

61. Ортосиметричне детерминанте. — Кад су елементи, што се налазе ма на којој правој, што иде у правцу главне или споредне дијагонале неке детерминанте једнаки, онда се каже да је та детерминанта *ортосиметрична* или *пер-симетрична*. На пример, детерминанте

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & c_3 & d_4 & e_5 \\ f_6 & a_1 & b_2 & c_3 & d_4 \\ g_7 & f_6 & a_1 & b_2 & c_3 \\ h_8 & g_7 & f_6 & a_1 & b_2 \\ i_9 & h_8 & g_7 & f_6 & a_1 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n+1} \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{2n-1} \end{vmatrix}$$

$$\equiv P(a_1, a_2, a_3, \cdots a_{2n-1})$$

јесу ортосиметричне детерминанте. Прва детерминанта је ортосиметрична према споредној, а друга према главној дијагонали. У ортосиметричној детерминанти n-тог степена не може бити више од $(2n-1)$ различитих елемената $a_1, a_2, a_3, \cdots a_{2n-1}$.

62. Напишимо сад елементе ортосиметричне детерминанте $P(a_1, a_2, a_3, \cdots a_{2n-1})$ у један ред:

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad \cdots \quad a_{2n-1}$$

и одузмимо сваки члан тога реда од члана који непосредно иза њега стоји у томе реду. Тим путем добићемо ред првих разлика. Одузмимо даље у реду првих разлика сваки члан од члана који непосредно иза њега стоји у томе реду. Тим путем добићемо ред других разлика и т. д. Сви ти редови укупно биће ови редови:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_{2n-1} & & \\
& \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} & \Delta_{41} & \cdots & \Delta_{2n-2,1} & & \\
& & \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} & \cdots & \Delta_{2n-3,2} & & \\
& & & \Delta_{13} & \Delta_{23} & \cdots & \Delta_{2n-4,3} & & \\
& & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
& & & & & & \Delta_{1,2n-2}. & &
\end{array}$$

Доказаћемо ову теорему:

Теорема. *Ортосиметричне детерминанте*

$$\Delta = P(a_1, a_2, \cdots a_{2n-1})$$

и

$$P(a_1, \Delta_{11}, \Delta_{12}, \cdots \Delta_{1,2n-2})$$

јесу по вредности својој једнаке.

Да не бисмо писали велике изразе, узећемо ову специјалну ортосиметричну детерминанту

$$\Delta = P(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7).$$

Треба дакле доказати да је

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \Delta_{14} \\ \Delta_{12} & \Delta_{13} & \Delta_{14} & \Delta_{15} \\ \Delta_{13} & \Delta_{14} & \Delta_{15} & \Delta_{16} \end{vmatrix}.$$

Тога ради одузећемо у датој детерминанти од сваког елемента i-те врсте ($i = 2, 3, 4$) наспрамне елементе ($i - 1$)-ве врсте. Даље, одузећемо у детерминанти, коју тим путем будемо добили, од сваког елемента i-те врсте ($i = 3, 4$) наспрамне елементе ($i - 1$)-ве врсте. Тим путем добићемо опет једну детерминанту. Најзад ћемо у тој детерминанти одузети трећу врсту од четврте. Услед тих трансформација не ће се вредност детерминанте Δ променити. Биће дакле

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} & \Delta_{41} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} & \Delta_{42} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} & \Delta_{43} \end{vmatrix}.$$

Ако сад у тој детерминанти исто онако будемо одузимали колоне, као што смо мало час одузимали врсте, добићемо овај резултат:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \Delta_{14} \\ \Delta_{12} & \Delta_{13} & \Delta_{14} & \Delta_{15} \\ \Delta_{13} & \Delta_{14} & \Delta_{15} & \Delta_{16} \end{vmatrix},$$

а тим обрасцем је формулисана поменута теорема. Одмах ћемо применити ту теорему.

Нека је

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 15 & 26 \\ 8 & 15 & 26 & 43 \\ 15 & 26 & 43 & 68 \\ 26 & 43 & 68 & 103 \end{vmatrix}.$$

Детерминанта $\varDelta$ је ортосиметрична, а редови разлика̂ су ово:

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & 8 & 15 & 26 & 43 & 68 & 103 \\ & 5 & 7 & 11 & 17 & 25 & 3 \\ & & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ & & & 2 & 2 & 2 & 2 \\ & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0. \end{array}$$

Стога је

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2^4.$$

Исто се тако може доказати да је

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & -4 & -5 & -3 \\ -4 & -5 & -3 & 2 \\ -5 & -3 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 8 & 27 & 64 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \\ 27 & 64 & 125 & 216 \\ 64 & 125 & 216 & 343 \end{vmatrix} = 6^4.$$

По тим примерима види се *да је ортосиметрична детерминанта n-тога степена, чији елементи представљају једну аритметичку прогресију m-тога реда, тачно $= 0$ кад је $m < n - 1$; кад је $m = n - 1$, онда је ортосиметрична детерминанта n-ти степен неке количине.*

63. Означимо сад са a_k неку рационалну целу функцију $f(k)$ m-тог степена, у којој је коефицијенат степена k^m свакад $= 1$. У том случају ће бројеви $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots$ представљати једну аритметичку прогресију m-тога реда, а сви чланови у реду m-тих разлика биће $= m!$; остали чланови $\Delta_{1,m+1}$, $\Delta_{1,m+2}, \cdots$ разлика̂ виших редова биће сви од реда $= 0$. Ако је $m = n - 1$, онда ће према томе сви елементи на споредној дијагонали ортосиметричне детерминанте $P(a_0, a_1, a_2, \cdots a_{2n-2})$ бити $= (n-1)!$, а сви елементи испод те дијагонале биће $= 0$. То значи да је у том случају

$$P(a_0, a_1, a_2, \cdots a_{2n-2}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}} [(n-1)!]^n.$$

Кад је $m < n - 1$, онда ће према мало час поменутој теореми бити $P = 0$.

Узмимо сад да је са c означен ма какав број, па нека је

$$a_k = \binom{c+k+m}{m} = \frac{(c+k+m)(c+k+m-1)\cdots(c+k+1)}{m!}.$$

У том случају биће

$$P(a_0, a_1, \cdots a_{2m}) = \begin{vmatrix} \binom{c+m}{m} & \binom{c+m+1}{m} \cdots & \binom{c+2m}{m} \\ \binom{c+m+1}{m} & \binom{c+m+2}{m} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \quad \cdots & \cdots \\ \binom{c+2m}{m} & \binom{c+2m+1}{m} \cdots & \binom{c+3m}{m} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

64. Узмимо најзад ову ортосиметричну детерминанту:

$$P = \begin{vmatrix} a & aq & aq^2 & \cdots & aq^{n-1} \\ aq & aq^2 & aq^3 & \cdots & aq^n \\ aq^2 & aq^3 & aq^4 & \cdots & aq^{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ aq^{n-1} & aq^n & aq^{n+1} & \cdots & aq^{2n-2} \end{vmatrix}.$$

Елементи те детерминанте јесу чланови једне геометријске прогресије. Ако сад ма коју врсту (сем прву) поделимо са q, онда ћемо добити једну детерминанту у којој ће два реда бити једнака. Та детерминанта, а с њом уједно и детерминанта P, биће према томе $= 0$. Дакле, *кад су елементи неке ортосиметричне детерминанте чланови једне геометријске прогресије, онда је та детерминанта $= 0$.*

65. Циркуланте. Детерминанте овог облика:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \cdots & \cdots & \cdots \\ a_3 & a_4 & a_5 \cdots & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 \cdots & a_n & a_1 \end{vmatrix}$$

зову се *циркуланте*. Те детерминанте бележе се симболички овако:

$$\Delta \equiv C\,(a_1, a_2, a_3, \cdots a_n).$$

Циркуланте су, као што видимо, неке специјалне ортосиметричне детерминанте; оне се нарочито често јављају у Теорији Бројева, а зову се и *двојно ортосиметричне детерминанте*.

Да бисмо доказали једну важну теорему, означићемо са α_i $(i = 1, 2, 3, \cdots n)$ један од корена биномне еквације $\alpha^m = 1$, а са $f(\alpha_i)$ овај полином:

$$f(\alpha_i) = a_1 + a_2\alpha_i + a_3\alpha_i^2 + \cdots + a_n\alpha_i^{n-1}.$$

Теорема. *Циркуланта $C(a_1, a_2, a_3, \cdots a_n)$ може се без остатка поделити полиномом $f(\alpha_i)$.*

Да бисмо доказали ту теорему, напишимо ову детерминанту n-тога реда:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 \cdots & \alpha_3^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \cdots & \cdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Комбинујмо сад врсте детерминанте Δ с вротама детерминанте D. Ако при томе узимамо у виду да је $\alpha_i^n = 1$, онда ћемо резултат моћи овако написати:

$$\Delta D = \begin{vmatrix} f(\alpha_1) & f(\alpha_2) & \cdots & f(\alpha_n) \\ \alpha_1 f(\alpha_1) & \alpha_2 f(\alpha_2) & \cdots & \alpha_n f(\alpha_n) \\ \alpha_1^2 f(\alpha_1) & \alpha_2^2 f(\alpha_2) & \cdots & \alpha_n^2 f(\alpha_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^{n-1} f(\alpha_1) & \alpha_2^{n-1} f(\alpha_2) & \cdots & \alpha_n^{n-1} f(\alpha_n) \end{vmatrix},$$

а по томе се види да је

$$\Delta D = f(\alpha_1)\, f(\alpha_2) \cdots f(\alpha_n)\, D$$

или

$$\Delta = f(\alpha_1)\, f(\alpha_2) \cdots f(\alpha_n)$$

или

$$C\,(a_1, a_2, a_3, \cdots a_n)$$

$$\equiv \prod_{i=1}^{n} (a_1 + a_2\alpha_i + a_3\alpha_i^2 + \cdots + a_n\alpha_i^{n-1}),$$

а то смо и тврдили.

На пример, циркуланта

$$C \equiv \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & y \\ y & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & x \end{vmatrix}$$

може се изразити овим производом:

$$C = (x+\alpha_1 y)(x+\alpha_2 y)(x+\alpha_3 y)(x+\alpha_4 y)(x+\alpha_5 y)$$

$$= (x+y)\left(x+\left[\frac{\sqrt{5}-1}{4}+\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{-1}\right]y\right)$$

$$\left(x+\left[\frac{\sqrt{5}-1}{4}-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{-1}\right]y\right)$$

$$\left(x+\left[-\frac{\sqrt{5}+1}{4}+\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{-1}\right]y\right)$$

$$\left(x+\left[-\frac{\sqrt{5}+1}{4}-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{-1}\right]y\right)$$

$$= x^5 + y^5.$$

Како је један корен еквације $\alpha^m = 1$ и $\alpha_1 = 1$, то ће бити

$$f(\alpha_1) = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$

а то значи *да се циркуланта може поделити збиром својих елемената.*

Прим. 1. Доказати да се свака циркуланта $2n$-тог реда може написати у облику једне циркуланте n-тог реда.

Прим. 2. Доказати да је

$$C(a_1, a_2, a_3, a_4)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1a_1 - a_4a_2 + a_3a_3 - a_2a_4 & a_3a_1 - a_2a_2 + a_1a_3 - a_4a_4 \\ a_3a_1 - a_2a_2 + a_1a_3 - a_4a_4 & a_1a_1 - a_4a_2 + a_3a_3 - a_2a_4 \end{vmatrix}.$$

66. Косе и косо симетричне детерминанте. Ако је $a_{rs} = -a_{sr}$ у некој детерминанти $|a_{1n}|$, онда се каже да је детерминанта $|a_{1n}|$ *коса*. А ако је у некој детерминанти $| a_{1n} |$ и $a_{rs} = - a_{sr}$ и $a_{rr} = 0$, онда се каже да је детерминанта $| a_{1n} |$ *косо симетрична*. На пример, детерминанта

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ -a & x & d & e \\ -b & -d & x & f \\ -c & -e & -f & x \end{vmatrix}$$

је коса, а детерминанта

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$$

је косо симетрична.

Косе детерминанте могу се свакад свести на косо симетричне. Узмимо на име да је детерминанта $\Delta^{(n)}$ коса. Ту детерминанту моћи ћемо изразити овако (чл. 33.):

$$\Delta^{(n)} = \Delta_0^{(n)} + \Sigma C_1 \Delta_0^{(n-1)} + \Sigma C_2 \Delta_0^{(n-2)} + \cdots + \Sigma C_{n-2} \Delta_0^{(2)} + C_n.$$

Но како је $a_{rs} = - a_{sr}$, то ће детерминанте $\Delta_0^{(n)}$, $\Delta_0^{(n-1)}, \cdots$ све од реда бити косо симетричне, т. ј. свака коса детерминанта може се заиста свести на косо симетричне детерминанте.

67. Теорема. *Квадрат неке детерминанте парног степена може се написати у облику једне косо симетричне детерминанте.*

На пример, нека је n паран број, па узмимо да је

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (a)$$

Напишимо ту детерминанту у овом облику:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{12} & -a_{11} & a_{14} & -a_{13} & \cdots & a_{1n} & -a_{1,n-1} \\ a_{22} & -a_{21} & a_{24} & -a_{23} & \cdots & a_{2n} & -a_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & -a_{n1} & a_{n4} & -a_{n3} & \cdots & a_{nn} & -a_{n,n-1} \end{vmatrix}. \qquad (b)$$

Ако помножимо детерминанте (a) и (b), добићемо ову детерминанту:

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (c)$$

где је

$$c_{ik} = a_{i1}a_{k2} - a_{i2}a_{k1} + a_{i3}a_{k4} - a_{i4}a_{k3} + \cdots + a_{i,n-1}a_{kn} - a_{in}a_{k,n-1}.$$

По томе се види да је $c_{rs} = -c_{sr}$, а $c_{rr} = 0$, т. ј. детерминанта (c) је косо симетрична.

68. Теорема. *Косо симетрична детерминанта непарног степена је $= 0$.*

Узмимо н. пр. ову косо симетричну детерминанту трећега степена:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{vmatrix},$$

па помножимо ту детерминанту са $(-1)^3$. Резултат ће бити ово:

$$-\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{vmatrix}.$$

Врсте детерминанте Δ су, као што видимо, колоне детерминанте $-\Delta$ и обратно. Стога је

$$\Delta = -\Delta$$

или

$$\Delta = 0.$$

Прим. 1. Уредити детерминанту

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & -a & -b & -c \\ a & x & -d & -e \\ b & d & x & -f \\ c & e & f & x \end{vmatrix}$$

по степенима количине x.

Развићемо (чл. 33.) детерминанту по обрасцу

$$\Delta^{(n)} = x^n + x^{n-2} \Sigma \Delta_0^{(2)} + x^{n-3} \Sigma \Delta_0^{(3)} + \cdots + x \Sigma \Delta_0^{(n-1)} + \Delta_0^{(n)}.$$

Како су косо симетричне детерминанте непарног степена $= 0$, биће у овај мах

$$\Delta = x^4 + x^2 \left[\begin{vmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & -d \\ d & 0 \end{vmatrix}^2 \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} 0 & -e \\ e & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{vmatrix}^2 \right]$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -c \\ a & 0 & -d & -e \\ b & d & 0 & -f \\ c & e & f & 0 \end{vmatrix}$$

или

$$\Delta = x^4 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2)\, x^2 + (af - be + cd)^2.$$

Прим. 2. Доказати да је

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$$

69. Узмимо сад два минора m-тог степена, означимо их са M и M_1 и претпоставимо да смо минор M (минор M_1) добили тим, што смо у матрици косо симетричне детерминанте $| a_{1n} |$ побрисали u-ту, v-ту, $\cdots$ врсту (колону) и i-ту, k-ту, $\cdots$ колону (врсту). Ти минори биће стога овог облика:

$$M = \begin{vmatrix} a_{lp} & a_{lq} & \cdots \\ a_{mp} & a_{mq} & \cdots \\ \cdot\ \cdot & \cdots\cdots & \end{vmatrix}, \quad M_1 = \begin{vmatrix} -a_{lp} & -a_{mp} & \cdots \\ -a_{lq} & -a_{mq} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix},$$

а по томе се види да је

$$M = (-1)^m M_1,$$

т. ј. *коњуговани минори косо симетричне детерминанте су једнаки кад је m паран број; а ако је m непаран број, онда су коњуговани минори по апсолутној вредности једнаки, али је један од њих позитиван, а други негативан.*

Уочимо сад прве миноре; ти минори су $(n-1)$-вог степена, т. ј. они су парног степена кад је детерминанта непарног степена и обратно. Кад је дакле n непаран број, онда је

$$A_{rs} = A_{sr},$$

а кад је n паран број, онда је

$$A_{rs} = -A_{sr}.$$

У првом случају је у опште $A_{rr} \neq 0$, а у другом случају је $A_{rr} = 0$. Према томе је *адјунгована детерминанта* $|A_{1n}|$ *симетрична, кад је косо симетрична детерминанта* $|a_{1n}|$ *непарног степена*; напротив, *адјунгована детерминанта* $|A_{1n}|$ *је косо симетрична, кад је косо симетрична детерминанта* $|a_{1n}|$ *парног степена.*

70. Келеова теорема. *Косо симетрична детерминанта парног степена је потпун квадрат.*

Прво и прво је јасно да је косо симетрична детерминанта другог степена потпун квадрат:

$$\begin{vmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{vmatrix} = a^2.$$

Узмимо сад неку косо симетричну детерминанту $2n$-тог степена: $\Delta = |a_{1,2n}|$, па означимо са A_{ik} кофактор елемента a_{ik}, а са

$$\text{co - }\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} \\ a_{ki} & a_{kk} \end{vmatrix}$$

кофактор минора

$$\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} \\ a_{ki} & a_{kk} \end{vmatrix}$$

у детерминанти $| a_{1,2n} |$.

Имајући то у виду, биће према једној познатој теореми (чл. 42.)

$$\begin{vmatrix} A_{ii} & A_{ik} \\ A_{ki} & A_{kk} \end{vmatrix} = \Delta \cdot co - \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} \\ a_{ki} & a_{kk} \end{vmatrix}. \qquad (a)$$

Но како је детерминанта Δ косо симетрична, то је

$$a_{ik} = -a_{ki}, \quad a_{ii} = a_{kk} = 0;$$

па како је Δ детерминанта парног степена, то је уједно и

$$A_{ik} = -A_{ki}, \quad A_{ii} = A_{kk} = 0.$$

По обрасцу (a) биће дакле

$$A_{ik}^2 = \Delta \cdot co - \begin{vmatrix} 0 & a_{ik} \\ -a_{ik} & 0 \end{vmatrix},$$

т. ј. биће

$$\Delta = \frac{A_{ik}^2}{co - \begin{vmatrix} 0 & a_{ik} \\ -a_{ik} & 0 \end{vmatrix}}. \qquad (b)$$

Именитељ последњег количника је косо симетрична детерминанта $(2n-2)$-гог степена, а знак његов је (чл. 29.) одређен знаком модула

$$(-1)^{i+k+i+k}$$

т. ј. знак његов је позитиван. Детерминанта Δ биће дакле потпун квадрат, ако је именитељ

$$co\text{-}\begin{vmatrix} 0 & a_{ik} \\ -a_{ik} & 0 \end{vmatrix}$$

потпун квадрат. Дакле, кад је нека косо симетрична детерминанта $(2n-2)$-гог степена потпун квадрат, онда ће према обрасцу (b) и детерминанта Δ степена $2n$-тог бити потпун квадрат. Но ми мало час поменусмо да је косо симетрична детерминанта другог степена потпун квадрат. По обрасцу (b) мораће дакле и косо симетрична детерминанта четвртог степена бити потпун квадрат; уз ову ће међу тим и косо симетрична детерминанта шестог степена бити потпун квадрат и т. д.

На пример, нека је

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}. \qquad (c)$$

Та се детерминанта јавља у прим. 1. чл. 68. По обрасцу (a) је

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{14} \\ A_{41} & A_{44} \end{vmatrix} = \Delta \cdot co\text{-}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

У нашем примеру је дакле

$$\begin{vmatrix} 0 & A_{14} \\ -A_{14} & 0 \end{vmatrix} = \Delta \cdot \begin{vmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{vmatrix},$$

а по томе се види да је

$$\Delta = \frac{A_{14}^2}{d^2} = \begin{vmatrix} -a & 0 & d \\ -b & -d & 0 \\ -c & -e & -f \end{vmatrix}^2 \div d^2 = (af - be + cd)^2.$$

Сличним путем могло би се доказати да је

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d & e \\ -a & 0 & f & g & h & i \\ -b & -f & 0 & j & k & l \\ -c & -g & -j & 0 & m & n \\ -d & -h & -k & -m & 0 & p \\ -e & -i & -l & -n & -p & 0 \end{vmatrix} = [a(jp - kn + lm) - b(gp - hn + im) + c(fp - hl + ik) - d(fn - gl + ij) + e(fm - gk + hj)]^2. \quad (d)$$

71. Пфафијани. У Интегралном Рачуну, у т. зв. *Пфафовој проблеми* јавља се једна важна функција коефицијената, коју је Келе назвао *пфафијаном*. Пфафијани су у тесној вези са косо симетричним детерминантама, они управо из ових и постају, а дефинисаћемо их овако.

Узећемо једну косо симетричну детерминанту парног степена:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1,2n-1} & a_{1,2n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2,2n-1} & a_{2,2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} & \cdots & a_{3,2n-1} & a_{3,2n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & \cdots & a_{4,2n-1} & a_{4,2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2n-1,1} & a_{2n-1,2} & a_{2n-1,3} & a_{2n-1,4} & \cdots & 0 & a_{2n-1,2n} \\ a_{2n,1} & a_{2n,2} & a_{2n,3} & a_{2n,4} & \cdots & a_{2n,2n-1} & 0 \end{vmatrix}. \quad a_{rs} = -a_{sr}$$

Та детерминанта је према мало час поменутој теореми потпун квадрат неког полинома, а један члан тога квадрата је

$$a_{12}^2\, a_{34}^2\, a_{56}^2 \cdots a_{2n-1,2n}^2.$$

Извуцимо сад други корен из оног израза, што представља детерминанту Δ. Како тај корен има две детерминације, то ће се у једној детерминацији јављати члан

$$+\, a_{12}\, a_{34}\, a_{56} \cdots a_{2n-1,2n}, \qquad (p)$$

а у другој члан

$$-\, a_{12}\, a_{34}\, a_{56} \cdots a_{2n-1,2n}.$$

Корен у коме се јавља члан (p), зове се *пфафијан* елемената што се налазе у матрици детерминанте Δ више главне дијагонале њезине. На пример, израз (чл. 70.)

$$af - be + cd$$

је пфафијан елемената a, b, c, d, e, f детерминанте (c).

72. Пфафијан елемената, што се налазе више главне дијагонале детерминанте Δ, бележи се симболички овако:

$$P \equiv \left| \begin{array}{cccccc} a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1,2n-1} & a_{1,2n} \\ & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2,2n-1} & a_{2,2n} \\ & & a_{34} & \cdots & a_{3,2n-1} & a_{3,2n} \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & a_{2n-2,2n-1} & a_{2n-2,2n} \\ & & & & & a_{2n-1,2n} \end{array} \right|. \qquad (a)$$

Према томе је

$$\left| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ & d & e \\ & & f \end{array} \right| \equiv af - be + cd. \qquad (b)$$

Но има и краћих симбола; такви би били ови симболи:

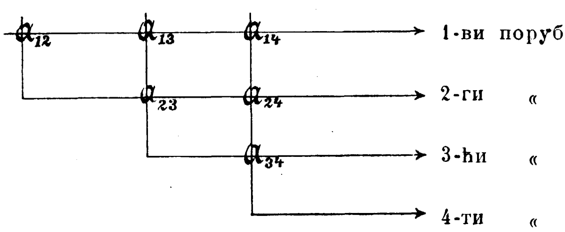
$$P \equiv {}^{|}|\, a_{12}\, a_{34}\, a_{56} \cdots a_{2n-1,2n} \,|$$

или

$$P \equiv ff\,(a_{1,2n}) \quad \text{или} \quad P \equiv {}^{|}|\, a_{1,2n} \,|.$$

Члан $a_{12}\, a_{34}\, a_{56} \cdots a_{2n-1,2n}$ зове се главни члан пфафијана (a), а ред пфафијана одређује се по броју елемената што се јављају у појединим члановима његовим. На пример, пфафијан (a) је n-тог реда, јер у његову члану $a_{12}\, a_{34}\, a_{56} \cdots a_{2n-1,2n}$ има n елемената. Пфафијан (b) је другог реда, а главни члан његов је af.

Пфафијани имају, као и детерминанте, своје врсте и своје колоне. У првој врсти пфафијана (a) има $(2n-1)$ елемената, а у последњој само један елеменат; напротив, у првој колони тог пфафијана има само један елеменат, а у последњој $(2n-1)$ елемената. Но обично се елементи у пфафијану одређују на други начин, а не по местима која они заузимају у појединим врстама и колонама, а ево како то бива. Прва врста зове се први *поруб (frame line)* пфафијана; на том порубу има $(2n-1)$ елемената. Други поруб је разломљена права што спаја



елеменат a_{12} с елементима друге врсте; на трећем порубу налазе се елементи a_{13}, a_{23} и сви елементи треће врсте и т. д. По томе се види 1-во, да на сваком порубу има $(2n - 1)$ елемената и 2-го, да се по два поруба секу на једном јединим елементу.

Није згорег приметити, да је елеменат што се у пфафијану налази на i-том и k-том порубу, елеменат i-те врсте и k-те колоне у матрици косо симетричне детерминанте $\varDelta$ $(i < k)$.

73. Минори пфафијана P. Кад се у матрици неког пфафијана P избришу свиколики елементи из два поруба његова, онда се добива једна нова схема; та схема представља такођер један пфафијан, а тај пфафијан је *минор* елемента, на коме се секу поменута два поруба. На пример, у пфафијану

$$P \equiv \left| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ & d & e \\ & & f \end{array} \right|$$

је f минор елемента a; e је минор елемента b, а d је минор елемента c. Но како је

$$P \equiv af - be + cd,$$

то се види да се пфафијан другог реда развија по овом правилу: *треба најпре први, па онда други, па онда трећи елеменат првог поруба помножити минором који му одговара; алгебарски збир тих производа биће пфафијан; знак првог члана тог збира је позитиван, а у осталим члановима се знаци наизменце мењају.* Могло би се у осталом доказати да се у опште по том правилу развијају пфафијани ма ког реда.

Прим. 1. $\left| \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ & e & f & g \\ & & h & i \\ & & & j \end{array} \right| = a \left| \begin{array}{cc} h & i \\ & j \end{array} \right| - b \left| \begin{array}{cc} f & g \\ & j \end{array} \right| + c \left| \begin{array}{cc} e & g \\ & i \end{array} \right| - d \left| \begin{array}{cc} e & f \\ & h \end{array} \right| = 0.$

Прим. 2. $\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ & f & g & h & i \\ & & j & k & l \\ & & & m & n \\ & & & & p \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} j & k & l \\ & m & n \\ & & p \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} g & h & i \\ & m & n \\ & & p \end{vmatrix} + \cdots$

$$= a\,(jp - kn + lm) - b\,(gp - hn + im) + c\,(fp - hl + ik)$$

$$- d\,(fn - gl + ij) + e\,(fm - gk + hj).$$

Види чл. 70. обр. (d).

Алтернанте.

74. Детерминанте овог облика:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} f_0\,(x_1) & f_1\,(x_1) & \cdots & f_{n-1}\,(x_1) \\ f_0\,(x_2) & f_1\,(x_2) & \cdots & f_{n-1}\,(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_0\,(x_n) & f_1\,(x_n) & \cdots & f_{n-1}\,(x_n) \end{vmatrix}$$

зову се *алтернанте*. У алтернантама су дакле елементи прве врсте функције неке променљиве x_1, а наспрамни елементи i-те врсте су те исте функције променљиве x_i $(i = 2,\ 3, \cdots n)$. Симболички се алтернанте бележе овако:

$$\varDelta = A\,[f_0\,(x_1),\ f_1\,(x_2),\ \cdots\ f_{n-1}\,(x_n)].$$

Јасно је да ће алтернанта A променити свој знак, кад у њој променљиве x_i и x_k узајамно промене своја места. Алтернанта је дакле *functio alternans*.

75. Уочимо сад ову »просту« алтернанту

$$A\,(x_1^0, x_2^1, x_3^2, \cdots x_n^{n-1}) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad (a)$$

и упоредимо је са производом

$$\begin{aligned} P = (x_2 - x_1)\,(x_3 - x_1)\,(x_4 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \\ \times (x_3 - x_2)\,(x_4 - x_2) \cdots (x_n - x_2) \\ \times (x_4 - x_3) \cdots (x_n - x_3) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \times (x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Тај производ зове се *производ разликâ количинâ* $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$. У њему има $\frac{n\,(n-1)}{2}$ различитих разлика, а у свакој разлици је казаљка првог члана већа од казаљке другог члана.

Теорема. *Проста алтернанта* $A\,(x_1^0, x_2^1, x_3^2, \cdots x_{n-1}^n)$ *је равна производу* P *разликâ количинâ* $x_1, x_2, \cdots x_n$:

$$A\,(x_1^0, x_2^1, x_3^2, \cdots x_n^{n-1}) = P. \qquad (b)$$

Кад је $n = 3$, онда је (прим. 4. чл. 20.) *de facto*

$$A\,(x_1^0, x_2^1, x_3^2) = P.$$

То је још Вандермонд доказао. Но кад је n ма какав цео број, онда се теорема формулисана обрасцем (b) овако доказује.

Дата детерминанта (a) је $= 0$ кад је $x_k = x_i$. Према томе се детерминанта (a) без остатка може поделити са $x_k - x_i$: т. ј. детерминанта (a) може се без остатка поделити ма којим чинитељем производа P, а то значи да се детерминанта (a) може без остатка поделити и производом P. Стога је

$$A\,(x_1^0, x_2^1, x_3^2, \cdots x_n^{n-1}) = MP.$$

Остаје нам још да одредимо M. Главни члан детерминанте (a) је $x_2\,x_3^2 \cdots x_n^{n-1}$. Међу тим се у производу MP уз $x_2\,x_3^2 \cdots x_n^{n-1}$ јавља само M као чинитељ. То значи да је $M = +1$, т. ј. да је

$$A\,(x_1^0, x_2^1, x_3^2, \cdots x_n^{n-1}) = P.$$

Напомена. Производ P бележићемо кад и кад са $P\,(x_1, x_2, x_3, \cdots x_n)$.

76. Означимо са $f_p\,(x)$ неку целу рационалну функцију p-тог степена, а са a_p коефицијенат што се јавља уз x^p у функцији $f_p\,(x)$. Доказаћемо да је у том случају

$$\frac{A\,[f_0\,(x_1), f_1\,(x_2), \cdots f_{n-1}\,(x_n)]}{P\,(x_1, x_2, \cdots x_n)} = a_0 a_1 a_2 \cdots a_{n-1}.$$

Да не бисмо писали велике изразе, узећемо да је алтернанта A трећега степена, па нека је

$$f_0\,(x) = a_0,\ \ f_1\,(x) = a_1 x + b_1,\ \ f_2\,(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2.$$

У том случају је

$$\Delta = A[f_0(x_1), f_1(x_2), f_2(x_3)] = \begin{vmatrix} a_0 & a_1x_1+b_1 & a_2x_1^2+b_2x_1+c_2 \\ a_0 & a_1x_2+b_1 & a_2x_2^2+b_2x_2+c_2 \\ a_0 & a_1x_3+b_1 & a_2x_3^2+b_2x_3+c_2 \end{vmatrix}, \quad (c)$$

а треба доказати да је

$$\frac{A\,[f_0(x_1),\, f_1(x_2),\, f_2(x_3)]}{P\,(x_1,\, x_2,\, x_3)} = a_0 a_1 a_2.$$

Помножимо тога ради прву колону детерминанте (c) са $\frac{b_1}{a_0}$ и одузмимо после тога ту колону од друге колоне. Детерминанта $\varDelta$ не ће тада променити своју вредност; биће дакле

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_0 & a_1x_1 & a_2x_1^2 + b_2x_1 + c_2 \\ a_0 & a_1x_2 & a_2x_2^2 + b_2x_2 + c_2 \\ a_0 & a_1x_3 & a_2x_3^2 + b_2x_3 + c_2 \end{vmatrix}.$$

Даље, помножимо прву колону последње детерминанте са $\frac{c_2}{a_0}$, а другу са $\frac{b_2}{a_1}$ и одузмимо после тога обе те колоне од треће колоне. Резултат ће бити ово:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_0 & a_1x_1 & a_2x_1^2 \\ a_0 & a_1x_2 & a_2x_2^2 \\ a_0 & a_1x_3 & a_2x_3^2 \end{vmatrix} = a_0a_1a_2 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix},$$

а по томе се види да је

$$\varDelta = A\,[f_0(x_1),\, f_1(x_2),\, f_2(x_3)] = a_0a_1a_2\, P\,(x_1,\, x_2,\, x_3),$$

q. e. d. Тај резултат је у осталом само специјалан случај једне општије теореме, коју ћемо у идућем члану поменути.

Прим. Нека је

$$f_p(x) = \frac{x\,(x-1)\,(x-2)\cdots(x-p+1)}{p\,!}.$$

У том случају биће

$$\begin{vmatrix} 1 & f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_{n-1}(x_1) \\ 1 & f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_{n-1}(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} = \frac{P(x_1, x_2, x_3, \cdots x_n)}{(n-1)!\,(n-2)!\,\ldots 2!}.$$

77. Теорема. *Свака алтернанта A, чији су елементи функције променљивих $x_1, x_2, \cdots x_n$ може се без остатка поделити производом $P(x_1, x_2, \cdots x_n)$, а количник функција A и P је симетрична функција количина $x_1, x_2, \cdots x_n$.*

Дата алтернанта је на име $= 0$, кад је $x_k = x_i$. Стога се та алтернанта може без остатка поделити разликом $x_k - x_i$, а то значи да се алтернанта A може без остатка поделити и производом тих разлика, т. ј. производом Р. Но како ће и алтернанта A и производ P променити своје знаке, кад се количине x_k и x_i узајамно смене, то се види да се количник $\frac{A}{P}$ у том случају никако не ће променити. Количник фунцијâ A и P биће дакле симетрична функција количинâ $x_1, x_2, \cdots x_n$, а то смо и тврдили.

На пример, нека је

$$A(x_1^0, x_2^1, \cdots x_{n-1}^{n-2} x_n^p) \equiv \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^p \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^p \end{vmatrix},$$

па потражимо количник $\frac{A}{P}$. Тога ради развићемо детерминанту A по елементима последње колоне. Резултат ће бити ово:

$$A\,(x_1^0, x_2^1, \cdots x_{n-1}^{n-2}, x_n^p)$$

$$= x_1^p \frac{\partial A}{\partial x_1^p} + x_2^p \frac{\partial A}{\partial x_2^p} + \cdots + x_i^p \frac{\partial A}{\partial x_i^p} + \cdots + x_n^p \frac{\partial A}{\partial x_n^p}. \qquad (d)$$

Како је

$$\frac{\partial A}{\partial x_i^p} = (-1)^{i+n} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{i-1} & x_{i-1}^2 & \cdots & x_{i-1}^{n-2} \\ 1 & x_{i+1} & x_{i+1}^2 & \cdots & x_{i+1}^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i+n} P\,(x_1, x_2, \cdots x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots x_n),$$

то се види да су кофактори елемената последње колоне дате алтернанте A такођер производи разлика. Ако дакле поделимо са $P\,(x_1, x_2, \cdots x_n)$ и израз на левој и израз на десној страни еквације (d), онда ћемо у изразу на десној страни те еквације добити чланове овог облика:

$$\frac{(-1)^{i+n} x_i^p}{(x_n - x_i)(x_{n-1} - x_i) \cdots (x_{i+1} - x_i)(x_i - x_{i-1}) \cdots (x_i - x_2)(x_i - x_1)}.$$

Стога је

$$\frac{A\,(x_1^0, x_2^1, \cdots x_{n-1}^{n-2}, x_n^p)}{P\,(x_1, x_2, \cdots x_n)}$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{(-1)^{i+n} x_i^p}{(x_n - x_i)(x_{n-1} - x_i) \cdots (x_{i+1} - x_i)(x_i - x_{i-1}) \cdots (x_i - x_1)};$$

или

$$= \frac{x_1^p}{(x_1-x_n)(x_1-x_{n-1})\cdots(x_1-x_2)}$$

$$+ \frac{x_2^p}{(x_2-x_n)(x_2-x_{n-1})\cdots(x_2-x_3)(x_2-x_1)}$$

$$+\cdots\cdots+ \frac{x_{n-1}^p}{(x_{n-1}-x_n)(x_{n-1}-x_{n-2})(x_{n-1}-x_{n-3})\cdots(x_{n-1}-x_1)}$$

$$+ \frac{x_n^p}{(x_n-x_{n-1})(x_n-x_{n-2})\cdots(x_n-x_2)(x_n-x_1)}.$$

По томе обрасцу је н. пр.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 16 \\ 1 & 3 & 81 \\ 1 & 5 & 625 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{16}{(2-5)(2-3)} + \frac{81}{(3-5)(3-2)} + \frac{625}{(5-3)(5-2)} = 69.$$

78. Теорема. *Сваки коефицијенат рационалне целе функције $f(x)$ може се изразити једном симетричном функцијом нулâ функције $f(x)$.*

Нека је на име

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

и нека су $x_1, x_2, \cdots x_n$ нуле функције $f(x)$. У том случају биће

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \equiv (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n).$$

Помножимо сад и десни и леви члан те идентичне еквације са $P(x_1, x_2, \cdots x_n)$. Како је

$$(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)\, P(x_1, x_2, \cdots x_n)$$
$$= P(x_1, x_2, \cdots x_n, x) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{vmatrix},$$

биће и

$$(x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n)\, P(x_1, x_2, \cdots x_n)$$
$$\equiv \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{vmatrix}. \qquad (e)$$

Ако развијемо ту детерминанту по елементима последње врсте, и ако изједначимо коефицијенте што се јављају на десној и левој страни идентичне еквације (e) уз исте степене промењиве x, добићемо ове резултате:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{P(x_1, x_2, \cdots x_n)} \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix},$$

$$a_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{P(x_1, x_2, \cdots x_n)} \begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix},$$

$$\cdots \qquad \cdots \quad \cdots \qquad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

$$a_1 = \frac{-1}{P(x_1, x_2, \cdots x_n)} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix},$$

а тим је поменута теорема доказана.

79. Нека су поново $x_1, x_2, \cdots x_n$ нуле рационалне целе функције $f(x)$ n-тог степена. Тада ће $P(x_1, x_2, \cdots x_n)$ бити производ разлика̂ нула̂ функције $f(x)$. Како је

$$P(x_1, x_2, \cdots x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

биће

$$P^2 = \begin{vmatrix} 1 + 1 + \cdots + 1 & x_1 + x_2 + \cdots + x_n & \cdots & x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \cdots + x_n^{n-1} \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n & x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 & \cdots & x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n \\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 & x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 & \cdots & x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + \cdots + x_n^{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \cdots + x_n^{n-1} & x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n & \cdots & x_1^{2n-2} + x_2^{2n-2} + \cdots + x_n^{2n-2} \end{vmatrix}.$$

Ако означимо са s_i збир i-тих степена нулâ $x_1, x_2, \cdots x_n$:

$$s_i = x_1^{\,i} + x_2^{\,i} + \cdots + x_n^{\,i},$$

онда ћемо квадрат производа P моћи овако изразити:

$$P^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

Још један важан образац добићемо, ако подигнемо на квадрат проширену детерминанту

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix}.$$

Резултат ће бити ово:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} = \Sigma\,(x_i - x_k)^2.$$

ПРИМЕРИ.

1. Доказати да је

$$\begin{vmatrix} 1 & a_2 + a_3 & a_2 a_3 \\ 1 & a_3 + a_1 & a_3 a_1 \\ 1 & a_1 + a_2 & a_1 a_2 \end{vmatrix} = -P(a_1, a_2, a_3).$$

2. Доказати да је

$$\frac{A\,(x_1^0, x_2^1, x_3^2, \dots x_{n-1}^{n-2}, x_n^p)}{P\,(x_1, x_2, \dots x_n)} = \frac{x_n\, A(x_1^0, x_2^1, x_3^2, \dots x_{n-1}^{n-2} x_n^{p-1})}{P\,(x_1, x_2, \dots x_n)}$$

$$+ \frac{A\,(x_1^0, x_2^1, x_3^2, \dots x_{n-2}^{n-3}, x_{n-1}^{p-1})}{P\,(x_1, x_2, \dots x_{n-1})}.$$

3. Доказати помоћу последњег обрасца да је:

$$(a)\qquad \begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ 1 & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix} \div P\,(x, y, z) = x + y + z = \Sigma x.$$

$$(b)\qquad \begin{vmatrix} 1 & x & x^5 \\ 1 & y & y^5 \\ 1 & z & z^5 \end{vmatrix} \div P\,(x, y, z) = \Sigma x^3 + \Sigma x^2 y + xyz.$$

$$(c)\qquad \begin{vmatrix} 1 & x & x^6 \\ 1 & y & y^6 \\ 1 & z & z^6 \end{vmatrix} \div P\,(x, y, z) = \Sigma x^4 + \Sigma x^3 y + \Sigma x^2 y^2 + \Sigma x^2 yz.$$

4. Доказати да количник

$$\frac{A\,(x_1^0, x_2^1, x_3^2, \dots x_{n-1}^{n-2}, x_n^p)}{P\,(x_1, x_2, \dots x_n)}$$

представља *потпуну симетричну функцију* $(p - n + 1)$-вог степена количина $x_1, x_2, \dots x_n$.

5. Подићи на квадрат

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & b & \dots & l \\ a^2 & b^2 & \dots & l^2 \end{vmatrix}$$

и доказати да је

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = \Sigma (a-b)^2 (b-c)^2 (c-a)^2.$$

Континуанте.

80. Нека су нам дате три линеарне еквације

$$3x_1 - x_2 = 18, \qquad (a)$$

$$4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \qquad (b)$$

$$14x_2 + 3x_3 = 0. \qquad (c)$$

По еквацији (a) види се да је

$$x_1\left(3 - \frac{x_2}{x_1}\right) = 18; \qquad \therefore\ x_1 = \frac{18}{3 - \dfrac{x_2}{x_1}}.$$

По еквацији (b) види се да је

$$-\frac{x_2}{x_1} = \frac{4}{2 - \dfrac{x_3}{x_2}}; \qquad \therefore\ x_1 = \frac{18}{3 + \dfrac{4}{2 - \dfrac{x_3}{x_1}}}.$$

Најзад се по еквацији (c) види да је

$$-\frac{x_3}{x_2} = \frac{14}{3}; \qquad \therefore\ x_1 = \frac{18}{3 + \dfrac{4}{2 + \dfrac{14}{3}}}. \qquad (d)$$

Но како се из системе еквација (a), (b), (c) добива да је

$$x_1 = \begin{vmatrix} 18 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 14 & 3 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & 14 & 3 \end{vmatrix},$$

биће јасно да је и

$$\frac{18}{3+\cfrac{4}{2+\cfrac{14}{3}}} = \begin{vmatrix} 18 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 14 & 3 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & 14 & 3 \end{vmatrix},$$

а по томе се види да се верижни разломак (d) може изразити количником двеју детерминаната.

81. Узмимо сад у опште ову систему еквација:

$$\left.\begin{aligned} &a_1x_1 - x_2 = b_1, \\ &b_2x_1 + a_2x_2 = x_3 \\ &\quad b_3x_2 + a_3x_3 = x_4, \\ &\qquad \ldots \quad \ldots \\ &\qquad\qquad b_{n-1}x_{n-2} + a_{n-1}x_{n-1} = x_n, \\ &\qquad\qquad\quad b_nx_{n-1} + a_nx_n = x_{n+1}, \\ &\qquad\qquad\qquad \ldots \quad \ldots \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Из тих еквација добива се узастопце ово:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_1 - \cfrac{x_2}{x_1}}; \; -\frac{x_2}{x_1} = \frac{b_2}{a_2 - \cfrac{x_3}{x_2}}; \; -\frac{x_3}{x_2} = \frac{b_3}{a_3 - \cfrac{x_4}{x_3}}; \ldots\ldots$$

Стога је

$$x_1 = \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdot \, \cdot \, \cdot + \cfrac{b_{n-1}}{a_{n-1} + \cfrac{b_n}{a_n - \cfrac{x_{n+1}}{x_n}}}}}}.$$

Непозната x_1 изражена је као што видимо једним верижним разломком, а n-та приближна вредност $\frac{P_n}{Q_n}$ тог верижног разломка добива се кад се из верижног разломка избрише цео део што се јавља иза a_n; у том случају је

$$\frac{P_n}{Q_n} = \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdot \, \cdot \, \cdot + \cfrac{b_{n-1}}{a_{n-1} + \cfrac{b_n}{a_n}}}}},$$

а тај се разломак често и овако пише:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} \cdots + \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} + \frac{b_n}{a_n}.$$

Видећемо да се и тај верижни разломак може изразити количником двеју детерминаната. У овај мах је на име

$$x_{n+1} = x_{n+2} = x_{n+3} = \cdots = 0.$$

Стога ћемо у овај мах у системи (1) имати n еквација, а те еквације ћемо написати овако:

$$\begin{aligned}
&a_1x_1 - x_2 &&= b_1,\\
&b_2x_1 + a_2x_2 - x_3 &&= 0,\\
&\quad b_3x_2 + a_3x_3 - x_4 &&= 0,\\
&\qquad \cdots\quad\cdots\quad\cdots && \\
&\qquad\qquad b_{n-1}x_{n-2} + a_{n-1}x_{n-1} - x_n &&= 0,\\
&\qquad\qquad\qquad b_nx_{n-1} + a_nx_n &&= 0.
\end{aligned}$$

Ту систему решићемо сад по непознатој x_1 и добићемо овај резултат:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n & a_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n & a_n \end{vmatrix}}. \qquad (2)$$

Но како је у овај мах

$$x_1 = \frac{P_n}{Q_n},$$

то је јасно да се n-та приближна вредност неког верижног разломка заиста може изразити количником двеју детерминаната.

Ако добро загледамо у детерминанте што се јављају у бројитељу и именитељу разломка (2), видећемо да је

$$P_n = b_1 \frac{dQ_n}{da_1}.$$

Стога је

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{b_1 \frac{dQ_n}{da_1}}{Q_n} = b_1 \frac{d(log Q_n)}{da_1}.$$

82. Дефиниција. Детерминанте овог облика:

$$Q_n = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n & a_n \end{vmatrix} \tag{3}$$

зову се *континуанте*. У континуантама нису дакле $= 0$ само елементи главне дијагонале и елементи две најближе суседне мање дијагонале; сем тога су у једној од тих мањих дијагонала елементи $= - 1$. — Ако транспонирамо матрицу континуанте (3), добићемо ово:

$$Q_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & b_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & b_4 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots -1 & & a_n \end{vmatrix},$$

а по томе се види *да се континуанта не мења, кад се у матрици њезиној наспрамни елементи горње и доње мање дијагонале узајамно смене.*

Симболички се континуанта (3) бележи овако:

$$Q_n \equiv \begin{pmatrix} & b_2 & b_3 & \cdots & b_n & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & & a_n \end{pmatrix}.$$

По томе се види, да се приближни разломак $\frac{P_n}{Q_n}$ симболички може овако изразити:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{b_1 \begin{pmatrix} & b_3 & b_4 & \cdots & b_n & \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & & a_n \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} & b_2 & b_3 & \cdots & b_n & \\ a_1 & a_2 & b_3 & \cdots & & a_n \end{pmatrix}}.$$

83. Ако детерминанту, што се јавља у бројитељу разломка (2) развијемо по елементима последње врсте, добићемо ово:

$$P_n = b_1 \begin{pmatrix} & b_3 & b_4 & \cdots & b_n & \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & & a_n \end{pmatrix}$$

$$= a_n b_1 \begin{vmatrix} a_2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_3 & a_3 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_4 & a_4 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$+ b_n b_1 \begin{vmatrix} a_2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_3 & a_3 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_4 & a_4 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-2} & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= a_n b_1 \begin{pmatrix} b_3 \quad b_4 \cdots b_{n-1} \\ a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_{n-1} \end{pmatrix} + b_n b_1 \begin{pmatrix} b_3 \quad b_4 \cdots b_{n-2} \\ a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$= a_n P_{n-1} + b_n P_{n-2}. \tag{4}$$

Исто тако могли бисмо развити по елементима последње врсте и детерминанту Q_n и у том случају добили бисмо ово:

$$Q_n = \begin{pmatrix} b_2 \quad b_3 \cdots b_n \\ a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n \end{pmatrix} = a_n \begin{pmatrix} b_2 \quad b_3 \cdots b_{n-1} \\ a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$+ b_n \begin{pmatrix} b_2 \quad b_3 \cdots b_{n-2} \\ a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$= a_n Q_{n-1} + b_n Q_{n-2}. \tag{5}$$

84. По обрасцима (4) и (5) види се како се добивају сукцесивне приближне вредности верижних разломака. Но сем тога види се по обрасцу (5) и то, да се нека континуанта n-тога реда свакад може изразити збиром континуаната нижих редова. По том обрасцу је н. пр.

$$\begin{pmatrix} & b_2 & & b_3 & & b_4 & \\ a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 \end{pmatrix} = a_4 \begin{pmatrix} & b_2 & & b_3 & \\ a_1 & & a_2 & & a_3 \end{pmatrix} + b_4 \begin{pmatrix} & b_2 & \\ a_1 & & a_2 \end{pmatrix}$$

$$= a_4 a_3 \begin{pmatrix} & b_2 & \\ a_1 & & a_2 \end{pmatrix} + a_4 b_3 (a_1) + b_4 \begin{pmatrix} & b_2 & \\ a_1 & & a_2 \end{pmatrix}$$

$$= a_4 a_3 a_2 a_1 + a_4 a_3 b_2 + a_4 a_1 b_3 + a_2 a_1 b_4 + b_4 b_2.$$

Још један закључак извешћемо помоћу обрасца (5). Ако на име са N_n означимо број чланова неког полинома, што представља неку континуанту n-тог степена, онда ће према обрасцу (5) бити

$$N_n = N_{n-1} + N_{n-2}.$$

По Рачуну Коначних Разлика биће дакле

$$N_n = \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}},$$

а тај је број цео број, кад је n цео број. То се помоћу Њутнова обрасца врло лако може доказати.

85. Уочимо сад ову детерминанту:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & d_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_2 & a_2 & d_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & d_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_n & a_n \end{vmatrix}.$$

Доказаћемо да је $D_n = Q_n$, ако је $c_i d_i = - b_i$. Ако на име развијемо детерминанту D_n по елементима последње врсте, добићемо ово:

$$D_n = a_n D_{n-1} - c_n d_n D_{n-2};$$

стога је

$$D_n = a_n D_{n-1} + b_n D_{n-2}. \tag{6}$$

Међу тим је

$$D_1 = Q_1,\ D_2 = Q_2.$$

По обрасцу (6) биће дакле

$$D_3 = a_3 Q_2 + b_3 Q_1 = Q_3,$$

$$D_4 = a_4 Q_3 + b_4 Q_2 = Q_4,$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

а то смо и тврдили.

Кад је $d_i = 1$, а $c_i = - b_i$, онда је

$$D_n = Q_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ -b_2 & a_2 & 1 \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -b_3 & a_3 \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \cdots & -b_n & a_n \end{vmatrix},$$

т. ј *континуанта се не мења кад се елементима обе мање дијагонале знаци промене.*

86. У чл. 42. доказали смо да је

$$\Delta \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{ir} \partial a_{js}} = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ir}} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{js}} - \frac{\partial \Delta}{\partial a_{jr}} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{is}}. \tag{7}$$

Нека је сад

$$\Delta \equiv Q_n \equiv \begin{pmatrix} b_2 \quad b_3 \cdots b_n \\ a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n \end{pmatrix},$$

а

$$i = r = 1, \; j = s = n.$$

У том случају је

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{ir} \partial a_{js}} = \frac{d^2 \Delta}{d a_1 d a_n} = \begin{pmatrix} b_3 \quad b_4 \cdots b_{n-1} \\ a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{P_{n-1}}{b_1},$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_{ir}} = \frac{d \Delta}{d a_1} = \begin{pmatrix} b_3 \quad b_4 \cdots b_n \\ a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_n \end{pmatrix} = \frac{P_n}{b_1},$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_{js}} = \frac{d \Delta}{d a_n} = \begin{pmatrix} b_2 \quad b_3 \cdots b_{n-1} \\ a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_{n-1} \end{pmatrix} = Q_{n-1},$$

а

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_{jr}} = (-1)^{n-1}, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial a_{is}} = b_2 b_3 \cdots b_n.$$

По обрасцу (7) биће дакле

$$\begin{pmatrix} b_2 \quad b_3 \cdots b_n \\ a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_3 \quad b_4 \cdots b_{n-1} \\ a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_3 \quad b_4 \cdots b_n \\ a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 \quad b_3 \cdots b_{n-1} \\ a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_{n-1} \end{pmatrix} - (-1)^{n-1} b_2 b_3 \cdots b_n,$$

т. ј. биће

$$Q_n P_{n-1} - P_n Q_{n-1} = (-1)^n \, b_1 b_2 b_3 \cdots b_n,$$

а тим обрасцем је формулисана основна теорема у теорији верижних разломака.

87. Изрази овог облика:

$$F \equiv \cfrac{b_1 + \cfrac{b_2 + \cfrac{b_3 + \cdot \cdot \cdot \cfrac{b_{n-1} + \cfrac{b_n}{a_n}}{a_{n-1}}}{a_3}}{a_2}}{a_1}$$

зову се *асцендентни верижни разломци*; они се често и овако бележе:

$$F \equiv \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} \cdots + \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} + \frac{b_n}{a_n}.$$

Означимо i-ту приближну вредност тог разломка са $\frac{p_i}{q_i}$. Како је

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{b_1}{a_1}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{a_2 b_1 + b_2}{a_1 a_2} = \frac{a_2 p_1 + b_2}{a_2 q_1},$$

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{a_3 (a_2 b_1 + b_2) + b_3}{a_1 a_2 a_3} = \frac{a_3 p_2 + b_3}{a_3 q_2}, \cdots$$

биће у опште и

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + b_n}{a_n q_{n-1}}.$$

Именитељ разломка $\frac{p_n}{q_n}$ има дакле ову вредност:

$$q_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}, \qquad (8)$$

а бројитељ p_n је одређен овом системом еквација:

$$
\begin{array}{lr}
p_1 & = b_1, \\
-a_2 p_1 + p_2 & = b_2, \\
\quad -a_3 p_2 + p_3 & = b_3, \\
\qquad \cdots\ \cdots & \cdots \\
\qquad\qquad -a_{n-1} p_{n-2} + p_{n-1} & = b_{n-1}, \\
\qquad\qquad\qquad -a_n p_{n-1} + p_n & = b_n.
\end{array}
$$

Детерминанта те системе линеарних еквација је $= 1$; стога је

$$
p_n = \begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\
-a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_2 \\
0 & -a_3 & 1 & \cdots & 0 & b_3 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n-1} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & b_n
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
b_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
b_2 & a_2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\
b_3 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
b_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -1 \\
b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n
\end{vmatrix}. \tag{9}
$$

По томе се види да се n-та приближна вредност $\frac{p_n}{q_n}$ неког асцендентног верижног разломка такође може изразити количником двеју детерминаната. Те две детерминанте преобразићемо у континуанте и изразићемо после тога дат асцендентан разломак једним десцендентним верижним разломком.

Тога ради помножићемо i-ту врсту ($i=n, n-1, \cdots 3, 2$) детерминаната (8) и (9) са b_{i-1}, а ($i-1$)-ву врсту са b_i; одузећемо за тим елементе ($i-1$)-ве врсте од наспрамних елемената i-те врсте, и најзад ћемо поделити те две преображене детерминанте. Резултат ће бити ово:

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2b_1+b_2 & -b_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2b_3 & a_3b_2+b_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2}b_{n-3}+b_{n-2} & -b_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-2}b_{n-1} & a_{n-1}b_{n-2}+b_{n-1} & -b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1}b_n & a_nb_{n-1}+b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -a_1b_2 & a_2b_1+b_2 & -b_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2b_3 & a_3b_2+b_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2}b_{n-3}+b_{n-2} & -b_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-2}b_{n-1} & a_{n-1}b_{n-2}+b_{n-1} & -b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1}b_n & a_nb_{n-1}+b_n \end{vmatrix}}.$$

Детерминанту у именитељу моћи ћемо према чл. 85. написати у облику једне континуанте Q'_n, па како је сем тога детерминанта у бројитељу

$$= b_1 \frac{dQ'_n}{da_1},$$

то ће бити

$$\frac{p_n}{q_n} =$$

$$\frac{b_1\begin{pmatrix} -a_2b_1b_3\cdots & & -a_{n-2}b_{n-3}b_{n-1} & -a_{n-1}b_{n-2}b_n \\ a_2b_1+b_2 & a_3b_2+b_3\cdots a_{n-2}b_{n-3}+b_{n-2} & a_{n-1}b_{n-2}+b_{n-1} & a_nb_{n-1}+b_n \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -a_1b_2 & -a_2b_1b_3\cdots & & -a_{n-2}b_{n-3}b_{n-1} & -a_{n-1}b_{n-2}b_n \\ a_1 & a_2b_1+b_2 & a_3b_2+b_3\cdots a_{n-2}b_{n-3}+b_{n-2} & a_{n-1}b_{n-2}+b_{n-1} & a_nb_{n-1}+b_n \end{pmatrix}},$$

а по томе се види да је (чл. 81.)

$$F = \frac{p_n}{q_n} =$$

$$\frac{b_1}{a_1} \frac{a_1b_2}{-a_2b_1+b_2} \frac{a_2b_1b_3}{-a_3b_2+b_3}\cdots \frac{a_{n-2}b_{n-3}b_{n-1}}{-a_{n-1}b_{n-2}+b_{n-1}} \frac{a_{n-1}b_{n-2}b_n}{-a_nb_{n-1}+b_n}. \qquad (10)$$

То је онај образац по коме се може асцендентан верижни разломак преобразити у десцендентан верижни разломак.

88. Проблема. *Написати ред*

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

у облику једног десцендентног верижног разломка.

Напишимо дат ред овако:

$$S = \frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{1} + \cdots + \frac{u_n}{1}$$

па преобразимо тад асцендентан верижни разломак по обрасцу (10) у десцендентан разломак. Добићемо овај резултат:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

$$= \frac{u_1}{1} \quad \frac{u_2}{-u_1+u_2} \quad \frac{u_1 u_3}{-u_2+u_3} \cdots \frac{u_{n-3}u_{n-1}}{-u_{n-2}+u_{n-1}} \quad \frac{u_{n-2}u_n}{-u_{n-1}+u_n}.$$

ПРИМЕРИ.

1. Доказати да је

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

2. Доказати ове обрасце:

(a)
$$\begin{pmatrix} b_2 & b_3 \cdots b_n \\ a_1 & a_2 \;.\;. \; a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 & b_3 \cdots b_i \\ a_1 & a_2 \;\cdots\; a_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{i+2} & \cdots b_n \\ a_{i+1} & a_{i+2} \cdots a_n \end{pmatrix}$$

$$+ b_{i+1} \begin{pmatrix} b_2 & \cdots b_{i-1} \\ a_1 & a_2 \cdots a_{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{i+3} & \cdots b_n \\ a_{i+2} & a_{i+3} \cdots a_n \end{pmatrix}.$$

(b)
$$\begin{pmatrix} b_2 & b_3 \cdots b_n \\ a_1 & a_2 \;\cdots\; a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n & b_{n-1} \cdots b_2 \\ a_n & a_{n-1} \;\cdots\; a_1 \end{pmatrix}.$$

(c)
$$\begin{pmatrix} b_2 & b_3 \cdots b_n \\ a_1 & a_2 \;\cdots\; a_n \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} b_3 & b_4 \cdots b_n \\ a_2 & a_3 \;\cdots\; a_n \end{pmatrix}$$

$$+ b_2 \begin{pmatrix} b_4 & b_5 \cdots b_n \\ a_3 & a_4 \;\cdots\; a_n \end{pmatrix}.$$

(d)
$$\frac{b_1}{a_1 +} \frac{b_2}{a_2 +} \frac{b_3}{a_3} \cdots \frac{b_{i-1}}{+a_{i-1}} \frac{b_i}{+ a_i} \frac{b_{i+1}}{+ a_{i+1}} \cdots \frac{b_n}{+ a_n}$$

$$= \frac{b_1}{a_1 +} \frac{b_2}{a_2 +} \frac{b_3}{a_3} \cdots \frac{x b_{i-1}}{+ x a_{i-1}} \frac{x b_i}{+ a_i} \frac{b_{i+1}}{+ a_{i+1}} \cdots \frac{b_n}{+ a_n}.$$

(e) $$m+\frac{b_1}{a_1+}\frac{b_2}{a_2+}\frac{b_3}{a_3}\cdots\frac{b_n}{+a_n}$$

$$=\frac{\begin{pmatrix} & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ m & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}}.$$

(f) $$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\cdots+\frac{1}{u_n}$$

$$=\frac{1}{u_1-}\frac{u_1^2}{u_1+u_2-}\frac{u_2^2}{u_2+u_3}\cdots\frac{u^2_{n-2}}{-u_{n-2}+u_{n-1}-}\frac{u^2_{n-1}}{u_{n-1}+u_n}.$$

3. Изразити редове

$$1+2+3+\cdots+n,$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

у облику десцендентних верижних разломака.

Јакобијани, хесијани, диференцијалне детерминанте.

89. У детерминантама, што се јављају у разним проблемама Диференцијалног и Интегралног Рачуна, јесу врло често елементи диференцијални количници системе функција. Између тих детерминаната су најважније т. зв. *јакобијани*, *хесијани* и *диференцијалне детерминанте*.

90. Јакобијани. Нека су са $x_1, x_2, \cdots x_n$ означене независно промењиве количине, а са $y_1, y_2, \cdots y_n$ њихове функције, па нека је

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots x_n), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots x_n), \\ \cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \cdots x_n). \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Тотални диференцијали тих функција су

$$\left.\begin{aligned} dy_1 &= \frac{\partial y_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n} dx_n, \\ dy_2 &= \frac{\partial y_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial y_2}{\partial x_n} dx_n, \\ &\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ dy_n &= \frac{\partial y_n}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y_n}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial y_n}{\partial x_n} dx_n. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Детерминанта

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

зове се *функционална детерминанта* или *јакобијан* функцијâ $y_1, y_2, \cdots y_n$[1]). Те детерминанте бележе се симболички са

$$\frac{\partial (y_1, y_2, \cdots y_n)}{\partial (x_1, x_2, \cdots x_n)}, \quad \text{или са} \quad J(y_1, y_2, \cdots y_n),$$

или просто са J. Елементи јакобијана J су делимични изводи првога реда датих функција $y_1, y_2, \cdots y_n$.

Решимо сад систему (2) по непознатој dx_i. Ако са A_{ik} означимо кофактор извода $\frac{\partial y_i}{\partial x_k}$ у јакобијану J, добићемо овај резултат:

[1]) Јакоби је први испитивао особине таквих детерминаната и он их је и звао функционалним детерминантама. Силвестер је те детерминанте звао јакобијанима и тако ћемо их и ми звати.

$$J\,dx_i = A_{1i}dy_1 + A_{2i}dy_2 + \cdots + A_{ni}dy_n. \tag{3}$$

91. Теорема. *Ако функције $y_1, y_2, \cdots y_n$ нису независне, онда јакобијан тих функција мора бити $= 0$.*

Нека је на име

$$f\,(y_1, y_2, \cdots y_n) = 0.$$

Ако функцију f диференцирамо делимично по променљивима $x_1, x_2, \cdots x_n$, добићемо ову систему еквација:

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_2} = 0,$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_n} = 0.$$

Та система је линеарна и хомогена по изводима

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y_2}, \quad \cdots \frac{\partial f}{\partial y_n},$$

па како ти изводи нису $= 0$, то мора резултанта системе бити $= 0$, т. ј. мора бити

$$J\,(y_1, y_2, \cdots y_n) \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0.$$

Доцније ћемо доказати да ће и обратно, функције $y_1, y_2, \cdots y_n$ морати зависити једна од друге, кад је њихов јакобијан $= 0$.

92. Кад су функције $y_1, y_2, \cdots y_n$ независне, онда се система (1) може решити по количинама $x_1, x_2, \cdots x_n$. У том случају биће

$$x_1 = \varphi_1 (y_1, y_2, \cdots y_n),$$

$$x_2 = \varphi_2 (y_1, y_2, \cdots y_n),$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots$$

$$x_n = \varphi_n (y_1, y_2, \cdots y_n),$$

т. ј. у том случају моћи ће се $x_1, x_2, \cdots x_n$ изразити неким функцијама $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ независно промењљивих $y_1, y_2, \cdots y_n$. Функције $x_1, x_2, \cdots x_n$ зову се *инверсне функције*. Тоталан диференцијал функције x_i биће

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial x_i}{\partial y_2} dy_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial y_n} dy_n,$$

па како је (чл. 90.)

$$J\, dx_i = A_{1i}\, dy_1 + A_{2i}\, dy_2 + \cdots + A_{ni}\, dy_n,$$

биће и

$$J \frac{\partial x_i}{\partial y_k} = A_{ki}.$$

93. Теорема. *Ако су* $x_1, x_2, \cdots x_n$ *и* $y_1, y_2, \cdots y_n$ *инверсне функције, онда је*

$$\frac{\partial (y_1, y_2, \cdots y_n)}{\partial (x_1, x_2, \cdots x_n)} \cdot \frac{\partial (x_1, x_2, \cdots x_n)}{\partial (y_1, y_2, \cdots y_n)} = 1. \qquad (a)$$

Да не бисмо писали велике изразе, узећемо да је $n = 2$, т. ј. узећемо да је

$$y_1 = f_1(x_1, x_2),\ \ y_2 = f_2(x_1, x_2), \tag{4}$$

а

$$x_1 = \varphi_1(y_1, y_2),\ \ x_2 = \varphi_2(y_1, y_2). \tag{5}$$

У том случају биће

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}, \qquad \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix},$$

па је стога

$$P = \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} \cdot \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}.$$

По еквацијама (4) и (5) види се међу тим да је

$$\frac{\partial y_1}{\partial y_1} = \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial y_2} = \ldots.$$

Према томе је и

$$P = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial y_1} & \frac{\partial y_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial y_1} & \frac{\partial y_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

Но како функције y_1 и y_2 не зависе једна од друге, то је

$$\frac{\partial y_1}{\partial y_2} = 0, \quad \frac{\partial y_2}{\partial y_1} = 0,$$

а то значи да је

$$P = \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} \cdot \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial y_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial y_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

а то смо и тврдили.

94. Теорема. *Ако су* $y_1, y_2, \cdots y_n$ *функције променљивих* $u_1, u_2, \cdots u_n$, *а променљиве* $u_1, u_2, \cdots u_n$ *функције променљивих* $x_1, x_2, \cdots x_n$, *онда је*

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \cdots y_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots x_n)} = \frac{\partial(y_1, y_2, \cdots y_n)}{\partial(u_1, u_2, \cdots u_n)} \cdot \frac{\partial(u_1, u_2, \cdots u_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots x_n)}. \qquad (b)$$

Функције $y_1, y_2, \cdots y_n$ су у овај мах сложене функције. Ако поново узмемо да је $n = 2$, биће

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\partial y_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial y_1}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = \frac{\partial y_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial y_1}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = \frac{\partial y_2}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial y_2}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \frac{\partial y_2}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial y_2}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2},$$

па је стога

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial y_1}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial y_1}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial y_2}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial y_2}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial u_1} & \frac{\partial y_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial u_1} & \frac{\partial y_2}{\partial u_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}, \qquad q. e. d.$$

95. Теорема. *Ако су* $y_1, y_2, \cdots y_n$ *имплицитне функције променљивих* $x_1, x_2, \cdots x_n$, *ако је дакле*

$$\left.\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \cdots x_n, y_1, y_2, \cdots y_n) &= 0, \\ F_2(x_1, x_2, \cdots x_n, y_1, y_2, \cdots y_n) &= 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ F_n(x_1, x_2, \cdots x_n, y_1, y_2, \cdots y_n) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

онда је

$$J = \frac{\partial(y_1, y_2, \cdots y_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots x_n)} = (-1)^n \frac{\dfrac{\partial(F_1, F_2, \cdots F_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots x_n)}}{\dfrac{\partial(F_1, F_2, \cdots F_n)}{\partial(y_1, y_2, \cdots y_n)}}. \tag{c}$$

У овај мах је

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \frac{\partial F_i}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_k} = -\frac{\partial F_i}{\partial x_k}, \tag{7}$$

$$(i, k = 1, 2, \cdots n).$$

Ако узимамо у виду тај образац (7), онда ћемо производ ова два јакобијана:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

моћи написати у овом облику:

$$(-1)^n \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

а по томе се види да је

$$J = \frac{\partial(y_1, y_2, \cdots y_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots x_n)} = (-1)^n \frac{\partial(F_1, F_2, \cdots F_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots x_n)} \div \frac{\partial(F_1, F_2, \cdots F_n)}{\partial(y_1, y_2, \cdots y_n)},$$

а то смо и тврдили.

Напомена. У Диференцијалном Рачуну учи се ово:

(1) Ако су $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ инверсне функције, онда је

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1. \qquad (\alpha)$$

(2) Ако је

$$y = f(u), \text{ а } u = \varphi(x),$$

онда је

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \qquad (\beta)$$

(3) Ако је $f(x,y) = 0$, онда је

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}. \qquad (\gamma)$$

По томе се види да има сличности између образаца (α), (β), (γ) с једне и образаца (a), (b), (c) с друге стране. Та сличност дала је повода Бертрану [1]) да јакобијан дефинише тако, да буде сличности између дефиниције јакобијана системе функција и извода

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

неке функције $y = f(x)$.

96. Бертранова дефиниција јакобијана. Нека је

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots x_n), \quad y_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots x_n), \cdots$$
$$y_n = f_n(x_1, x_2, \cdots x_n)$$

и нека је са

$$\begin{array}{llll} \Delta_1 x_1, & \Delta_1 x_2, & \cdots & \Delta_1 x_n, \\ \Delta_2 x_1, & \Delta_2 x_2, & \cdots & \Delta_2 x_n, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_n x_1, & \Delta_n x_2, & \cdots & \Delta_n x_n \end{array}$$

означена система од n различитих система прираштаја̂ независно промењљивих $x_1, x_2, \cdots x_n$. Тим системама прираштаја̂ независно промењљивих одговараће прираштаји

$$\begin{array}{llll} \Delta_1 y_1, & \Delta_1 y_2, & \cdots & \Delta_1 y_n, \\ \Delta_2 y_1, & \Delta_2 y_2, & \cdots & \Delta_2 y_n, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_n y_1, & \Delta_n y_2, & \cdots & \Delta_n y_n \end{array}$$

функција̂ $y_1, y_2, \cdots y_n$. Бертран је доказао да је

[1]) Види **J. Bertrand.** *Traité de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral,* t. I. p. 63.

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \cdots y_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots x_n)} = \lim_{\Delta_i x_k = 0} \begin{vmatrix} \Delta_1 y_1 & \Delta_1 y_2 & \cdots & \Delta_1 y_n \\ \Delta_2 y_1 & \Delta_2 y_2 & \cdots & \Delta_2 y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_n y_1 & \Delta_n y_2 & \cdots & \Delta_n y_n \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} \Delta_1 x_1 & \Delta_1 x_2 & \cdots & \Delta_1 x_n \\ \Delta_2 x_1 & \Delta_2 x_2 & \cdots & \Delta_2 x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_n x_1 & \Delta_n x_2 & \cdots & \Delta_n x_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} d_1 y_1 & d_1 y_2 & \cdots & d_1 y_n \\ d_2 y_1 & d_2 y_2 & \cdots & d_2 y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_n y_1 & d_n y_2 & \cdots & d_n y_n \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} d_1 x_1 & d_1 x_2 & \cdots & d_1 x_n \\ d_2 x_1 & d_2 x_2 & \cdots & d_2 x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_n x_1 & d_n x_2 & \cdots & d_n x_n \end{vmatrix}.$$

Нека је поново $n = 2$. У том случају биће

$$d_1 y_1 = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} d_1 x_1 + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} d_1 x_2, \quad d_1 y_2 = \frac{\partial y_2}{\partial x_1} d_1 x_1 + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} d_1 x_2,$$

$$d_2 y_1 = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} d_2 x_1 + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} d_2 x_2, \quad d_2 y_2 = \frac{\partial y_2}{\partial x_1} d_2 x_1 + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} d_2 x_2,$$

па се стога производ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d_1 x_1 & d_1 x_2 \\ d_2 x_1 & d_2 x_2 \end{vmatrix}$$

може написати у овом облику:

$$\begin{vmatrix} d_1 y_1 & d_2 y_1 \\ d_1 y_2 & d_2 y_2 \end{vmatrix},$$

а то значи да је

$$\frac{\partial\,(y_1,\,y_2)}{\partial\,(x_1,\,x_2)} = \begin{vmatrix} d_1 y_1 & d_1 y_2 \\ d_2 y_1 & d_2 y_2 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} d_1 x_1 & d_1 x_2 \\ d_2 x_1 & d_2 x_2 \end{vmatrix}.$$

97. Вратимо се сад поново системи имплицитних функција, па узмимо да нам је дата ова система еквација:

$$\begin{aligned} F_1\,(x_1,\,x_2,\,\cdots x_n,\;y_1,\,y_2,\,\cdots\,y_{n+p}) &= 0, \\ F_2\,(x_1,\,x_2,\,\cdots x_n,\;y_1,\,y_2,\,\cdots\,y_{n+p}) &= 0, \\ \cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\;\cdots\qquad &\;\cdots \\ F_{n+p}\,(x_1,\,x_2,\,\cdots x_n,\;y_1,\,y_2,\,\cdots\,y_{n+p}) &= 0. \end{aligned}$$

У тој системи су са $x_1, x_2, \cdots x_n$ означене независно променљиве, а са $y_1, y_2, \cdots y_n, y_{n+1} \cdots y_{n+p}$ потпуно одређене функције тих променљивих. Пита се, како ћемо у том случају наћи јакобијан

$$J = \frac{\partial\,(y_1,\,y_2,\,\cdots\,y_n)}{\partial\,(x_1,\,x_2,\,\cdots\,x_n)}$$

првих n функција те системе.

У овај мах је

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \frac{\partial F_i}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial y_{n+p}}\frac{\partial y_{n+p}}{\partial x_k} = -\frac{\partial F_i}{\partial x_k}. \tag{8}$$

Помножимо сад детерминанту

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_{n+p}} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_{n+p}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_{n+p}}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_{n+p}}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_{n+p}}{\partial y_{n+p}} \end{vmatrix}$$

јакобијаном

$$J \equiv \frac{\partial\,(y_1, y_2, \ldots y_n)}{\partial\,(x_1, x_2, \cdots x_n)}$$

и напишимо пре тога јакобијан J у облику ове детерминанте $(n+p)$-тог степена:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_{n+p}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_{n+p}}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial y_{n+p}}{\partial x_n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

Означимо тај производ са P. Ако узимамо у виду образац (8), онда ћемо тај производ моћи написати у овом облику:

$$P \equiv (-1)^n \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \frac{\partial F_1}{\partial y_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{n+p}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} & \frac{\partial F_2}{\partial y_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_{n+p}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_{n+p}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_{n+p}}{\partial x_n} & \frac{\partial F_{n+p}}{\partial y_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial F_{n+p}}{\partial y_{n+p}} \end{vmatrix}$$

$$\equiv (-1)^n \frac{\partial\,(F_1, F_2, \cdots F_{n+p})}{\partial\,(x_1, x_2, \cdots x_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \cdots y_{n+p})}.$$

Стога је

$$J = \frac{P}{\Delta}.$$

98. Теорема. *Ако су* $y_1, y_2, \cdots y_n$ *функције независно променљивих* $x_1, x_2, \cdots x_n$, *онда се јакобијан* J *функцијâ* $y_1, y_2, \cdots y_n$ *може изразити производом*

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}.$$

У томе производу је са φ_i *означена нека функција променљивих* $y_1, y_2, \cdots y_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots x_n$.

Нека је

$$y_1 = \varphi_1 (x_1, x_2, \cdots x_n),\ y_2 = f_2 (x_1, x_2, \cdots x_n), \cdots$$
$$y_n = f_n (x_1, x_2, \cdots x_n).$$

Из прве еквације те системе израчунаћемо x_1 и смениђемо x_1 вредношћу, коју будемо добили, у свима осталим еквацијама те системе. Тада ћемо добити ову систему:

$$y_2 = \varphi_2 (y_1, x_2, \cdots x_n),\ y_3 = \psi_3 (y_1, x_2, \cdots x_n), \cdots$$
$$y_n = \psi_n (y_1, x_2, \cdots x_n).$$

Сад ћемо из прве еквације те нове системе израчунати x_2 и смениђемо x_2 вредношћу, коју будемо добили, у свима осталим еквацијама те системе и т. д. Дату систему моћи ћемо овако написати:

$$\begin{aligned}
y_1 - \varphi_1 (x_1, x_2, \cdots x_n) &= 0, \\
y_2 - \varphi_2 (y_1, x_2, \cdots x_n) &= 0, \\
y_3 - \varphi_3 (y_1, y_2, x_3, \cdots x_n) &= 0, \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad & \cdots \\
y_n - \varphi_n (y_1, y_2, \cdots y_{n-1}, x_n) &= 0.
\end{aligned}$$

По обрасцу (c) чл. 95. биће дакле

$$J = \frac{\partial (y_1, y_2, \cdots y_n)}{\partial (x_1, x_2, \cdots x_n)} =$$

$$(-1)^n \left| \begin{array}{ccccc|ccccc} -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} & \cdots & -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} & \cdots & -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} & -\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} & \cdots & -\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_n} & -\frac{\partial \varphi_3}{\partial y_1} & -\frac{\partial \varphi_3}{\partial y_2} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} & -\frac{\partial \varphi_n}{\partial y_1} & -\frac{\partial \varphi_n}{\partial y_2} & -\frac{\partial \varphi_n}{\partial y_3} & \cdots & 1 \end{array} \right|,$$

јер је

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = 0, \qquad \text{кад је } k < i,$$

а

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} = 0, \qquad \text{кад је } k > i.$$

Према томе је

$$J = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n},$$

а то смо и тврдили. Свели смо дакле јакобијан на један једини члан, а тај облик је често погодан за израчунавање јакобијана. На пример, нека је

$$x = \varrho \sin \theta \cos \varphi, \; y = \varrho \sin \theta \sin \varphi, \; z = \varrho \cos \theta.$$

Напишимо те три функције x, y, z овако:

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \quad z = \frac{x}{\cos\varphi} \cot\theta, \quad y = x \operatorname{tg}\varphi.$$

Према горњем обрасцу биће

$$\frac{\partial(x, z, y)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \sin\theta\cos\varphi \frac{(-x)}{\cos\varphi \sin^2\theta} \frac{x}{\cos^2\varphi}$$

$$= -\frac{x^2}{\sin\theta\cos^2\varphi} = -\rho^2 \sin\theta.$$

Стога је

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \rho^2 \sin\theta.$$

99. Теорема. *Ако је јакобијан системе функција* $= 0$, *онда те функције нису независне.*

Јер, ако је

$$J = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} = 0,$$

онда ће морати један чинитељ производа

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}$$

бити $= 0$; биће н. пр.

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots n).$$

Но кад је $\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i} = 0$, онда функција φ_i не зависи од променљиве x_i; то значи да је функција y_i, која иначе зависи и од променљиве x_i, у овај мах овог облика:

$$y_i = \varphi_i(y_1, y_2, \cdots y_{i-1}, x_{i+1} \cdots x_n).$$

Но како је

$$y_{i+1} = \varphi_{i+1}(y_1, y_2, \cdots y_i, x_{i+1}, \cdots x_n),$$

то ћемо из последње две еквације моћи елиминирати x_{i+1} и тада ћемо добити ово:

$$y_{i+1} = \psi_{i+1}(y_1, y_2, \cdots y_i, x_{i+2}, \cdots x_n),$$

а по томе се види да y_{i+1} не ће зависити од x_{i+1}. На исти начин могли бисмо доказати, да ни y_{i+2} не ће зависити од x_{i+2} и т. д. Најзад добићемо да је

$$y_n = \psi_n(y_1, y_2, \cdots y_{n-1}),$$

а по томе се види да функције $y_1, y_2, \cdots y_n$ нису независне.

На пример, нека нам је дата диференцијална еквација

$$Mdx + Ndy = 0$$

првога реда (M и N су функције променљивих x и y), па нека су

$$\varphi(x, y) = a \text{ и } \psi(x, y) = b$$

њезини интеграли. Ако диференцирамо функције φ и ψ, добићемо ово:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = 0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = 0,$$

а по томе се види да је

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Јакобијан функција̂ φ и ψ је дакле $= 0$; то значи да функције φ и ψ нису независне, т. ј. *диференцијална еквација првога реда има само један независан општи интеграл.*

100. Трансформација одређених интеграла. Нека нам је дат овај вишегуби интеграл:

$$J = \iint \cdots F(y_1, y_2, \cdots y_n)\, dy_1 dy_2 \cdots dy_n,$$

па претпоставимо да је

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \cdots x_n), \quad (i = 1, 2, \cdots n).$$

У том случају преобразиће се функција $F(y_1, y_2, \cdots y_n)$ у функцију $G(x_1, x_2, \cdots x_n)$, а доказаћемо да ће се дат интеграл преобразити у овај интеграл:

$$J = \iint \cdots G(x_1, x_2, \cdots x_n) \frac{\partial (y_1, y_2, \cdots y_n)}{\partial (x_1, x_2, \cdots x_n)} dx_1\, dx_2 \cdots dx_n.$$

Променљива y_n може се, као што знамо, овако изразити (чл. 98.):

$$y_n = \varphi_n(y_1, y_2, \cdots y_{n-1}, x_n).$$

Ако дакле почнемо интегровати по променљивој y_n, онда ћемо dy_n морати заменити са $\dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} dx_n$, јер се тада $y_1, y_2, \cdots y_{n-1}$ морају сматрати као сталне количине. Стога ће бити

$$J = \iint \cdots F(y_1, y_2, \cdots y_{n-1}, \varphi_n) \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} dy_1 dy_2 \cdots dy_{n-1} dx_n. \qquad (a).$$

Даље, y_{n-1} може се овако изразити:

$$y_{n-1} = \varphi_{n-1}(y_1, y_2, \cdots y_{n-2}, x_{n-1}, x_n).$$

Дакле, ако интеграл (a) почнемо интегровати по промењивој y_{n-1}, онда ћемо dy_{n-1} морати заменити са $\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} dx_{n-1}$, јер се при тој интеграцији $y_1, y_2, \cdots y_{n-2}, x_n$ морају сматрати као сталне количине. Интеграл (a) преобразиће се дакле у овај:

$$J = \int\int \cdots F(y_1, y_2, \cdots y_{n-2}, \varphi_{n-1}, \varphi_n) \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} dy_1\, dy_2 \cdots dy_{n-2} dx_{n-1} dx_n.$$

Ако и даље будемо замењивали поједине промењиве, добићемо најзад да је

$$J = \int\int \cdots F(\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} dx_1\, dx_2 \cdots dx_n,$$

но како је

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} = \frac{\partial (y_1, y_2, \cdots y_n)}{\partial (x_1, x_2, \cdots x_n)},$$

то је уједно и

$$J = \int\int \cdots F(\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n) \frac{\partial (y_1, y_2, \cdots y_n)}{\partial (x_1, x_2, \cdots x_n)} dx_1\, dx_2 \cdots dx_n,$$

а то смо и тврдили.

При тој трансформацији интеграла претпоставља се да свакој системи вредности промењивих $y_1, y_2, \cdots y_n$ униформно одговара једна система вредности промењивих $x_1, x_2, \cdots x_n$.

Јакоби је први (*De determinantibus functionalibus*, Crelle's Journ. f. die reine und angewandte Mathematik, t. 22. или Werke, t. III. p. 436.) нашао образац по коме се промењиве $y_1, y_2, \cdots y_n$ смењују у неком општем интегралу. Но пре њега је трансформацију двојних интеграла извршио Ајлер, а трансформацију тројних интеграла Лагранж.

101. Хесијани. *Јакобијан првих делимичних извода неке функције $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ зове се хесијан функције f.*

Хесијан функције $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ је дакле

$$\mathrm{H}(f) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)}{\partial(x_1, x_2, \cdots x_n)} = \frac{\partial(f_1, f_2, \cdots f_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots x_n)}$$

или

$$\mathrm{H}(f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}.$$

Како је

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i},$$

то се види да је хесијан симетрична детерминанта. Кад изводи $f_1, f_2, \cdots f_n$ нису независни, онда хесијан функције f мора бити $= 0$.

102. Диференцијалне детерминанте. Нека су $y_1, y_2, \cdots y_n$ функције независно променљиве x. Те функције ћемо диференцирати $(n - 1)$ пута узастопце и добићемо ове изводе:

$$\begin{array}{cccc} y_1', & y_2', & \cdots & y_n', \\ y_1'', & y_2'', & \cdots & y_n'', \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)}. \end{array}$$

Детерминанта

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \cdots & \frac{dy_n}{dx} \\ \frac{d^2y_1}{dx^2} & \frac{d^2y_2}{dx^2} & \cdots & \frac{d^2y_n}{dx^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^{(n-1)}y_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{(n-1)}y_2}{dx^{n-1}} & \cdots & \frac{d^{(n-1)}y_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix}$$

или

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

зове се *диференцијална детерминанта* или по *Muir-у вронскијан* функцијâ $y_1, y_2, \cdots y_n$.

103. Теорема. *Ако су $a_1, a_2, \cdots a_n$ сталне количине и ако су функције $y_1, y_2, \cdots y_n$ везане међу собом једном линеарном релацијом овог облика:*

$$a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n = 0,$$

онда је диференцијална детерминанта тих функција $= 0$.

Ако на име дату релацију диференцирамо $(n-1)$ пута узастопце, онда ћемо добити ову систему релација:

$$
\begin{array}{lllll}
a_1y_1' & + a_2y_2' & + \cdots + a_ny_n' & = 0, \\
a_1y_1'' & + a_2y_2'' & + \cdots + a_ny_n'' & = 0, \\
\cdots & \cdots & \cdots \quad \cdots & \cdots \\
a_1y_1^{(n-1)} & + a_2y_2^{(n-1)} & + \cdots + a_ny_n^{(n-1)} & = 0.
\end{array}
$$

С датом релацијом заједно има дакле свега n релација, а детерминанта системе тих релација мора бити $= 0$, т. ј. мора бити

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n) = 0.$$

104. Ако дате функције поново означимо са y_1, y_2, $\cdots$ y_n, а изводе првог, другог, $\cdots$ реда тих функција са

$$
\begin{array}{llll}
y_{11}, & y_{21}, & \cdots & y_{n1}, \\
y_{12}, & y_{22}, & \cdots & y_{n2}, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

онда ћемо диференцијалну детерминанту моћи овако написати:

$$
D(y_1, y_2, \cdots y_n) = \begin{vmatrix}
y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\
y_{11} & y_{21} & \cdots & y_{n1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
y_{1,n-1} & y_{2,n-1} & \cdots & y_{n,n-1}
\end{vmatrix}.
$$

Означимо сад са y неку функцију променљиве x, а са $(y_iy)_k$ k-ти извод производа y_iy функција̂ y_i и y.

Лако се може доказати, да је

$$
\begin{vmatrix}
y_1y & (y_1y)_1 & \cdots & (y_1y)_{n-1} \\
y_2y & (y_2y)_1 & \cdots & (y_2y)_{n-1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
y_ny & (y_ny)_1 & \cdots & (y_ny)_{n-1}
\end{vmatrix} = y^nD(y_1, y_2, \cdots y_n)
$$

или

$$D\,(y_1 y,\ y_2 y,\ \cdots\ y_n y) = y^n D\,(y_1,\ y_2,\ \cdots\ y_n).$$

Детерминанта на левој страни може се на име растворити у збир детерминаната, јер је према познатом једном обрасцу

$$(y_i y)_1 = y_{i1} y + y_i y',\ (y_i y)_2 = y_{i2} y + 2 y_{i1} y' + y_i y'',\ \cdots$$

Једна од тих детерминаната је $= y^n D\,(y_1,\ y_2,\ \cdots\ y_n)$, а све остале су од реда $= 0$.

105. Узмимо сад да је $y = \dfrac{1}{y_1}$. У том случају преобразиће се детерминанта

$$\begin{vmatrix} y_1 y & (y_1 y)_1 & \cdots & (y_1 y)_{n-1} \\ y_2 y & (y_2 y)_1 & \cdots & (y_2 y)_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n y & (y_n y)_1 & \cdots & (y_n y)_{n-1} \end{vmatrix}$$

у ову детерминанту:

$$\begin{vmatrix} \left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)_1 & \left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)_2 \cdots & \left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)_{n-1} \\ \left(\dfrac{y_3}{y_1}\right)_1 & \left(\dfrac{y_3}{y_1}\right)_2 \cdots & \left(\dfrac{y_3}{y_1}\right)_{n-1} \\ \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots \\ \left(\dfrac{y_n}{y_1}\right)_1 & \left(\dfrac{y_n}{y_1}\right)_2 \cdots & \left(\dfrac{y_n}{y_1}\right)_{n-1} \end{vmatrix} = D\left[\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)_1,\ \left(\dfrac{y_3}{y_1}\right)_1,\ \cdots \left(\dfrac{y_n}{y_1}\right)_1\right] = \dfrac{1}{y_1^{\,n}} D\,(y_1,\ y_2,\ \cdots\ y_n). \quad (9)$$

Међу тим је

$$\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)_1 = \dfrac{D\,(y_1,\ y_2)}{y_1^{\,2}},\quad \left(\dfrac{y_3}{y_1}\right)_1 = \dfrac{D\,(y_1,\ y_3)}{y_1^{\,2}},\ \cdots\ \left(\dfrac{y_n}{y_1}\right)_1 = \dfrac{D\,(y_1,\ y_n)}{y_1^{\,2}}.$$

Дакле, ако узмемо да је

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)_1 = \frac{z_2}{y_1^2}, \left(\frac{y_3}{y_1}\right)_1 = \frac{z_3}{y_1^2}, \cdots \left(\frac{y_n}{y_1}\right)_1 = \frac{z_n}{y_1^2}, \qquad (10)$$

т. ј. ако узмемо да је

$$D(y_1, y_2) = z_2, \ D(y_1, y_3) = z_3, \cdots D(y_1, y_n) = z_n,$$

онда ће бити према обрасцу (9)

$$\frac{1}{y_1^{2n-2}} \begin{vmatrix} z_2 & z_{21} & \cdots & z_{2,n-2} \\ z_3 & z_{31} & \cdots & z_{3,n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_n & z_{n1} & \cdots & z_{n,n-2} \end{vmatrix} = \frac{1}{y_1^n} D(y_1, y_2, \cdots y_n)$$

или

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n) = \frac{1}{y_1^{n-2}} D(z_2, z_3, \cdots z_n). \qquad (11)$$

106. Теорема. *Кад је диференцијална детерминанта $D(y_1, y_2, \cdots y_n)$ неке системе функција $= 0$, онда су те функције међу собом везане једном линеарном релацијом овог облика:*

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_n y_n = 0. —$$

Узмимо да y_1 није $= 0$. Како је по претпоставци

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n) = 0,$$

то ће према обрасцу (11) морати бити и

$$D(z_2, z_3, \cdots z_n) = 0.$$

Претпоставимо сад да су функције $z_2, z_3, \cdots z_n$ међу собом везане линеарном релацијом

$$a_2 z_2 + a_3 z_3 + \cdots + a_n z_n = 0, \qquad (12)$$

кад је $D(z_2, z_3, \cdots z_n) = 0$. Ако еквацију (12) поделимо са ${y_1}^2$, добићемо ово:

$$a_2 \frac{z_2}{{y_1}^2} + a_3 \frac{z_3}{{y_1}^2} + \cdots + a_n \frac{z_n}{{y_1}^2} = 0,$$

па је стога (види екв. (10)) и

$$a_2 \left(\frac{y_2}{y_1}\right)_1 + a_3 \left(\frac{y_3}{y_1}\right)_1 + \cdots + a_n \left(\frac{y_n}{y_1}\right)_1 = 0.$$

Ако интегрујемо ову еквацију, добићемо овај резултат:

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_n y_n = 0.$$

Претпоставивши, да је система од $(n-1)$ функција везана међу собом једном линеарном релацијом кад је диференцијална детерминанта те системе $= 0$, доказали смо, да ће и система од n функција бити међу собом везана једном линеарном релацијом, ако је диференцијална детерминанта те системе $= 0$. Поменута претпоставка постоји кад у системи има две функције; према томе је и поменута теорема потпуно доказана.

ПРИМЕРИ.

1. Наћи јакобијан функција̂

$$u = y^2 + 2ayz + z^2,$$

$$v = x^2 + 2bxz + z^2,$$

$$w = x^2 + 2cxy + y^2.$$

2. Дате су функције

$$u = x + 2y + z, \quad v = x - 2y + 3z,$$

$$w = 2xy - xz + 4yz - 2z^2.$$

Доказати (1), да функције u, v, w нису независне и (2), да је $4w = u^2 - v^2$.

3. Наћи јакобијан функција

$$u = x(y + z), \quad v = y(z + x), \quad w = z(x - y)$$

и доказати да функције u, v, w нису независне.

4. Наћи хесијан функције

$$f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy.$$

5. Са $a_1, a_2, \ldots a_n$ означени су стални коефицијенти, а делимични изводи $f_1, f_2, \cdots f_n$ неке функције $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ везани су међу собом овом линеарном хомогеном релацијом:

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_n f_n = 0.$$

Доказати да ће се функција f линеарном субституцијом

$$x_1 = y_1 + a_1 y_n, \quad x_2 = y_2 + a_2 y_n, \quad \cdots \quad x_{n-1} = y_{n-1} + a_{n-1} y_n,$$
$$x_n = a_n y_n$$

преобразити у неку функцију промењивих $y_1, y_2, \cdots y_{n-1}$.

6. Доказати да је

$$\frac{d\,D(y_1, y_2, \cdots y_n)}{dx} = \begin{vmatrix} y_1 & y_{11} & \cdots & y_{1,n-2} & y_{1n} \\ y_2 & y_{21} & \cdots & y_{2,n-2} & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n & y_{n1} & \cdots & y_{n,n-2} & y_{nn} \end{vmatrix}.$$

7. Наћи диференцијалну детерминанту функцијâ

$$y_1 = x^n + a, \quad y_2 = x^n + b, \quad y_3 = x^n + c$$

и доказати да су те функције међу собом везане једном линеарном релацијом.

8. Доказати да су функције $\sin x$, $\cos x$, e^{xi} међу собом везане једном линеарном релацијом.

Напом. $e^{xi} = \cos x + i \sin x$.

9. Нека је

$$y_1 = \frac{x_1}{x_n}, \quad y_2 = \frac{x_2}{x_n}, \quad \cdots y_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{x_n},$$

а

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1.$$

Доказати да је

$$\frac{\partial\,(y_1, y_2, \cdots y_{n-1})}{\partial\,(x_1, x_2, \cdots x_{n-1})} = \frac{1}{x_n^{n+1}}.$$

10. $x_1 = \cos \varphi_1,$

$x_2 = \sin \varphi_1 \cos_2 \varphi_2,$

$x_3 = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3,$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$

$x_{n-1} = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1},$

$x_n = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1} \cos \varphi_n.$

Доказати да је

$$\frac{\partial\,(x_1, x_2, \cdots x_n)}{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n)} = \sin^n\varphi_1 \sin^{n-1}\varphi_2 \sin^{n-2}\varphi_3 \cdots \sin^2\varphi_{n-1} \sin\varphi_n.$$

11. Са u је означена нека хомогена функција променљивих $x_1, x_2, \cdots x_n$, а са m степен хомогености, па нека је

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = u_i\,, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = u_{ik}.$$

Доказати да је

$$\begin{vmatrix} \dfrac{m}{m-1}u & u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_n & u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Напом. Треба имати у виду Ајлерове обрасце

$$mu = u_1x_1 + u_2x_2 + \cdots + u_nx_n,$$

$$(m-1)\,u_i = u_{1i}x_1 + u_{2i}x_2 + \cdots + u_{ni}x_n,$$

$$(i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n).$$

ОДЕЉАК СЕДМИ.

ЛИНЕАРНИ И КВАДРАТНИ ОБЛИЦИ. ЛИНЕАРНЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ.

107. Свака хомогена цела функција зове се *облик* (*quantic*, *forme*). Облици се деле по броју променљивих од којих зависе, на *бинерне*, *тернерне*, $\cdots$; бинеран облик зависи од две променљиве, тернеран од три и т. д. Сем тога деле се облици на облике *линеарне, квадратне* и т. д. Линеарни облици су хомогене функције првога степена, квадратни облици су хомогене функције другога степена и т. д. Према томе је

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

бинеран квадратан облик;

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy \tag{1}$$

је тернеран квадратан облик;

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 \tag{2}$$

је бинеран облик трећега степена и т. д. Општи облик бинерног облика m-тог степена добива се, кад се уз сваки члан у развијеном облику израза

$$(x + y)^m$$

напише по један коефицијенат. Општи облик бинерног облика m-тог степена је дакле ово:

$$f = a_0 x^m + m a_1 x^{m-1} y + \binom{m}{2} a_2 x^{m-2} y^2 + \cdots$$

$$+ \binom{m}{m-1} a_{m-1} x y^{m-1} + a_m y^m.$$

Општи облик тернерног облика m-тог степена добива се кад се уз сваки члан у развијеном облику израза

$$(x + y + z)^m$$

напише по један коефицијенат и т. д. Келе је облике (1) и (2) символички овако бележио:

$$(a, b, c, f, g, h)(x, y, z)^2, \quad (a, b, c, d)(x, y)^3.$$

Често се међу тим због веће симетрије у изразима променљиве бележе једним писменом, уз које се свакад у десно пише по једна казаљка; са истих разлога бележе се и стални коефицијенти једним писменом, уз које се свакад у десно пишу казаљке. На пример,

$$f = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

је линеаран тернеран облик;

$$f = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3$$

је квадратан тернеран облик;

$$f = a_{111} x_1^3 + a_{222} x_2^3 + a_{333} x_3^3 + 3a_{112} x_1^2 x_2 + 3a_{113} x_1^2 x_3$$

$$+ 3a_{122} x_1 x_2^2 + 3a_{223} x_2^2 x_3 + 3a_{133} x_1 x_3^2 + 3a_{233} x_2 x_3^2 + 6a_{123} x_1 x_2 x_3$$

је тернеран облик трећега степена;

$$f = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + a_{44} x_4^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3$$

$$+ 2a_{14} x_1 x_4 + 2a_{23} x_2 x_3 + 2a_{24} x_2 x_4 + 2a_{34} x_3 x_4$$

је квадратан кватернеран облик и т. д. Квадратни облици са n променљивих могу се дакле овако бележити:

$$f = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} x_i x_k, \qquad a_{ik} = a_{ki};$$

облици трећега степена, а са n променљивих, бележе се овако:

$$f = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{l=1}^{l=n} a_{ikl} x_i x_k x_l,$$

$$a_{ikl} = a_{ilk} = a_{kil} = a_{kli} = \cdots$$

108. Линеарна трансформација. Линеарно трансформовати некакав облик

$$f(x_1, x_2, \cdots x_n)$$

значи сменити у том облику променљиве $x_1, x_2, \cdots x_n$ овим изразима:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n, \\ x_2 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_n, \\ \cdots & \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_n &= b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{nn}y_n. \end{aligned}$$

У тим изразима има нових променљивих y исто онолико, колико има променљивих x у датом облику f, т. ј. на број их има n.

Детерминанта

$$M = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

зове се *модуо трансформације* или *модуо субституције*, а функција

$$F\,(y_1,\ y_2,\ \cdots\ y_n)$$

у коју ће се поменутом трансформацијом преобразити облик f зове се *трансформован облик*. Јасно је да модуо трансформације не може бити $= 0$, јер кад би било $M = 0$, онда количине $x_1,\ x_2,\ \cdots\ x_n$ не би биле независне. — За линеарну трансформацију каже се да је *унимодуларна*, кад јој је модуо $= 1$.

Пример: Треба трансформовати линеарно облик

$$f = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2. —$$

У овај мах треба узети да је

$$x_1 = b_{11} y_1 + b_{12} y_2,\ \ x_2 = b_{21} y_1 + b_{22} y_2.$$

Биће дакле трансформован облик ово:

$$F = a_0\,(b_{11}y_1 + b_{12}y_2)^2 + 2a_1\,(b_{11}y_1 + b_{12}y_2)\,(b_{21}y_1 + b_{22}y_2) + a_2\,(b_{21}y_1 + b_{22}y_2)^2,$$

а по томе се види да се F може овако написати:

$$F = A_0 y_1^2 + 2A_1 y_1 y_2 + A_2 y_2^2;$$

у том изразу је

$$A_0 = a_0 b_{11}^2 + 2a_1 b_{11} b_{21} + a_2 b_{21}^2,\ \ A_2 = a_0 b_{12}^2 + 2a_1 b_{12} b_{22} + a_2 b_{22}^2,$$

$$A_1 = a_0 b_{11} b_{12} + a_1\,(b_{11} b_{22} + b_{12} b_{21}) + a_2 b_{21} b_{22}.$$

109. Ортогонална трансформација. Претпоставимо да смо функцију $f\,(x_1,\ x_2,\ \cdots\ x_n)$ преобразили у функцију $F\,(y_1,\ y_2,\ \cdots\ y_n)$ линеарном трансформацијом

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n, \\ x_2 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_n, \\ &\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_n &= b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{nn}y_n. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Ако је

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2,$$

онда се каже да је линеарна трансформација (3) *ортогонална*. Ортогонална трансформација је најважнија линеарна трансформација.

109 а. Коефицијенти ортогоналне трансформације имају ове особине:

(а). Како је

$$\begin{aligned} & x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \\ &= (b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n)^2 + (b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_n)^2 \\ &+ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots + (b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{nn}y_n)^2 \\ &= (b_{11}^2 + b_{21}^2 + \cdots + b_{n1}^2)y_1^2 + (b_{12}^2 + b_{22}^2 + \cdots + b_{n2}^2)y_2^2 \\ &+ \cdots + 2y_1y_2(b_{11}b_{12} + b_{21}b_{22} + \cdots + b_{n1}b_{n2}) + \cdots, \end{aligned}$$

то ће бити и

$$\left.\begin{aligned} b_{1i}^2 + b_{2i}^2 + \cdots + b_{ni}^2 &= 1, \\ b_{1i}b_{1k} + b_{2i}b_{2k} + \cdots + b_{ni}b_{nk} &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad \text{I.}$$

$$(i, k = 1, 2, \cdots n).$$

(*b*). Помножимо прву еквацију системе (3) са b_{11}, другу са b_{21}, $\cdots$ последњу са b_{n1} и саберимо после тога те еквације. Даље, помножимо прву еквацију системе (3) са b_{12}, другу са b_{22}, $\cdots$ последњу b_{n2} и саберимо после тога те еквације и т. д. Због релацијâ I. моћи ћемо те збирове овако написати:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = b_{11}x_1 + b_{21}x_2 + \cdots + b_{n1}x_n, \\ y_2 = b_{12}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{n2}x_n, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_n = b_{1n}x_1 + b_{2n}x_2 + \cdots + b_{nn}x_n. \end{array}\right\} \qquad (3^*)$$

Модуо те трансформације је

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

т. ј. кад је трансформација (3) ортогонална онда су модули трансформацијâ (3) и (3^*) једнаки, али се модуо трансформације (3^*) добива тек кад се матрица детерминанте, што представља модуо трансформације (3), транспонира.

(c). Квадрат модула ортогоналне трансформације је $= 1$. — Нека је на име

$$M^2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}^2 \equiv | D_{1n} |.$$

Детерминанта $| D_{1n} |$ је симетрична (чл. 56.), а по особини (a) коефицијената је

$$D_{ii} = 1, \; D_{ik} = 0.$$

Стога је $M^2 = 1$, а то смо и тврдили.

(*d*). Ако је B_{ik} кофактор елемента b_{ik} у детерминанти $|b_{1n}|$, онда је

$$B_{ik} = b_{ik} \mid b_{1n} \mid. —$$

По особини (*a*) је

$$\begin{aligned} b_{11}b_{1k} + \cdots + b_{n1}b_{nk} &= 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad & \cdots \quad \cdots \\ b_{1k}b_{1k} + \cdots + b_{nk}b_{nk} &= 1, \\ \cdots \quad \cdots \quad & \cdots \quad \cdots \\ b_{1n}b_{1k} + \cdots + b_{nn}b_{nk} &= 0. \end{aligned}$$

Помножимо прву између ових релација са B_{i1}, другу са $B_{i2}, \cdots$ последњу са B_{in} и саберимо после тога те релације. Збир ће бити ово:

$$b_{1k}(b_{11}B_{i1} + \cdots + b_{1n}B_{in}) + \cdots + b_{ik}(b_{i1}B_{i1} + \cdots + b_{in}B_{in})$$
$$+ \cdots + b_{nk}(b_{n1}B_{i1} + \cdots + b_{nn}B_{in}) = B_{ik}.$$

Но како су сви коефицијенти $= 0$ сем коефицијента што се јавља уз b_{ik}, то ће бити

$$b_{ik}(b_{i1}B_{i1} + \cdots + b_{in}B_{in}) = B_{ik},$$

т. j. биће

$$B_{ik} = b_{ik} \mid b_{1n} \mid.$$

(*e*). Како је

$$b_{i1} \mid b_{1n} \mid = B_{i1}, \quad b_{i2} \mid b_{1n} \mid = B_{i2}, \cdots \quad b_{in} \mid b_{1n} \mid = B_{in},$$

биће и

$$(b_{i1}b_{k1} + b_{i2}b_{k2} + \cdots + b_{in}b_{kn}) \mid b_{1n} \mid = B_{i1}b_{k1} + B_{i2}b_{k2} + \cdots + B_{in}b_{kn}.$$

Израз на десној страни је $|b_{1n}|$, кад је $i = k$; тај израз је међу тим $= 0$, кад је $i \neq k$. Стога је

$$\left.\begin{aligned} b_{i1}^2 + b_{i2}^2 + \cdots + b_{in}^2 &= 1, \\ b_{i1}b_{k1} + b_{i2}b_{k2} + \cdots + b_{in}b_{kn} &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad \text{II.}$$

$$(i, k = 1, 2, \cdots n).$$

$$(f) \quad \begin{vmatrix} b_{r+1, r+1} & b_{r+1, r+2} & \cdots & b_{r+1, n} \\ b_{r+2, r+1} & b_{r+2, r+2} & \cdots & b_{r+2, n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n, r+1} & b_{n, r+2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = |\, b_{1n} \,| \times \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}.$$

Тај образац доказаћемо овако. Према једној познатој теореми је (чл. 41.)

$$\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rr} \end{vmatrix} = |\, b_{1n} \,|^{r-1} \times \begin{vmatrix} b_{r+1, r+1} & b_{r+1, r+2} & \cdots & b_{r+1, n} \\ b_{r+2, r+1} & b_{r+2, r+2} & \cdots & b_{r+2, n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n, r+1} & b_{n, r+2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Но како је по особини (d)

$$\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rr} \end{vmatrix} = |\, b_{1n} \,|^{r} \times \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix},$$

биће и т. д.

Пример. Дате су две ортогоналне координатне системе (xyz) и (XYZ). Обе системе имају исти почетак, па нека је линеарна трансформација ово:

$$\left.\begin{aligned} x &= aX + bY + cZ, \\ y &= a'X + b'Y + c'Z, \\ z &= a''X + b''Y + c''Z. \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Ако су сад x, y, z координате неке тачке у првој системи, а X, Y, Z координате те исте тачке у другој системи и ако је са ϱ означена раздаљина те тачке од почетка, онда је

$$x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \; (= \varrho^2).$$

По томе се види да је линеарна трансформација (a) ортогонална. Стога је

$$\begin{aligned} X &= ax + a'y + a''z, \\ Y &= bx + b'y + b''z, \\ Z &= cx + c'y + c''z. \end{aligned}$$

Даље је

$$\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1, & ab + a'b' + a''b'' &= 0, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1, & ac + a'c' + a''c'' &= 0, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1, & bc + b'c' + b''c'' &= 0, \end{aligned}$$

а

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}^2 = 1.$$

С друге стране је опет

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad aa' + bb' + cc' = 0,$$

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \quad aa'' + bb'' + cc'' = 0,$$

$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1, \quad a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0.$$

109 *b*. У системи I, као и у системи II, има свега

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

погодбених релација, а у ортогоналној трансформацији (**3**) има међу тим n^2 коефицијената. *Келе* је помоћу детерминаната доказао, *да се коефицијенти ортогоналне трансформације могу изразити рационалним функцијама неких потпуно неодређених коефицијената*

$$\begin{array}{cccc} c_{12}, & c_{13}, & \cdots & c_{1n}, \\ & c_{23}, & \cdots & c_{2n}, \\ & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & c_{n-1,n}. \end{array}$$

Тих коефицијената има свега на број

$$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}. —$$

Доказ. Нека је

$$c_{11} = c_{22} = \cdots = 1, \quad c_{ik} + c_{ki} = 0,$$

па нека је сем тога

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + \cdots + c_{1n}z_n, \\ x_2 = c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + \cdots + c_{2n}z_n, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_n = c_{n1}z_1 + c_{n2}z_2 + \cdots + c_{nn}z_n, \end{array}\right\} \qquad (a)$$

а

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = c_{11}z_1 + c_{21}z_2 + \cdots + c_{n1}z_n, \\ y_2 = c_{12}z_1 + c_{22}z_2 + \cdots + c_{n2}z_n, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_n = c_{1n}z_1 + c_{2n}z_2 + \cdots + c_{nn}z_n. \end{array}\right\} \qquad (b)$$

Саберимо сад наспрамне еквације система (a) и (b). Како је по претпоставци

$$c_{11} = c_{22} = \cdots = 1, \text{ а } c_{ik} = -c_{ki},$$

то ће се добити ово:

$$x_1 + y_1 = 2z_1, \; x_2 + y_2 = 2z_2, \cdots x_n + y_n = 2z_n.$$

Означимо даље модуо трансформације (a) са C, а кофактор елемента c_{ik} у детерминанти $C = | c_{1n} |$ са C_{ik} и решимо систему (a) по непознатима $z_1, z_2, \cdots z_n$. Резултат ће бити ово:

$$\begin{array}{l} Cz_1 = C_{11}x_1 + C_{21}x_2 + \cdots + C_{n1}x_n, \\ Cz_2 = C_{12}x_1 + C_{22}x_2 + \cdots + C_{n2}x_n, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ Cz_n = C_{1n}x_1 + C_{2n}x_2 + \cdots + C_{nn}x_n. \end{array}$$

Но како је

$$z_i = \frac{x_i + y_i}{2}, \qquad (c)$$

биће и

$$\begin{array}{l}
Cy_1 = (2C_{11}-C)x_1 + 2C_{21}x_2 + \cdots + 2C_{n1}x_n, \\
Cy_2 = 2C_{12}x_1 + (2C_{22}-C)x_2 + \cdots + 2C_{n2}x_n, \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
Cy_n = 2C_{1n}x_1 + 2C_{2n}x_2 + \cdots + (2C_{nn}-C)x_n.
\end{array}$$

Ако с друге стране решимо систему (b), онда ћемо због релације (c) добити ово:

$$\begin{array}{l}
Cx_1 = (2C_{11}-C)y_1 + 2C_{12}y_2 + \cdots + 2C_{1n}y_n, \\
Cx_2 = 2C_{21}y_1 + (2C_{22}-C)y_2 + \cdots + 2C_{2n}y_n, \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
Cx_n = 2C_{n1}y_1 + 2C_{n2}y_2 + \cdots + (2C_{nn}-C)y_n.
\end{array}$$

Узмимо сад да је

$$\frac{2C_{ii}-C}{C} = b_{ii}, \qquad \frac{2C_{ik}}{C} = b_{ik}. \qquad \text{III.}$$

У том случају биће

$$\left.\begin{array}{l}
y_1 = b_{11}x_1 + b_{21}x_2 + \cdots + b_{n1}x_n, \\
y_2 = b_{12}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{n2}x_n, \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
y_n = b_{1n}x_1 + b_{2n}x_2 + \cdots + b_{nn}x_n,
\end{array}\right\} \quad (d)$$

а

$$\left.\begin{array}{l}
x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n, \\
x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_n, \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{nn}y_n.
\end{array}\right\} \quad (e)$$

По томе се види да су линеарне трансформације (*d*) и (*e*) ортогоналне, а по обрасцу III. види се 1-во, да коефицијенти те ортогоналне трансформације *de facto* зависе од $\frac{n(n-1)}{2}$ неодређених коефицијената

$$c_{12},\ c_{13},\ \cdots\ c_{1n},\ \ c_{23},\ \cdots\ c_{2n},\ \cdots\ c_{n-1,n}$$

и 2-го, да су коефицијенти b_{11}, b_{12}, $\cdots$ b_{nn} те ортогоналне трансформације рационалне функције неодређених коефицијената c_{12}, c_{13}, $\cdots$ $c_{n-1,n}$.

На пример, ако смо ради да добијемо коефицијенте бинерне ортогоналне трансформације‘ онда ћемо узети да је

$$C = \begin{vmatrix} 1 & \mu \\ -\mu & 1 \end{vmatrix} = 1 + \mu^2,$$

т. ј. узећемо да је $c_{12} = \mu$, а $c_{21} = -\mu$.

Тада је

$$C_{12} = \mu,\ C_{21} = -\mu,\ C_{11} = C_{22} = 1,$$

па је стога

$$b_{11} = \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2},\ b_{12} = \frac{2\mu}{1+\mu^2},\ b_{21} = \frac{-2\mu}{1+\mu^2},\ b_{22} = \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2},$$

т. ј. бинерна ортогонална трансформација је ова трансформација:

$$x_1 = \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}\,y_1 + \frac{2\mu}{1+\mu^2}\,y_2,$$

$$x_2 = \frac{-2\mu}{1+\mu^2}\,y_1 + \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}\,y_2.$$

Напомена. Детерминанта C је коса детерминанта.

110. Система линеарних облика. Узмимо ову систему линеарних облика:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ f_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ &\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ f_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Детерминанта те системе (т. ј. јакобијан те системе) је

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Кад је $\Delta \neq 0$, онда облици $f_1, f_2, \cdots f_n$ *не зависе* један од другог; а кад је $\Delta = 0$, онда облици $f_1, f_2, \cdots f_n$ *зависе* један од другог, јер је тада (чл. 46.)

$$A_{1i}f_1 + A_{2i}f_2 + \cdots + A_{ni}f_n \equiv 0,$$

$$(i = 1,\ 2, \cdots n).$$

Но кад је $\Delta = 0$, онда је

$$A_{11} : A_{21} : \cdots : A_{n1} = A_{12} : A_{22} : \cdots : A_{n2}$$

$$= \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots = A_{1n} : A_{2n} : \cdots : A_{nn},$$

а по томе се види *да су облици* $f_1, f_2, \cdots f_n$ *везани међу собом једном јединoм идентичном релацијом кад је* $\Delta = 0$. У том случају има у датој системи само $(n-1)$ независних облика.

Ћутке смо претпостављали да је бар један од првих минора детерминанте $\neq 0$. Но дешава се да су и сви први минори $= 0$. Ако тада бар један од других минора није $= 0$, онда би се могло доказати (чл. 46.), да у датој системи има само $(n - 2)$ независних облика и т. д.

Вратимо се сад системи (4) и преобразимо сваки облик у тој системи линеарном трансформацијом

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n, \\ x_2 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_n, \\ &\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_n &= b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{nn}y_n. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Тада ће се f_i преобразити у F_i, а биће

$$\begin{aligned} F_1 &= a_{11}(b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n) + a_{12}(b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_n) \\ &+ \cdots \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots + a_{1n}(b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{nn}y_n) \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1})y_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1n}b_{n2})y_2 \\ &+ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots + (a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \cdots + a_{1n}b_{nn})y_n. \end{aligned}$$

Дакле, ако је

$$\begin{aligned} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} &= c_{11}, \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1n}b_{n2} &= c_{12}, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad &\cdots \\ a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \cdots + a_{1n}b_{nn} &= c_{1n}, \end{aligned}$$

онда је

$$F_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n.$$

Исто тако бисмо нашли и да је

$$F_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n,$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$F_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n.$$

Означимо сад са M модуо трансформације. Како је

$$a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} = c_{ik},$$

биће и

$$D = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} = M\Delta,$$

т. ј. *детерминанта D системе трансформованих линеарних облика добива се кад се модуо трансформације помножи детерминантом системе датих облика.*

Та теорема је само специјалан случај једне много општије теореме, коју ћемо касније поменути.

Напомена 1. Кад је $\Delta = 0$, онда је и $D = 0$, т. ј. кад дати облици нису независни, онда нису независни ни трансформовани облици и обратно, кад је $\Delta \neq 0$, онда је и $D \neq 0$, т. ј. кад су дати облици независни, онда су и трансформовани облици независни.

Напомена 2. Кад је трансформација (5) унимодуларна, онда је $D = \Delta$, т. ј. детерминанта системе датих облика не мења се унимодуларном трансформацијом.

111. Дискриминанте. Нека нам је дат некакав облик $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$. Ако диференцирамо f делимично по промењивима $x_1, x_2, \cdots x_n$, добићемо изводе

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ \cdot \ \cdot \ \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Резултанта системе еквација

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

зове се *дискриминанта* дате функције f.

На пример, нека нам је дат овај тернеран квадратан облик:

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3.$$

У том случају је

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 2\,(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3), \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= 2\,(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3), \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} &= 2\,(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3). \end{aligned}\right\} \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

Стога је дискриминанта облика f ово:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Или, нека је

$$f = a_{30}x_1^3 + 3a_{21}x_1^2x_2 + 3a_{12}x_1x_2^2 + a_{03}x_2^3.$$

У том случају је

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3\,(a_{30}x_1^2 + 2a_{21}x_1x_2 + a_{12}x_2^2),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 3\,(a_{21}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{03}x_2^2);$$

резултанта системе еквација

$$a_{30}x_1^2 + 2a_{21}x_1x_2 + a_{12}x_2^2 = 0,$$

$$a_{21}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{03}x_2^2 = 0$$

је (чл. 53. екв. (d)) ово:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{30} & 2a_{21} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{30} & 2a_{21} & a_{12} \\ a_{21} & 2a_{12} & a_{03} & 0 \\ 0 & a_{21} & 2a_{12} & a_{03} \end{vmatrix}.$$

Детерминанта $\varDelta$ је дакле дискриминанта дате функције f.

Или, нека је

$$f = a_0x_1^4 + 4a_1x_1^3x_2 + 6a_2x_1^2x_2^2 + 4a_3x_1x_2^3 + a_4x_2^4.$$

У том случају је

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4\,(a_0x_1^3 + 3a_1x_1^2x_2 + 3a_2x_1x_2^2 + a_3x_2^3),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 4\,(a_1x_1^3 + 3a_2x_1^2x_2 + 3a_3x_1x_2^2 + a_4x_2^3).$$

Поделимо обе те еквације са x_2^3 и узмимо да је $\dfrac{x_1}{x_2} = x$. Дискриминанта датог облика биће тада резултанта ових двеју еквација:

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0,$$

$$a_1x^3 + 3a_2x^2 + 3a_3x + a_4 = 0.$$

Дискриминанта је дакле (чл. 53. екв. (e)) ово:

$$\Delta = i^3 - 27j^2,$$

где је

$$i = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2,$$

$$j = a_0a_3^2 + a_4a_1^2 + a_2^3 - a_0a_2a_4 - 2a_1a_2a_3.$$

Напомена. Кад је дата функција нехомогена, онда се дискриминанта те функције тражи овако: најпре треба дату функцију преобразити у хомогену функцију; дискриминанта те хомогене функције биће уједно и дискриминанта дате нехомогене функције.

На пример, нека нам је дата ова нехомогена функција:

$$a_0 + 2a_1x + a_2x^2.$$

Место те нехомогене функције написаћемо ову хомогену:

$$a_0y^2 + 2a_1xy + a_2x^2,$$

која ће се у дату функцију преобразити чим се узме да је $y = 1$. Дискриминанта те хомогене функције је резултанта ове системе:

$$a_1y + a_2x = 0, \quad a_0y + a_1x = 0,$$

т. ј. дискриминанта дате функције је ова функција коефицијената:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1^2 - a_0a_2.$$

Квадратни облици.

112. Општи израз квадратног облика с n променљивих је

$$f = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} x_i x_k, \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$

т. ј. општи израз квадратног облика је

$$\begin{aligned} f = a_{11}x_1^2 &+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ &+ \quad a_{22}x_2^2 \quad + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ &\qquad\qquad + \quad a_{33}x_3^2 \quad + \cdots + 2a_{3n}x_3x_n \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + \cdots + \quad \cdots \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \quad a_{nn}x_n^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Ако са f_i означимо делимичан полуизвод функције f по променљивој x_i, биће

$$f_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n,$$

$$f_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n,$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$f_n = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_n} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n.$$

Стога је дискриминанта облика f ово:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Како је $a_{ik} = a_{ki}$, то је детерминанта Δ симетрична детерминанта. — Обратно, свака симетрична детерминанта може се сматрати као дискриминанта неког квадратног облика.

113. Теорема. *Квадратан облик с n променљивих може се растворити у збир квадрата линеарних независних облика; тих облика не може у збиру бити више од n.*

Гаусов метод. Узмимо најпре да се у датом облику (1) јавља бар један квадрат; н. пр. нека је $a_{11} \neq 0$. Означимо даље са P некакав линеаран, а са Q некакав квадратан облик, па претпоставимо да оба та облика у опште зависе од променљивих $x_2, x_3, \cdots x_n$. У том случају моћи ћемо f овако написати:

$$f = a_{11}x_1^2 + 2Px_1 + Q;$$

стога је

$$f = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + P)^2 + Q - \frac{P^2}{a_{11}}.$$

Дакле, ако је

$$a_{11}x_1 + P = P_1, \quad \text{а} \quad \frac{1}{a_{11}} = p_1,$$

онда ће бити и

$$f = p_1P_1^2 + Q - \frac{P^2}{a_{11}}.$$

У изразу на десној страни већ се, као што видимо, јавља један квадрат неког линеарног облика. Но сем тог квадрата јавља се у њему још и један квадратан облик $Q - \frac{P^2}{a_{11}}$, у коме нема више од $(n - 1)$ променљивих. Ако претпоставимо да се у том квадратном облику јавља квадрат променљиве x_2 и ако коефициіенат уз x_2^2 означимо са a'_{22}, онда ћемо по оном, што мало час рекосмо, облик $Q - \frac{P^2}{a_{11}}$ моћи овако написати:

$$Q - \frac{P^2}{a_{11}} = \frac{1}{a'_{22}}(a'_{22}x_2 + P')^2 + Q' - \frac{P'^2}{a'_{22}}.$$

Дакле, ако је

$$a'_{22}x_2 + P' = P_2, \quad \text{а} \quad \frac{1}{a'_{22}} = p_2,$$

онда ће бити и

$$f = p_1P_1^2 + p_2P_2^2 + Q' - \frac{P'^2}{a'_{22}}.$$

Израз $Q' - \frac{P'^2}{a'_{22}}$ представља један квадратан облик у коме нема више од $(n - 2)$ променљивих. Ако претпоставимо да се у том квадратном облику јавља квадрат променљиве x_3, онда ћемо, као и мало час, моћи доказати да се тај облик може растворити на један збир; један члан тога збира биће у опште квадрат неког линеарног облика, а други члан биће некакав квадратан облик у коме нема више од $(n-3)$ променљивих и т. д. Растварајући квадратне облике, што се буду јављали, и даље по истом методу, добићемо најзад да је

$$f = p_1P_1^2 + p_2P_2^2 + \cdots + p_iP_i^2.$$

У томе изразу, као што је јасно, не може i бити веће од n, а са $P_1, P_2, \cdots P_i$ су означени изрази овог облика:

$$\begin{aligned}
P_1 &= a_{11}x_1 + \cdots \\
P_2 &= 0\cdot x_1 + a'_{22}x_2 + \cdots \\
P_3 &= 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + a'_{33}x_3 + \cdots \\
&\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
P_i &= 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + \cdots + 0\cdot x_{i-1} + a'_{ii}x_i + \cdots
\end{aligned}$$

У детерминанти, чији би елементи били коефицијенти промењљивих $x_1, x_2, \cdots x_n$, биће сви елементи на једној страни главне дијагонале $= 0$; стога се детерминанта системе тих облика своди само на главни члан

$$a_{11}a'_{22}a'_{33} \cdots a'_{ii}.$$

Но како ниједан од коефицијената $a_{11}, a'_{22}, a'_{33}, \cdots a'_{ii}$ није $= 0$, то ни поменута детерминанта није $= 0$, а то значи да су облици $P_1, P_2, \cdots P_i$ независни. —

Кад се у квадратним облицима не јављају квадрати промењљивих, онда се ти облици не могу по поменутом методу растворити у збир квадрата линеарних облика. У том случају бар један од коефицијената a_{ik} $(i \neq k)$ није $= 0$; н. пр. нека је $a_{12} \neq 0$.

Ако уредимо облик f по промењљивима x_1 и x_2, онда ћемо моћи f овако написати:

$$f = 2a_{12}x_1x_2 + 2Px_1 + 2Qx_2 + R;$$

P и Q су линеарни облици промењљивих $x_3, x_4, \cdots x_n$, а R је квадратан облик тих истих промењљивих.

Тај случај свешћемо на пређашњи овако. Узећемо да је

$$x_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad x_2 = \frac{y_1 - y_2}{2}, \; x_3 = y_3, \cdots x_n = y_n.$$

Том линеарном трансформацијом преобразиће се облик f у један квадратан облик, у коме ће се јављати квадрати промењљивих y_1 и y_2, па ћемо стога тај облик моћи по пређашњем методу растворити у збир квадрата линеарних различитих облика промењљивих $y_1, y_2, \cdots y_n$; тих облика не ће бити више у збиру од n.

Ти облици остаће према једној нашој напомени (чл. 110.) независни и кад у њима $y_1, y_2, \cdots y_n$ заменимо њиховим вредностима

$$y_1 = x_1 + x_2, \ y_2 = x_1 - x_2, \ y_3 = x_3, \cdots y_n = x_n.$$

Стога је поменута теорема потпуно доказана.

Напомена 1. *Квадратан облик може се на бесконачно много начина растворити у збир квадрата линеарних независних облика.*

Нека је на име

$$f = P_1^2 + P_2^2 + \cdots + P_i^2.$$

Ако узмемо н. пр. да је

$$Q_1 = P_1 \cos \omega - P_2 \sin \omega, \quad Q_2 = P_1 \sin \omega + P_2 \cos \omega,$$

биће

$$Q_1^2 + Q_2^2 = P_1^2 + P_2^2,$$

па је стога и

$$f = Q_1^2 + Q_2^2 + P_3^2 + \cdots + P_i^2.$$

Ако сад будемо мењали ω, онда ће се мењати и облици Q_1 и Q_2, па како ω може имати бесконачно много вредности, то ће се и f моћи растворити на бесконачно много начина у збир независних линеарних облика $Q_1, Q_2, P_3, \cdots P_i$.

Напомена 2. *Сваки квадратан облик може се растворити у алгебарски збир од ма колико квадрата линеарних облика, кад ти облици нису независни.*

Означимо на име са $Q_1, Q_2, \cdots Q_k$ неке линеарне облике промењљивих $x_1, x_2, \cdots x_n$, па нека је

$$F = Q_1^2 + Q_2^2 + \cdots + Q_k^2;$$

у том изразу је k некакав цео број, а F је квадратан облик промењљивих $x_1, x_2, \cdots x_n$. Јасно је да је

$$f \equiv F + (f - F).$$

Облик $f - F$ је квадратан. Тај облик можемо растворити по Гаусову методу у збир од i $(i \leqslant n)$ квадрата линеарних независних облика; стога ће облик f бити разложен у збир од $(i + k)$ квадрата линеарних облика, па како k може бити ма какав цео број, то је и поменута теорема доказана.

114. Основна особина дискриминанте квадратних облика. — Да не бисмо писали велике изразе, узмимо овај тернеран квадратан облик:

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3.$$

Тај облик може се и овако написати:

$$f = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)x_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)x_2$$

$$+ (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)x_3,$$

а по томе се види да је

$$f = x_1f_1 + x_2f_2 + x_3f_3.$$

Дискриминанта тог облика је

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Преобразимо сад облик f линеарном трансформацијом

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + b_{13}y_3, \\ x_2 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + b_{23}y_3, \\ x_3 &= b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + b_{33}y_3 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

у облик F промењљивих y_1, y_2, y_3. Најлакше ћемо ту трансформацију извршити овако. Трансформоваћемо најпре линеарне облике f_1, f_2, f_3 и добићемо тада ово:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + c_{13}y_3, \\ f_2 &= c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + c_{23}y_3, \\ f_3 &= c_{31}y_1 + c_{32}y_2 + c_{33}y_3. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Детерминанта те системе је (чл. 110.)

$$D = M\Delta.$$

Помножимо даље наспрамне еквације система (2) и (3) и саберимо их после тога. Добићемо тада ово:

$$\begin{aligned} f &= x_1f_1 + x_2f_2 + x_3f_3 \\ &= (b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + b_{13}y_3)\ (c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + c_{13}y_3) \\ &+ (b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + b_{23}y_3)\ (c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + c_{23}y_3) \\ &+ (b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + b_{33}y_3)\ (c_{31}y_1 + c_{32}y_2 + c_{33}y_3). \end{aligned}$$

Израз на десној страни представља већ трансформован облик F. Напишимо тај израз овако:

$$\begin{aligned} F \equiv {} & [(b_{11}c_{11} + b_{21}c_{21} + b_{31}c_{31})\ y_1 + (b_{11}c_{12} + b_{21}c_{22} + b_{31}c_{32})\ y_2 \\ & \qquad + (b_{11}c_{13} + b_{21}c_{23} + b_{31}c_{33})\ y_3]\ y_1 \\ & + [(b_{12}c_{11} + b_{22}c_{21} + b_{32}c_{31})\ y_1 + (b_{12}c_{12} + b_{22}c_{22} + b_{32}c_{32})\ y_2 \\ & \qquad + (b_{12}c_{13} + b_{22}c_{23} + b_{32}c_{33})\ y_3]\ y_2 \\ & + [(b_{13}c_{11} + b_{23}c_{21} + b_{33}c_{31})\ y_1 + (b_{13}c_{12} + b_{23}c_{22} + b_{33}c_{32})\ y_2 \\ & \qquad + (b_{13}c_{13} + b_{23}c_{23} + b_{33}c_{33})\ y_3]\ y_3 \end{aligned}$$

$$= (A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + A_{13}y_3)\, y_1$$

$$+ (A_{21}y_1 + A_{22}y_2 + A_{23}y_3)\, y_2$$

$$+ (A_{31}y_1 + A_{32}y_2 + A_{33}y_3)\, y_3.$$

По томе се види да је дискриминанта трансформованог облика F ово:

$$\delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

$$= M \cdot M\Delta = M^2\Delta,$$

т. ј. *дискриминанта трансформованог квадратног облика добива се, кад се дискриминанта датог облика помножи квадратом модула трансформације.*

Кад је трансформација ортогонална, онда је $M^2 = 1$, т. ј. *ортогоналном трансформацијом не мења се дискриминанта квадратног облика.*

115. Вратимо се поново квадратном облику

$$f = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} x_i x_k,$$

па претпоставимо да је тај облик растворен у збир од n квадрата независних линеарних облика:

$$f = p_1 P_1^2 + p_2 P_2^2 + \cdots + p_n P_n^2. \qquad (a)$$

Тај облик сматраћемо за један часак као функцију промењљивих $P_1, P_2, \cdots P_n$. Дискриминанта тог облика биће тада

$$D = p_1\, p_2 \cdots p_n.$$

Преобразимо сад f линеарном трансформацијом

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = a_{11}x_1 + \cdots \\ P_2 = 0\cdot x_1 + a'_{22}x_2 + \cdots \\ P_3 = 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + a'_{33}x_2 + \cdots \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ P_n = 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + \cdots + 0\cdot x_{n-1} + a'_{nn}x_n. \end{array}\right\} \quad (4)$$

У том случају биће трансформован облик управо дат првобитни облик f променљивих $x_1, x_2, \cdots x_n$. Ако поново дискриминанту облика f означимо са $\varDelta$, а модуо линеарне трансформације (4) са M, биће према малочас поменутој теореми

$$\varDelta = M^2 D = M^2 p_1\, p_2 \cdots p_n.$$

По томе се види ово: 1-во, ако је $\varDelta = 0$, онда бар један од коефицијената p мора бити $= 0$; у том случају ће у изразу (a) бити мање од n квадрата; 2-го, ако је ма који између коефицијената $p = 0$, онда је и $\varDelta = 0$. То значи, *да се сваки квадратан облик може растворити у збир од n квадрата линеарних независних облика, само ако је његова дискриминанта $\neq 0$; напротив, кад је дискриминанта квадратног облика $= 0$, онда је број квадрата независних линеарних облика мањи од n.*

116. Гаусова адјунгована функција. Нека нам је дат овај тернеран квадратан облик:

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3.$$

Тај облик ћемо линеарно трансформовати и претпоставићемо да су нове променљиве y_1, y_2, y_3 управо делимични полуизводи f_1, f_2, f_3 облика f:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Детерминанта те системе је дискриминанта $\varDelta$ облика f. Узмимо да је $\varDelta \neq 0$, па решимо систему (5) по непознатима x_1, x_2, x_3. Ако са A_{ik} означимо кофактор елемента a_{ik} у дискриминанти $\varDelta$, биће

$$\left.\begin{aligned} \varDelta x_1 &= A_{11}y_1 + A_{21}y_2 + A_{31}y_3, \\ \varDelta x_2 &= A_{12}y_1 + A_{22}y_2 + A_{32}y_3, \\ \varDelta x_3 &= A_{13}y_1 + A_{23}y_2 + A_{33}y_3. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Помножимо сад унакрст наспрамне еквације система (5) и (6) и саберимо после тога те еквације. Добићемо овај резултат:

$$\begin{aligned} \varDelta f = {} & (A_{11}y_1 + A_{21}y_2 + A_{31}y_3)\, y_1 \\ & + (A_{12}y_1 + A_{22}y_2 + A_{32}y_3)\, y_2 \\ & + (A_{13}y_1 + A_{23}y_2 + A_{33}y_3)\, y_3. \end{aligned} \tag{7}$$

На десној страни те еквације јавља се, као што видимо, један квадратан облик; његова дискриминанта је

$$D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}.$$

Како је детерминанта $\varDelta$ симетрична, биће (чл. 55.) и детерминанта D симетрична; према томе је $A_{ik} = A_{ki}$, т. ј. биће

$$\varDelta f = A_{11}y_1^2 + A_{22}y_2^2 + A_{33}y_3^2 + 2A_{12}y_1y_2 + 2A_{13}y_1y_3 + 2A_{23}y_2y_3$$

или, како је

$$y_1 = f_1, \quad y_2 = f_2, \quad y_3 = f_3,$$

то је и

$$\Delta f = A_{11}f_1^2 + A_{22}f_2^2 + A_{33}f_3^2 + 2A_{12}f_1f_2 + 2A_{13}f_1f_3 + 2A_{23}f_2f_3.$$

За функцију Δf каже се да је *адјунгована функција* облика f. Дискриминанта адјунговане функције је адјунгована детерминанта дискриминанте облика f.

Кад је

$$f = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}x_ix_k,$$

онда је адјунгована функција ово:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} A_{ik}f_if_k.$$

Та функција може се написати у облику ове заоквирене детерминанте:

$$\Delta f = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & f_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & f_n \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_n & 0 \end{vmatrix}.$$

117. Теорема. *Квадратан реалан облик променљивих $x_1, x_2, \cdots x_n$ може се свакад ортогоналном трансформацијом свести на облик*

$$f = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ny_n^2. —$$

Нека нам је н. пр. дат овај квадратан облик:

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3.$$

Доказаћемо да се тај облик ортогоналном трансформацијом

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + b_{13}y_3, \\ x_2 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + b_{23}y_3, \\ x_3 &= b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + b_{33}y_3 \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

може преобразити у облик

$$f = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + k_3y_3^2. \quad (9)$$

Како је трансформација (8) ортогонална то ће бити

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= b_{11}x_1 + b_{21}x_2 + b_{31}x_3, \\ y_2 &= b_{12}x_1 + b_{22}x_2 + b_{32}x_3, \\ y_3 &= b_{13}x_1 + b_{23}x_2 + b_{33}x_3. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Напишимо сад дат облик овако:

$$f = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\, x_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)\, x_2$$
$$+ (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)\, x_3.$$

Ако узимамо у виду обрасце (8), биће јасно да ћемо моћи f овако изразити:

$$\begin{aligned} f = {} & (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\,(b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + b_{13}y_3) \\ & + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)\,(b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + b_{23}y_3) \\ & + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)\,(b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + b_{33}y_3). \quad (11) \end{aligned}$$

С друге стране моћи ћемо, имајући у виду систему (10), израз (9) овако написати:

$$f = k_1 (b_{11}x_1 + b_{21}x_2 + b_{31}x_3)\, y_1 + k_2 (b_{12}x_1 + b_{22}x_2 + b_{32}x_3)\, y_2$$
$$+ k_3 (b_{13}x_1 + b_{23}x_2 + b_{33}x_3)\, y_3. \qquad (12)$$

Изрази (11) и (12) морају бити идентични. Стога ће коефицијенти, што се у једном и другом изразу јављају уз исте производе количина x и y, морати бити једнаки. Изједначимо најпре коефицијенте производâ x_1y_1, x_2y_1, x_3y_1. Тада ћемо добити ове релације:

$$a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{31}b_{31} = k_1b_{11},$$
$$a_{12}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{32}b_{31} = k_1b_{21},$$
$$a_{13}b_{11} + a_{23}b_{21} + a_{33}b_{31} = k_1b_{31},$$

или

$$\left.\begin{aligned}
(a_{11} - k_1)\, b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{31}b_{31} &= 0,\\
a_{12}b_{11} + (a_{22} - k_1)\, b_{21} + a_{32}b_{31} &= 0,\\
a_{13}b_{11} + a_{23}b_{21} + (a_{33} - k_1)\, b_{31} &= 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Изједначимо даље коефицијенте производâ x_1y_2, x_2y_2, x_3y_2. Тада ћемо добити ове релације:

$$\left.\begin{aligned}
(a_{11} - k_2)\, b_{12} + a_{21}b_{22} + a_{31}b_{32} &= 0,\\
a_{12}b_{12} + (a_{22} - k_2)\, b_{22} + a_{32}b_{32} &= 0,\\
a_{13}b_{12} + a_{23}b_{22} + (a_{33} - k_2)\, b_{32} &= 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Најзад, изједначимо коефицијенте, што се у поменута два израза јављају уз производе x_1y_3, x_2y_3, x_3y_3. Тада ћемо добити ово:

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-k_3)\,b_{13}+a_{21}b_{23}+a_{31}b_{33}&=0,\\ a_{12}b_{13}+(a_{22}-k_3)\,b_{23}+a_{32}b_{33}&=0,\\ a_{13}b_{13}+a_{23}b_{23}+(a_{33}-k_3)\,b_{33}&=0.\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

Ако из системе (13) елиминирамо коефицијенте b_{11}, b_{21}, b_{31}; из системе (14) коефицијенте b_{12}, b_{22}, b_{32} и најзад из системе (15) коефицијенте b_{13}, b_{23}, b_{33}, онда ћемо по резултантама тих система видети да су непознати коефицијенти k_1, k_2, k_3 корени ове еквације трећега степена:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-k \end{vmatrix} = 0.$$

Ти корени су (чл. 60.) реални. Ако их нађемо, па њиховим вредностима заменимо k_1, k_2, k_3 у системама (13), (14) и (15), онда ћемо добити три хомогене линеарне системе и у свакој системи по три непознате:

$$b_{11}, b_{21}, b_{31};\ b_{12}, b_{22}, b_{32};\ b_{13}, b_{23}, b_{33}.$$

Првој системи додаћемо основну релацију

$$b_{11}^2+b_{21}^2+b_{31}^2=1;$$

другој системи додаћемо релацију

$$b_{12}^2+b_{22}^2+b_{32}^2=1,$$

а трећој системи додаћемо релацију

$$b_{13}^2+b_{23}^2+b_{33}^2=1.$$

Из тих нових система моћи ћемо тада потпуно одредити непознате коефицијенте ортогоналне трансформације (8). Ми видимо дакле, да се могу одредити коефицијенти $b_{11}, b_{12}, b_{13}, \cdots b_{33}$ оне ортогоналне трансформације, којом ће се дат облик преобразити у облик

$$f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + k_3 y_3^2,$$

а доказали смо сем тога, да су коефицијенти k_1, k_2, k_3 трансформованог облика корени једне одређене еквације трећега степена. Поменута је теорема дакле потпуно доказана.

Да смо били узели један квадратан облик с n променљивих, онда бисмо нашли да су коефицијенти $k_1, k_2, \cdots k_n$ у сведеном облику

$$k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_n y_n^2$$

корени ове еквације n-тог степена:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0. \qquad (16)$$

Сви корени те еквације су реални, а њезин апсолутан члан је

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

т. ј. апсолутан члан еквације (16) је дискриминанта $\varDelta$ датог облика f. Кад је $\varDelta \neq 0$, онда ни један корен еквације (16) није $= 0$, т. ј. у сведеном облику има тада n квадрата. Но кад је $\varDelta = 0$, онда ће један корен екваније (16) бити $= 0$, а у сведеном облику биће $(n-1)$ квадрата. Даље, означимо прве миноре, што одговарају елементима $a_{11}, a_{22}, \cdots a_{nn}$ главне дијагонале са $A_{11}, A_{22}, \cdots A_{nn}$. Коефицијенат, што се у еквацији (16) јавља уз k, биће збир тих првих минора. Дакле, ако је $\Delta = 0$ и ако је и

$$A_{11} = A_{22} = \cdots = A_{nn} = 0,$$

онда ће два корена еквације (16) бити $= 0$, па ће стога тада у сведеном облику бити свега $(n-2)$ квадрата. Није згорег поменути, да ће у том случају и сви остали први минори детерминанте Δ бити $= 0$. Детерминанта Δ је на име симетрична; она је сем тога $= 0$, па ће стога (чл. 59.) бити

$$A_{12} = \sqrt{A_{11}A_{22}}, \quad A_{13} = \sqrt{A_{11}A_{33}}, \cdots,$$

а по томе се види да је заиста у овај мах и

$$A_{12} = A_{13} = \cdots = 0.$$

Сличним путем могли бисмо наћи погодбе, под којима ће у сведеном облику бити $(n-3)$, $(n-4)$, $\cdots$ квадрата. Дакле:

Кад је дискриминанта неког квадратног реалног облика са n промењљивих $\neq 0$, онда у сведеном облику има n квадрата; тих квадрата има (n — 1), кад је дискриминанта $= 0$; кад су и сви први минори, што одговарају елементима главне дијагонале $= 0$, онда у сведеном облику има (n — 2) квадрата и т. д.

На пример, нека нам је дат квадратан кватернеран облик

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3$$
$$+ 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4.$$

Дискриминанта тог облика је

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Кад је $\Delta \neq 0$, онда је сведен облик ово:

$$k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + k_3 y_3^2 + k_4 y_4^2.$$

Кад је $\Delta = 0$, онда је сведен облик ово:

$$k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + k_3 y_3^2.$$

Кад је

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

онда се дат облик ортогоналном трансформацијом може свести на облик:

$$k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2.$$

Најзад, кад је

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

онда је дат облик потпун квадрат.

118. Теорема. *Кад је дискриминанта неког квадратног облика $= 0$, онда је адјунгована функција тог облика потпун квадрат.*

Узмимо поново тернеран квадратан облик

$$f = a_{11}x_1^2 + \cdots + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots.$$

Адјунгована функција тог облика је

$$A_{11}f_1^2 + A_{22}f_2^2 + A_{33}f_3^2 + 2A_{12}f_1f_2 + 2A_{13}f_1f_3 + 2A_{23}f_2f_3.$$

Ако је $\Delta = 0$, онда је

$$A_{12} = \sqrt{A_{11}A_{22}}, \quad A_{13} = \sqrt{A_{11}A_{33}}, \quad A_{23} = \sqrt{A_{22}A_{33}}.$$

Стога ће се адјунгована функција (види детаље у чл. 59.) моћи овако написати:

$$(f_1\sqrt{A_{11}} + f_2\sqrt{A_{22}} + f_3\sqrt{A_{33}})^2.$$

Кад квадратан облик f зависи од променљивих $x_1, x_2, \cdots x_n$, онда би се могло доказати да је адјунгована функција тог облика ово:

$$(f_1\sqrt{A_{11}} + f_2\sqrt{A_{22}} + \cdots + f_n\sqrt{A_{nn}})^2,$$

кад је $\Delta = \mid a_{1n} \mid = 0$.

Напомена. Нека је

$$f_1 = u_1, \quad f_2 = u_2, \quad f_3 = u_3.$$

Тада ће адјунгована функција датог облика f бити овог облика:

$$A_{11}u_1^2 + A_{22}u_2^2 + A_{33}u_3^2 + 2A_{12}u_1u_2 + 2A_{13}u_1u_3 + 2A_{23}u_2u_3.$$

Ако је сад $f = 0$ пунктуална еквација неког коничног пресека, онда ће еквација

$$A_{11}u_1^2 + \cdots + 2A_{12}u_1u_2 + \cdots = 0$$

бити тангенцијална еквација тог истог пресека. Но кад је $\Delta = 0$, онда еквација $f = 0$ представља две праве, а адјунгована функција биће ово:

$$(u_1 \sqrt{A_{11}} + u_2 \sqrt{A_{22}} + u_3 \sqrt{A_{33}})^2;$$

то значи, да ће корелативно системи двеју правих одговарати у тангенцијалној геометрији једна двојна тачка.

119. Теорема. *Кад се некакав квадратан облик може изразити производом два линеарна облика, онда је дискриминанта тог облика* $= 0$.

Нека је н. пр.

$$\varphi = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n,$$

$$\psi = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n,$$

а

$$f = \varphi \cdot \psi = (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)(b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n).$$

Тада ће бити

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = a_1\psi + b_1\varphi, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = a_2\psi + b_2\varphi, \cdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} = a_n\psi + b_n\varphi.$$

По томе се види да ће заједнички корени еквација

$$\varphi = 0 \quad \text{и} \quad \psi = 0$$

бити уједно и корени ове системе линеарних хомогених еквација:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Та система имаће другим речима заједничких корена. Стога ће њезина резултанта морати бити $= 0$. Резултанта те системе је међу тим дискриминанта облика f. Теорема је дакле доказана.

120. Проблема. *Дата су два квадратна тернерна облика*

$$S = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2,$$

$$S' = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + 2b_{23}x_2x_3 + 2b_{31}x_3x_1 + 2b_{12}x_1x_2.$$

Пита се кад ће се облик $S - kS'$ моћи изразити производом два линеарна фактора?

По мало час поменутој теореми мора дискриминанта облика $S - kS'$ бити $= 0$, т. ј. мора бити

$$\begin{vmatrix} a_{11} - kb_{11} & a_{12} - kb_{12} & a_{13} - kb_{13} \\ a_{21} - kb_{21} & a_{22} - kb_{22} & a_{23} - kb_{23} \\ a_{31} - kb_{31} & a_{32} - kb_{32} & a_{33} - kb_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\Delta - k\Theta + k^2\Theta' - k^3\Delta' = 0. \tag{17}$$

Та еквација зове се *Ламеова еквација*. У њој су са Δ и Δ' означене дискриминанте обликâ S и S':

$$\Delta = |\, a_{13} \,|, \quad \Delta' = |\, b_{13} \,|,$$

а са Θ и Θ' су означени ови изрази:

$$\Theta = A_{11}b_{11} + A_{22}b_{22} + A_{33}b_{33} + 2A_{23}b_{23} + 2A_{31}b_{31} + 2A_{12}b_{12},$$

$$\Theta' = B_{11}a_{11} + B_{22}a_{22} + B_{33}a_{33} + 2B_{23}a_{23} + 2B_{31}a_{31} + 2B_{12}a_{12};$$

A_{ik} је кофактор елемента a_{ik} у детерминанти $|a_{13}|$, а B_{ik} је кофактор елемента b_{ik} у детерминанти $|b_{13}|$. Како је еквација (17) трећега степена, то ће се облик $S - kS'$ само за три вредности параметра k моћи изразити производом два линеарна фактора. Једна од те три вредности је свакад реална.

121. Закон о инерцији знакова. Узмимо да је квадратан облик реалан, па претпоставимо да смо тај облик растворили у збир квадрата независних линеарних облика:

$$f = p_1 P_1^2 + p_2 P_2^2 + \cdots + p_n P_n^2. \qquad (a)$$

Између косфицијената p биће у опште неки позитивни, а неки негативни. Ако је н. пр. $p_1 > 0$, онда члан $p_1 P_1^2$ можемо овако написати: $(P_1\sqrt{p_1})^2$, а ако је $p_2 < 0$, онда у збиру (a) место $p_2 P_2^2$ можемо написати $-(P_2\sqrt{-p_2})^2$ и т. д. У опште ћемо дакле облик f моћи овако написати:

$$f = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_h^2 - X_{h+1}^2 - X_{h+2}^2 - \cdots - X_n^2.$$

Теорема. *Број позитивних и број негативних квадрата не мења се, кад се некакав реалан квадратан облик на више начина раствори у збир квадрата независних облика.*

Ту *Хермитову теорему* назвао је *Силвестер* „законом о инерцији знакова“, а ми ћемо је доказати овако. Претпоставићемо да смо облик f сем у поменути збир квадрата независних линеарних функција X растворили и у овај збир квадрата:

$$f = Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_i^2 - Y_{i+1}^2 - Y_{i+2}^2 - \cdots - Y_n^2.$$

По Хермитовој теореми треба да буде $h = i$. Ако h није $= i$, онда је или $h < i$ или $h > i$. Нека је н. пр. $h < i$. Јасно је да тада цео број $h + n - i$ не може бити већи од $n - 1$. Узмимо сад ову систему линеарних еквација:

$$X_1 = 0, \ X_2 = 0, \ \cdots \ X_h = 0,$$

$$Y_{i+1} = 0, \ Y_{i+2} = 0, \ \cdots \ Y_n = 0.$$

У тој системи има свега $h + n - i$ еквација; стога према ономе, што мало час рекосмо, не може у тој системи бити више од $(n - 1)$ еквација. Решимо ту систему по непознатима $x_1, x_2, \cdots x_n$ и уочимо она решења за која бар једна од функција $X_{h+1}, X_{h+2}, \cdots$ није $= 0$. Кад тим вредностима сменимо $x_1, x_2, \cdots x_n$ у линеарним облицима $X_1, X_2, \cdots X_n$, $Y_1, Y_2, \cdots Y_n$, онда ћемо добити ово:

$$f = - X_{h+1}^2 - X_{h+2}^2 - \cdots - X_n^2,$$

$$f = \quad Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_i^2.$$

Те две вредности треба да буду једнаке, а оне, као што видимо, не могу бити једнаке, јер је прва вредност негативна стога, што бар једна од количина $X_{h+1}, X_{h+2}, \cdots$ није $= 0$, а друга је позитивна. То значи да не може бити $h < i$. Исто тако могли бисмо доказати и да не може бити $h > i$.

Напомена. Доказали смо да се квадратан реалан облик ортогоналном трансформацијом може свести на облик

$$f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_n y_n^2.$$

Даље смо доказали да су коефицијенти $k_1, k_2, \cdots k_n$ реалне количине. Кад су сви ти коефицијенти позитивни, онда ће функција f бити позитивна, ма променљиве од којих она зависи, имале ма какву вредност. Стога се каже да је облик f у том случају *позитиван облик*. Кад су коефицијенти k негативни, онда ће f свакад имати негативну вредност. Стога се каже да је такав облик *негативан облик*. Кад су неки коефицијенти k позитивни, а неки негативни, онда се каже да је облик f *индиферентан* Облик f биће дакле позитиван, кад су сви корени еквације

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0$$

позитивни; он је негативан кад су сви корени те еквације негативни, а индиферентан је кад су неки корени те еквације позитивни, а неки негативни.

122. Когредијентне промењиве. Узмимо да нам је дата нека функција промењивих $x_1, x_2, \cdots x_n$, па претпоставимо да смо ту функцију преобразили линеарном трансформацијом

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n, \\ x_2 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_n, \\ \cdots & \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_n &= b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{nn}y_n. \end{aligned}$$

Сем тога узмимо неку функцију промењивих $x_1', x_2', \cdots x_n'$, па преобразимо ту функцију линеарном трансформацијом

$$\begin{aligned} x_1' &= b_{11}y_1' + b_{12}y_2' + \cdots + b_{1n}y_n', \\ x_2' &= b_{21}y_1' + b_{22}y_2' + \cdots + b_{2n}y_n', \\ \cdots & \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_n' &= b_{n1}y_1' + b_{n2}y_2' + \cdots + b_{nn}y_n'. \end{aligned}$$

У том случају се каже да су промењиве $x_1, x_2, \cdots x_n$ и $x_1', x_2', \cdots x_n'$ *когредијентне.*

На пример, означимо са x_1, x_2, x_3 и x_1', x_2', x_3' координате двеју тачака у некој трилинеарној координатној системи, а са y_1, y_2, y_3 и y_1', y_2', y_3' координате тих истих двеју тачака у некој другој трилинеарној системи. Координате x_1, x_2, x_3 и x_1', x_2', x_3' биће тада когредијентне; јер ако се при трансформацији координата узме да је

$$x_i = b_{i1}y_1 + b_{i2}y_2 + b_{i3}y_3, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

онда ће се с друге стране морати узети да је

$$x_i' = b_{i1}y_1' + b_{i2}y_2' + b_{i3}y_3'.$$

123. Контрагредијентне променљиве. Узмимо даље опет две групе променљивих, па претпоставимо да су те променљиве међу собом везане овом билинеарном релацијом:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + \cdots + u_nx_n = 0. \tag{a}$$

Линеарном трансформацијом

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = b_{11}x_1' + b_{12}x_2' + \cdots + b_{1n}x_n', \\ x_2 = b_{21}x_1' + b_{22}x_2' + \cdots + b_{2n}x_n', \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_n = b_{n1}x_1' + b_{n2}x_2' + \cdots + b_{nn}x_n' \end{array}\right\} \tag{b}$$

преобразиће се функција (a) у ову функцију:

$$(b_{11}u_1 + b_{21}u_2 + \cdots + b_{n1}u_n)x_1' + (b_{12}u_1 + b_{22}u_2 + \cdots + b_{n2}u_n)x_2'$$
$$+ \cdots + (b_{1n}u_1 + b_{2n}u_2 + \cdots + b_{nn}u_n)x_n' = 0.$$

Ако се сад узме да је

$$\left.\begin{array}{l} b_{11}u_1 + b_{21}u_2 + \cdots + b_{n1}u_n = u_1', \\ b_{12}u_1 + b_{22}u_2 + \cdots + b_{n2}u_n = u_2', \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ b_{1n}u_1 + b_{2n}u_2 + \cdots + b_{nn}u_n = u_n', \end{array}\right\} \tag{c}$$

онда ћемо трансформовану функцију моћи овако написати:

$$u_1'x_1' + u_2'x_2' + \cdots + u_n'x_n' = 0, \qquad (d)$$

а та билинеарна релација и дата релација имају *исти* облик.

Решимо сад систему (c) по количинама $u_1, u_2, \cdots u_n$. У резултату добићемо ово:

$$\left.\begin{array}{l} Bu_1 = B_{11}u_1' + B_{12}u_2' + \cdots + B_{1n}u_n', \\ Bu_2 = B_{21}u_1' + B_{22}u_2' + \cdots + B_{2n}u_n', \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ Bu_n = B_{n1}u_1' + B_{n2}u_2' + \cdots + B_{nn}u_n'; \end{array}\right| \qquad (e)$$

B је модуо дате трансформације, а B_{ik} је кофактор елемента b_{ik} у детерминанти $B = | b_{1n} |$.

По томе се види ово: ако се функција (a) линеарном трансформацијом (b) мења у сасвим сличну функцију (d), онда су нове променљиве $u_1', u_2', \cdots u'_n$ и дате променљиве $u_1, u_2, \cdots u_n$ међу собом везане системом релација (c) или, што је једно и исто, системом релација (e). Трансформације (b) и (e) или боље рећи, трансформације (b) и (c) зову се *инверсне* трансформације, а за дате две групе променљивих каже се да су *контраградијентне.* На пример, пунктуалне координате су контраградијентне с тангенцијалним координатама. [1]

[1]) Види моју *Аналитичну Геометрију,* p. 261.

ОДЕЉАК ОСМИ.

ИНВАРИЈАНТЕ И КОВАРИЈАНТЕ.

124. Нека нам је дат некакав облик

$$f\,(x, y, z, \cdots a_0, a_1, a_2, \cdots),$$

па претпоставимо да се тај облик линеарном трансформацијом преобразио у облик

$$F\,(X, Y, Z, \cdots A_0, A_1, A_2, \cdots).$$

Модуо трансформације означићемо са M. Ако се сад нека функција φ коефицијената $a_0, a_1, a_2, \cdots$ разликује од те исте функције φ коефицијената $A_0, A_1, A_2, \cdots$ само тим, што је она прва функција коефицијената помножена неким степеном модула трансформације, онда се каже да је функција φ *инваријанта* [1]). Фунција φ биће дакле инваријанта, ако је

$$\varphi\,(A_0, A_1, A_2, \cdots) = M^p\,\varphi\,(a_0, a_1, a_2, \cdots).$$

Ми смо се већ сусретали с таким функцијама: доказали смо на име (чл 114.), да се дискриминанта трансформованог квадратног облика добива, кад се дискриминанта датог облика помножи квадратом модула трансформације. *Стога је дискриминанта неког квадратног облика инваријанта.* На пример, дискриминанта квадратног облика

[1]) Келе се први бавио теоријом инваријаната. Он је те функције звао *хипер-детерминантама*. Термин инваријанта је Силвестеров.

$$a_0y^2 + 2a_1xy + a_2x^2$$

је

$$a_1^2 - a_0a_2.$$

Тај облик преобразиће се линеарном трансформацијом

$$x = b_{11}X + b_{12}Y,$$

$$y = b_{21}X + b_{22}Y$$

у облик

$$A_0Y^2 + 2A_1XY + A_2X^2.$$

По поменутој теореми биће

$$A_1^2 - A_0A_2 = M^2 (a_1^2 - a_0a_2),$$

т. ј. функција $a_1^2 - a_0a_2$ је инваријанта.

125. Кад је $p = 0$, онда је

$$\varphi (A_0, A_1, A_2, \cdots) = \varphi (a_0, a_1, a_2, \cdots).$$

Инваријанта φ не мења се никако у том случају линеарном трансформацијом, па чак ни онда, кад трансформација није унимодуларна. Стога се такве инваријанте зову *апсолутним инваријантама*. Кад некакав облик има бар две обичне инваријанте, онда се свакад помоћу тих инваријаната може наћи једна апсолутна инваријанта тог облика. Узмимо н. пр. да су функције

$$\varphi (a_0, a_1, a_2, \cdots) \quad \text{и} \quad \psi (a_0, a_1, a_2, \cdots)$$

две обичне инваријанте, па нека је

$$\varphi (A_0, A_1, A_2, \cdots) = M^p \varphi (a_0, a_1, a_2, \cdots),$$

$$\psi (A_0, A_1, A_2, \cdots) = M^q \psi (a_0, a_1, a_2, \cdots).$$

У том случају биће

$$[\varphi(A_0, A_1, A_2, \cdots)]^q = M^{pq}[\varphi(a_0, a_1, a_2, \cdots)]^q,$$

$$[\psi(A_0, A_1, A_2, \cdots)]^p = M^{pq}[\psi(a_0, a_1, a_2, \cdots)]^p,$$

па је стога и

$$\frac{[\varphi(A_0, A_1, A_2, \cdots)]^q}{[\psi(A_0, A_1, A_2, \cdots)]^p} = \frac{[\varphi(a_0, a_1, a_2, \cdots)]^q}{[\psi(a_0, a_1, a_2, \cdots)]^p},$$

а то значи да је функција

$$\frac{[\varphi(a_0, a_1, a_2, \cdots)]^q}{[\psi(a_0, a_1, a_2, \cdots)]^p}$$

апсолутна инваријанта.

Напомена. Коефицијенти b_{11}, b_{12}, $\cdots$ линеарне трансформације не могу се свакад одредити тако, да преображен облик неког облика $f = a_0x^n + \cdots$, који зависи од r променљивих $x, \cdots$, буде некакав дат облик $F = A_0X^n + \cdots$. Ако на име линеарно трансформујемо дат облик и ако за тим изједначимо коефицијенте што се јављају у трансформованом облику уз X^n, $\cdots$ са коефицијентима што се јављају у облику F уз X^n, $\cdots$, онда ћемо добити читав један низ релација:

$$A_0 = a_0 b_{11}{}^n + \cdots, \quad \cdots \quad \cdots \tag{a}$$

Тих релација има онолико, колико има чланова у општем облику неке хомогене функције n-тог степена, а с r променљивих, т. ј. тих релација има свега

$$N = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+r-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (r-1)}.$$

Како ће у том случају у линеарној трансформацији бити свега r^2 коефицијената, то ће *у опште* бити $N > r^2$.

Израчунајмо сад из r^2 релација система (a) непознате коефицијенте $b_{11}, b_{12}, \cdots b_{1r}, b_{21} \cdots b_{rr}$ и заменимо те коефицијенте у осталим релацијама системе (a) — а тих је свега на број $N - r^2$ — вредностима, које будемо добили. Тим путем добићемо једну систему од $N - r^2$ релација, а сваком том релацијом биће међусобно везани коефицијенти $a_0, a_1, a_2, \cdots$ и $A_0, A_1, A_2, \cdots$ На пример, ако је облик f бинеран, онда ће у линеарној трансформацији бити четири коефицијента $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$, а свега ће у трансформованом облику бити $(n + 1)$ чланова. Стога ће у системи (a) бити $(n + 1)$ релација. Ако дакле сталне коефицијенте одредимо из четири релације те системе и ако их затим елиминирамо из осталих релација, онда ћемо добити свега $(n - 3)$ релација. По тим релацијама ће се видети како су међусобно везани коефицијенти $a_0, a_1, a_2, \cdots$ и $A_0, A_1, A_2, \cdots$. Коефицијенти $A_0, A_1, A_2, \cdots$ не могу дакле *у опште* бити ма какве количине, т. ј. облик $f = a_0 x^n + \cdots$ не може се у опште линеарном трансформацијом преобразити у дат облик $F = A_0 X^n + \cdots$. Ако се једна од поменутих релација може написати у облику

$$\varphi(A_0, A_1, A_2, \cdots) = \varphi(a_0, a_1, a_2, \cdots),$$

онда ће функција φ бити апсолутна инваријанта. Бинеран облик не може дакле имати више од $(n - 3)$ таквих релација, а по томе се види да *бинерни облици другог и трећег степена немају апсолутних инваријаната.* То значи да ти облици немају две обичне инваријанте. У општој Теорији Облика учи се, да је дискриминанта сваког облика инваријанта. *Једина инваријанта бинерних облика другог и трећег степена биће према томе дискриминанта тих облика.*

Исто би се тако могло доказати и *да је једина инваријанта ма ког квадратног облика у опште само дискриминанта тог облика.* Јер кад је $n = 2$, онда је

$$N = \frac{r(r+1)}{1 \cdot 2},$$

а тај број је мањи од r^2.

Остали облици имају апсолутних инваријаната. На пример, узмимо овај бинеран облик четвртог степена:

$$f = a_0x_1^4 + 4a_1x_1^3x_2 + 6a_2x_1^2x_2^2 + 4a_3x_1x_2^3 + a_4x_2^4. \qquad (b)$$

Тај облик преобразиће се линеарном трансформацијом у овај облик:

$$F = A_0X_1^4 + 4A_1X_1^3X_2 + 6A_2X_1^2X_2^2 + 4A_3X_1X_2^3 + A_4X_2^4.$$

Како је

$$A_0A_4 - 4A_1A_3 + 3A_2^2 = M^4(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2) = M^4i,$$

$$A_0A_3^2 + A_4A_1^2 + A_2^3 - A_0A_2A_4 - 2A_1A_2A_3$$

$$= M^6(a_0a_3^2 + a_4a_1^2 + a_2^3 - a_0a_2a_4 - 2a_1a_2a_3) = M^6j,$$

то ће функције

$$i = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2$$

и

$$j = a_0a_3^2 + a_4a_1^2 + a_2^3 - a_0a_2a_4 - 2a_1a_2a_3$$

бити инваријанте облика f.

Према томе је функција

$$\frac{(A_0A_3^2 + A_4A_1^2 + A_2^3 - A_0A_2A_4 - 2A_1A_2A_3)^2}{(A_0A_4 - 4A_1A_3 + 3A_2^2)^3}$$

$$= \frac{(a_0a_3^2 + a_4a_1^2 + a_2^3 - a_0a_2a_4 - 2a_1a_2a_3)^2}{(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2)^3}$$

апсолутна инваријанта облика (b).

Дискриминанта облика (b) је (чл. 111.) ово:

$$i^3 - 27j^2,$$

стога се дискриминанта трансформованог облика добива, кад се дискриминанта првобитног облика помножи са M^{12}.

126. Симултане инваријанте. Као што један облик може имати инваријаната, исто тако може и система облика имати инваријаната. Инваријанте системе облика зову се *симултане инваријанте*.

Нека нам је н. пр. дата система облика

$$a_0 x^m + \cdots, \; b_0 x^n + \cdots, \; c_0 x^q \cdots, \; \cdots \; \cdots$$

па претпоставимо да смо ту систему облика неком одређеном линеарном трансформацијом преобразили у систему облика

$$A_0 X^m + \cdots, \; B_0 X^n + \cdots, \; C_0 X^q + \cdots, \; \cdots \; \cdots$$

Функција

$$\varphi\,(a_0, \cdots, \; b_0, \cdots, \; c_0 \cdots)$$

биће симултана инваријанта системе датих облика, ако је

$$\varphi\,(A_0, \cdots, \; B_0, \cdots, \; C_0 \cdots) = M^p \; \varphi\,(a_0 \cdots, \; b_0 \cdots, \; c_0 \cdots).$$

И с таквим смо се функцијама већ сусретали. Доказали смо на име ову теорему (чл. 110.): ако се линеарно трансформује система обликâ

$$f_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n,$$

$$f_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n,$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$f_n = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n,$$

онда се детерминанта D системе трансформованих облика добива, кад се модуо трансформације помножи детерминантом Δ системе датих облика:

$$D = M\Delta.$$

Стога је детерминанта Δ симултана инваријанта облика $f_1, f_2, \cdots f_n$.

127. Теорема. *Ако су облици* $f(x, y, \cdots a_0, a_1, \cdots)$ *и* $g(x, y, \cdots b_0, b_1, \cdots)$ *истога степена и ако је* $\varphi(a_0, a_1, \cdots)$ *инваријанта првог облика, онда је*

$$b_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_0} + b_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + b_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \cdots$$

симултана инваријанта облика f *и* g.

Означимо на име са k некакав параметар и уочимо место облика f облик $f + kg$. Ако је

$$f = a_0 x^n + \cdots, \; g = b_0 x^n + \cdots,$$

биће

$$f + kg = (a_0 + kb_0)\, x^n + \cdots.$$

По томе се види ово: ако је $\varphi(a_0, a_1, \cdots)$ инваријанта облика f, онда је $\varphi(a_0 + kb_0, a_1 + kb_1, \cdots)$ инваријанта облика $f + kg$, а то значи да је

$$\varphi(A_0 + kB_0,\; A_1 + kB_1,\; A_2 + kB_2, \cdots)$$

$$= M^p \varphi(a_0 + kb_0,\; a_1 + kb_1,\; a_2 + kb_2, \cdots).$$

Ако сад развијемо функцију φ по Телорову обрасцу, добићемо ово:

$$\varphi(A_0, A_1, A_2, \cdots) + \left(B_0\frac{\partial\varphi}{\partial A_0} + B_1\frac{\partial\varphi}{\partial A_1} + B_2\frac{\partial\varphi}{\partial A_2} + \cdots\right)k + \cdots$$

$$= M^p\varphi(a_0, a_1, a_2, \cdots) + M^p\left(b_0\frac{\partial\varphi}{\partial a_0} + b_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + b_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + \cdots\right)k + \cdots$$

Како k може имати ма какву вредност, биће јасно да ће коефицијенти, што се јављају уз исте степене параметра k на десној и левој страни последње еквације, морати бити једнаки. Између осталих коефицијената биће дакле и коефицијенти

$$B_0\frac{\partial\varphi}{\partial A_0} + B_1\frac{\partial\varphi}{\partial A_1} + B_2\frac{\partial\varphi}{\partial A_2} + \cdots$$

и

$$M^p\left(b_0\frac{\partial\varphi}{\partial a_0} + b_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + b_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + \cdots\right)$$

једнаки, а то значи да је функција

$$b_0\frac{\partial\varphi}{\partial a_0} + b_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + b_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + \cdots$$

симултана инваријанта облика f и g.

Пример 1. Нека је

$$f = a_0y^2 + 2a_1xy + a_2x^2, \quad g = b_0y^2 + 2b_1xy + b_2y^2.$$

Зна се да је функција $\varphi = a_1^2 - a_0a_2$ инваријанта облика f. Стога ће и функција

$$b_0\frac{\partial\varphi}{\partial a_0} + b_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + b_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_2},$$

т. ј. функција

$$b_0\,(-a_2) + b_1\,(2a_1) + b_2\,(-a_0)$$

$$= -\,(a_2b_0 - 2a_1b_1 + a_0b_2),$$

бити симултана инваријанта облика f и g. И заиста може се доказати да је

$$A_2B_0 - 2A_1B_1 + A_0B_2 = M^2\,(a_2b_0 - 2a_1b_1 + a_0b_2).$$

Пример II. Нека је

$$f = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy,$$

а

$$g = a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + 2f'yz + 2g'zx + 2h'xy.$$

Дискриминанта

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

облика f је инваријанта. Према томе ће и функција

$$\Theta = a'\frac{\partial\varDelta}{\partial a} + b'\frac{\partial\varDelta}{\partial b} + c'\frac{\partial\varDelta}{\partial c} + f'\frac{\partial\varDelta}{\partial f} + g'\frac{\partial\varDelta}{\partial g} + h'\frac{\partial\varDelta}{\partial h},$$

т. ј. функција

$$\Theta = Aa' + Bb' + Cc' + 2Ff' + 2Gg' + 2Hh',$$

бити симултана инваријанта обликâ f и g.

Исто тако могло би се доказати и да је функција

$$\Theta' = a\frac{\partial\varDelta'}{\partial a'} + b\frac{\partial\varDelta'}{\partial b'} + c\frac{\partial\varDelta'}{\partial c'} + f\frac{\partial\varDelta'}{\partial f'} + g\frac{\partial\varDelta'}{\partial g'} + h\frac{\partial\varDelta'}{\partial h'}$$

или

$$\Theta' = A'a + B'b + C'c + 2F'f + 2G'g + 2H'h$$

симултана инваријанта облика f и g.

Напомена. У последњим изразима означили смо са $A, B, C, \cdots$ кофакторе елемената $a, b, c, \cdots$ у детерминанти $\varDelta$, са $\varDelta'$ дискриминанту облика g, а са $A', B', C', \cdots$ кофакторе елемената $a', b', c', \cdots$ у детерминанти $\varDelta'$. [1])

128. Коваријанте. Ако се нека функција φ коефицијената $a_0, a_1, \cdots$ и променљивих $x, y, \cdots$ облика $f(x, y, \cdots, a_0, a_1, \cdots)$ разликује од те исте функције коефицијената $A_0, A_1, \cdots$ и променљивих $X, Y, \cdots$ трансформованог облика $F(X, Y, \cdots, A_0, A_1, \cdots)$ само тим, што је она прва функција помножена неким степеном модула трансформације, онда се функција φ зове *коваријанта* облика f. Функција φ биће дакле коваријанта, ако је

$$\varphi(A_0, A_1, \cdots, X, Y, \cdots) = M^p \varphi(a_0, a_1, \cdots, x, y, \cdots).$$

У општој Теорији Облика учи се *да је свака инваријанта неке коваријанте уједно и инваријанта првобитног облика.* Сем тога може се доказати врло лако и *да је свака коваријанта неке коваријанте уједно и коваријанта датог облика.*

129. Поларе. Узмимо две системе променљивих x, y и x', y', па нека су те две системе когредијентне. Линеарна трансформација биће тада

$$\left.\begin{aligned} x &= b_{11}X + b_{12}Y, \\ y &= b_{21}X + b_{22}Y \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

с једне, а

[1]) Види моју *Аналитичну Геометрију* стр. 526. и стр. 859.

$$x' = b_{11}X' + b_{12}Y',$$

$$y' = b_{21}X' + b_{22}Y'$$

с друге стране.

Ако се сад некакав бинеран облик $f(x, y, a_0, a_1, \cdots)$ трансформацијом (a) преобразио у облик $F(X, Y, A_0, A_1, \cdots)$, онда ће се облик

$$f(x + kx', \; y + ky', \; a_0, a_1, \cdots)$$

морати преобразити у облик

$$F(X + kX', \; Y + kY', \; A_0, A_1, \cdots),$$

јер су количине $x + kx'$, $y + ky'$ исто онако везане с количинама $X + kX'$, $Y + kY'$, као што су и количине x, y везане с количинама X, Y:

$$x + kx' = b_{11}(X + kX') + b_{12}(Y + kY'),$$

$$y + ky' = b_{21}(X + kX') + b_{22}(Y + kY').$$

Биће дакле заиста

$$f(x+kx', y+ky', a_0, a_1, \cdots) = F(X+kX', \; Y+kY', A_0, A_1, \cdots).$$

Изразе на левој и десној страни ове еквације развићемо сад по Телорову обрасцу и добићемо овај резултат:

$$f(x, y, a_0, a_1, \cdots)$$

$$+ \left(x'\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y}\right)k + \frac{1}{1\cdot 2}\left(x'^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2x'y'\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y'^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)k^2$$

$$+ \cdots \cdots = F(X, Y, A_0, A_1, \cdots) + \left(X'\frac{\partial F}{\partial X} + Y'\frac{\partial F}{\partial Y}\right)$$

$$+ \frac{1}{1\cdot 2}\left(X'^2\frac{\partial^2 F}{\partial X^2} + 2X'Y'\frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y} + Y'^2\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}\right)k^2 + \cdots \cdots$$

Како параметар k може имати ма какву вредност, то се види да ће бити

$$x'\frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}=X'\frac{\partial F}{\partial X}+Y'\frac{\partial F}{\partial Y},$$

$$x'^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2x'y'\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y'^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=X'^2\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}+2X'Y'\frac{\partial^2 F}{\partial X\partial Y}+Y'^2\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2},$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

Кад су, дакле, променљиве x, y и x', y' когредијентне, онда је

$$\left(x'\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\equiv\left(X'\frac{\partial}{\partial X}+Y'\frac{\partial}{\partial Y}\right)^n F.$$

У функцији

$$\left(x'\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f$$

зависе коефицијенти променљивих x', y' од x, y и од коефицијената $a_0, a_1, \cdots$, а у функцији

$$\left(X'\frac{\partial}{\partial X}+Y'\frac{\partial}{\partial Y}\right)^n F$$

зависе коефицијенти променљивих X', Y' од X, Y и од коефицијената $A_0, A_1, \cdots$. Ако је облик f степена m-тог, онда се функција

$$\frac{1}{m(m-1)\cdots(m-n+1)}\cdot\left(x'\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f$$

зове n-та *полара* облика f или по Силвестеру n-та *еманента* облика f. Те поларе могу се, као што видимо, сматрати као коваријанте, јер се n-та полара когредијентних променљивих x, y и x', y' линеарном трансформацијом преображава у n-ту полару променљивих X, Y и X', Y'.

Пример. Прва полара квадратног облика

$$f = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2$$

је

$$\frac{1}{2}\left(x'\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y}\right)f = (a_0x + a_1y)\,x' + (a_1x + a_2y)\,y'.$$

Та полара је

$$\equiv \frac{1}{2}\left(X'\frac{\partial}{\partial X} + Y'\frac{\partial}{\partial Y}\right) = (A_0X + A_1Y)\,X' + (A_1X + A_2\,Y)\,Y'.$$

Напомена. У Геометрији представљају поларе поларне криве или поларне површине.

130. Ако у појединим поларама сматрамо количине x и y као сталне, онда ћемо те поларе морати сматрати само као функције променљивих x' и y'. У свакој инваријанти тих функција јављаће се према томе сем коефицијената датог облика још и параметри x и y. То значи, *да ће те инваријанте бити коваријанте датог облика.*

На пример, нека је

$$f = a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3.$$

Потражимо сад изводе

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

и заменимо их изразима, које будемо добили, у изразу

$$x'^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2x'y'\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y'^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Не водећи рачуна о бројним вредностима, добићемо овај резултат:

$$x'^2\,(a_0x + a_1y) + 2x'y'\,(a_1x + a_2y) + y'^2\,(a_2x + a_3y).$$

Тај израз представља једну хомогену функцију другога степена променљивих x', y'. Дискриминанта те функције је

$$(a_0x + a_1y)(a_2x + a_3y) - (a_1x + a_2y)^2$$

$$= (a_0a_2 - a_1^2)x^2 + (a_0a_3 - a_1a_2)xy + (a_1a_3 - a_2^2)y^2, \qquad (a)$$

па како је дискриминанта инваријанта, биће облик (a) коваријанта датог облика f.

131. Теорема. *Хесијан неке функције је коваријанта.*

Узмимо некакав облик $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ и уочимо функцију

$$\left(x_1'\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2'\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + x_n'\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f$$

$$\begin{aligned} = x_1'^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} &+ 2x_1'x_2'\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \cdots + 2x_1'x_n'\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ &+ \quad x_2'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \quad + \cdots + 2x_2'x_n'\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ &\qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ &\qquad\qquad\qquad + \quad x_n'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}. \end{aligned}$$

Количине $x_1, x_2, \cdots x_n$ сматраћемо за један часак као сталне, а количине $x_1', x_2', \cdots x_n'$ као променљиве. Дискриминанта те функције је ова детерминанта:

$$H(f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}.$$

Та детерминанта је, као што видимо, хесијан функције f. Но како је дискриминанта неког облика инваријанта, то ће и хесијан $H(f)$ према ономе, што мало час рекосмо, бити коваријанта функције f.

То исто може се у осталом и овако доказати. — Да не бисмо писали велике изразе, узећемо да нам је дат некакав бинеран облик $f(x_1, x_2)$. Хесијан тог облика је ово:

$$H(f) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}.$$

Тај облик преобразиће се линеарном трансформацијом

$$x_1 = b_{11} y_1 + b_{12} y_2,$$

$$x_2 = b_{21} y_1 + b_{22} y_2$$

у облик $F(y_1, y_2)$. Стога је

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} b_{11} + \frac{\partial f}{\partial x_2} b_{21} = p_1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1} b_{12} + \frac{\partial f}{\partial x_2} b_{22} = p_2.$$

Ако поново диференцирамо, добићемо ово:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} = \frac{\partial p_1}{\partial x_1} b_{11} + \frac{\partial p_1}{\partial x_2} b_{21},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_2} = \frac{\partial p_1}{\partial x_1} b_{12} + \frac{\partial p_1}{\partial x_2} b_{22} = \frac{\partial p_2}{\partial x_1} b_{11} + \frac{\partial p_2}{\partial x_2} b_{21} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_2 \partial y_1},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2} = \frac{\partial p_2}{\partial x_1} b_{12} + \frac{\partial p_2}{\partial x_2} b_{22}.$$

Према томе је

$$H(F) = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} b_{11} + \frac{\partial p_1}{\partial x_2} b_{21} & \frac{\partial p_1}{\partial x_1} b_{12} + \frac{\partial p_1}{\partial x_2} b_{22} \\ \frac{\partial p_2}{\partial x_1} b_{11} + \frac{\partial p_2}{\partial x_2} b_{21} & \frac{\partial p_2}{\partial x_1} b_{12} + \frac{\partial p_2}{\partial x_2} b_{22} \end{vmatrix} = M \begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} & \frac{\partial p_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial p_2}{\partial x_1} & \frac{\partial p_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

$$= M \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} b_{11} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} b_{21} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} b_{11} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} b_{21} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} b_{12} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} b_{22} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} b_{12} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} b_{22} \end{vmatrix},$$

а по томе се види да је

$$H(F) = M^2 H(f),$$

т. ј. хесијан функције f је коваријанта.

132. Теорема. *Јакобијан системе хомогених функција је симултана коваријанта тих функцијâ.*

Нека су нам на име дати ови облици:

$$f_1(x_1, x_2, \cdots x_n),\ f_2(x_1, x_2, \cdots x_n), \cdots f_n(x_1, x_2, \cdots x_n).$$

Изрази

$$x_1' \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + x_2' \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \cdots + x_n' \frac{\partial f_1}{\partial x_n},$$

$$x_1' \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + x_2' \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + x_n' \frac{\partial f_2}{\partial x_n},$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$x_1' \frac{\partial f_n}{\partial x_1} + x_2' \frac{\partial f_n}{\partial x_2} + \cdots + x_n' \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

могу се сматрати као линеарне функције променљивих $x_1', x_2', \cdots x_n'$, а детерминанта те система функција је инваријанта. Та детерминанта је међу тим јакобијан системе функција $f_1, f_2, \cdots f_n$. Стога је јакобијан

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

симултана коваријанта. —

Та теорема могла би се такође, као и мало час поменута, доказати и непосредно. Узмимо на име да смо дату систему функција линеарном трансформацијом

$$x_i = b_{i1} y_1 + b_{i2} y_2 + \cdots + b_{in} y_n$$

$$(i = 1, 2, \cdots n)$$

преобразили у систему функција

$$F_1 (y_1, y_2, \cdots y_n), \; F_2 (y_1, y_2, \cdots y_n), \cdots F_n (y_1, y_2, \cdots y_n).$$

У том случају биће (чл. 94.)

$$\frac{\partial (F_1, F_2, \cdots F_n)}{\partial (y_1, y_2, \cdots y_n)} = \frac{\partial (f_1, f_2, \cdots f_n)}{\partial (x_1, x_2, \cdots x_n)} \cdot \frac{\partial (x_1, x_2, \cdots x_n)}{\partial (y_1, y_2, \cdots y_n)},$$

т. ј. биће

$$\frac{\partial (F_1, F_2, \cdots F_n)}{\partial (y_1, y_2, \cdots y_n)} = M \frac{\partial (f_1, f_2, \cdots f_n)}{\partial (x_1, x_2, \cdots x_n)},$$

а по томе се види, да је јакобијан системе функција заиста симултана коваријанта тих функција.

133. Контраваријанте. Нека су нам дате две групе контрагредијентних променљивих $x_1, x_2, \cdots$ и $u_1, u_2, \cdots$, па претпоставимо да се облик $f(x_1, x_2, \cdots a_0, a_1, \cdots)$ неком одређеном линеарном трансформацијом преобразио у облик $F(x_1', x_2', \cdots, A_0, A_1, \cdots)$. Ако се сад нека функција φ коефицијената $a_0, a_1, \cdots$ и променљивих $u_1, u_2, \cdots$ разликује од те исте функције φ коефицијената $A_0, A_1, \cdots$ и променљивих $u_1', u_2', \cdots$ само тим, што је она прва помножена неким степеном модула трансформације, онда се функција φ зове *контраваријанта*. Функција φ биће дакле контраваријанта, ако је

$$\varphi(A_0, A_1, \cdots, u_1', u_2', \cdots) = M^p \varphi(a_0, a_1, \cdots, u_1, u_2, \cdots).$$

Одмах ћемо видети како се могу одређивати неке контраваријанте датих облика. Претпоставићемо тога ради да нам је н. пр. дат некакав тернеран облик

$$f = a_0 x_1^n + n a_1 x_1^{n-1} x_2 + n a_2 x_1^{n-1} x_3 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_3 x_1^{n-2} x_2^2 + \cdots.$$

Функција

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$$

преобразиће се у овај мах линеарном трансформацијом у функцију

$$u_1' x_1' + u_2' x_2' + u_3' x_3'.$$

Ако се дакле дат облик том трансформацијом преобразио у облик

$$F = A_0 x_1'^n + n A_1 x_1'^{n-1} x_2' + \cdots,$$

онда ће се том трансформацијом облик

$$a_0 x_1^n + \cdots + k(u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3)^n$$

морати преобразити у облик

$$A_0 x_1'^n + \cdots + k\,(u_1' x_1' + u_2' x_2' + u_3' x_3')^n,$$

т. ј. преобразиће се облик

$$(a_0 + k u_1^n)\, x_1^n + n\,(a_1 + k u_1^{n-1} u_2)\, x_1^{n-1} x_2 + \cdots \qquad (a)$$

у облик

$$(A_0 + k u_1'^n)\, x_1'^n + n\,(A_1 + k u_1'^{n-1} u_2')\, x_1'^{n-1} x_2' + \cdots.$$

Ако је сад $\varphi\,(a_0, a_1, \cdots)$ инваријанта облика f, онда ће функција

$$\varphi\,(a_0 + k u_1^n,\ a_1 + k u_1^{n-1} u_2, \cdots)$$

морати бити инваријанта облика (a). Биће дакле

$$\varphi(A_0 + k u_1'^n, A_1 + k u_1'^{n-1} u_2', \cdots) = M^p \varphi(a_0 + k u_1^n, a_1 + k u_1^{n-1} u_2, \cdots).$$

Функцију φ развићемо сад и на десној и на левој страни по Телорову обрасцу. Изједначивши коефицијенте што се јављају уз исте степене параметра k, видећемо да ће коефицијенти

$$\left(u_1'^n \frac{\partial}{\partial A_0} + u_1'^{n-1} u_2' \frac{\partial}{\partial A_1} + u_1'^{n-1} u_3' \frac{\partial}{\partial A_2} + u_1'^{n-2} u_2'^2 \frac{\partial}{\partial A_3} + \cdots\right)^n \varphi$$

и

$$M^p \left(u_1^n \frac{\partial}{\partial a_0} + u_1^{n-1} u_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + u_1^{n-1} u_3 \frac{\partial}{\partial a_2} + u_1^{n-2} u_2^2 \frac{\partial}{\partial a_3} + \cdots\right)^n \varphi$$

бити једнаки, а то значи *да је функција*

$$\left(u_1^n \frac{\partial}{\partial a_0} + u_1^{n-1} u_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + u_1^{n-1} u_3 \frac{\partial}{\partial a_2} + u_1^{n-2} u_2^2 \frac{\partial}{\partial a_3} + \cdots\right)^n \varphi \quad (b)$$

контраваријанта датог облика f. Те контраваријанте звао је Силвестер *евектантама.* Кадгод је дакле позната једна инваријанта неког облика, онда се свакад по обрасцу (b) може одредити и једна евектанта тог облика.

Пример I. Дат је облик

$$a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2.$$

Функција $a_1^2 - a_0 a_2$ је инваријанта тог облика. Стога је функција

$$a_2u^2 - 2a_1uv + a_0v^2$$

контраваријанта (евектанта) тог облика.

Пример II. Дат је облик

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2.$$

Инваријанта тог облика је дискриминанта његова

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{23}a_{31}a_{12} - a_{11}a^2_{23} - a_{22}a^2_{31} - a_{33}a^2_{12}.$$

Стога је функција

$$A_{11}u_1^2 + A_{22}u_2^2 + A_{33}u_3^2 + 2A_{23}u_2u_3 + 2A_{31}u_3u_1 + 2A_{12}u_1u_2$$

контраваријанта тог облика.

Напомена. Са A_{ik} означили смо кофактор елемента a_{ik} у детерминанти $\Delta = | a_{13} |$.

Пример III. Дата су два квадратна тернерна облика

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2$$

и

$$b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + 2b_{23}x_2x_3 + 2b_{31}x_3x_1 + 2b_{12}x_1x_2.$$

Симултана инваријанта тих облика је

$$\Theta = A_{11}b_{11} + A_{22}b_{22} + A_{33}b_{33} + 2A_{23}b_{23} + 2A_{31}b_{31} + 2A_{12}b_{12}.$$

Стога је

$$\begin{aligned}\Phi = &(a_{22}b_{33} + a_{33}b_{22} - 2a_{23}b_{23})u_1^2 + (a_{33}b_{11} + a_{11}b_{33} - 2a_{31}b_{31})u_2^2 \\ &+ (a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12})u_3^2 + 2(a_{12}b_{13} + a_{13}b_{12} \\ &- a_{11}b_{23} - a_{23}b_{11})u_2u_3 + 2(a_{23}b_{21} + a_{21}b_{23} - a_{22}b_{31} \\ &- a_{31}b_{22})u_3u_1 + 2(a_{31}b_{32} + a_{32}b_{31} - a_{33}b_{12} - a_{12}b_{33})u_1u_2\end{aligned}$$

контраваријанта системе датих облика. Еквација $\Phi = 0$ представља геометријски т. зв. тангенцијалан хармонијски коничан пресек. [1])

[1]) Види моју *Аналитичну Геометрију* стр. 761. и стр. 880.