(Bogdan Gavrilović: Formiranje jednoznačnih analitičkih funkcija)

O pravilnoj funkciji i o singularnoj tačci

~~1.~~ Pre nego što bi dali pojam pravilne funkcije, potrebno će biti da se upoznamo sa takvom stavkom, koji će se zapravo pojaviti kod rasprave~~xxx~~ svake stavke. To je vrlo važno, a potiče od Cauchy-a, a zapravo čini osnovu celokupne funkcionalne analize.

Usvojićemo jednu takvu funkciju, koja ~~je~~ je na jednom prosto ~~obuhvatnom~~ površine ~~xxxxxxx~~ (?) [1] funkcija jedne $z = u + iv$ kompleksne promenljive sa konačnim i jednoznačnim vrednostima. Ako je pak na ovoj površini x jedna proizvoljna tačka, onnda je jasno da je

$$\frac{f(z)}{z - x}$$

takodje funkcija, slično kao što je i $f(z)$ analitično na celoj površini [2], izuzev tačke $z = x$ gde ima beskonačnu vrednost.

(1) Riemann, Gesam. Werke : Grundlagen fur eine allg. Theorie der Funktionen einer complexen Grosse. U ovoj raspravi date su pojmovi prostog i višestrukog ~~obuhvatnog~~ površine i to : jednostruko obuhvatna površina je ona koju obuhvata jedna " s " linija. Takva površina se opet jednom linideli na dve jednostruko obuhvatne površine.

(2) Neki pisci nazivaju jednu funkciju samo onda "analitičnom ", ako je ista kontinualna, konačna, odredjene vrednosti: prema tome kod jedne "analitičke" funkcije nemože se govoritio beskonačnosti. Mi ćemo pored takvog naziva funkcije uvek ~~podrazumeti takvu~~ jednu funkciju, koja je u pojedinim delovima ravni kontinualna, konačna, odredjene vrednosti, ali pored toga ipak ~~u~~ pojedinim tačkama - koje su jedni od drugog odvojene - još ima beskonačnu veliku ili pak neodredjenu vrednost. Sa filizofskog tačka gledišta samo je ona funkcija analitička koja se analitičkom metodom može definisati.

-.-.-.-.-.-.-.-.-

Oko ove tačke, kao centar kruga opisaćemo proizvoljan krug sa poluprečnikom " c " na koji način ćemo dobiti takvu površinu koja je odredjena sa dve krive (contour). S obzirom da se na ovu površinu odnosi napred navedeni količnik, to možemo na osnovu poznate stavke iz nauke o funkcijama pisati

$$\int_s \frac{f(z)dz}{z - x} = \int_c \frac{f(z)dz}{z - x} \qquad (1)$$

gde se integriranje vrši uvek u pozitivnom smilu s obzirom na površinu (le sens direct) to jest tako, da integrorana površina ostaje uvek sa leve strane ukoliko se ide integracionim krivima.

Odredjujemo sada integracionu vrednost s obzirom na krug " c ". S obzirom da tačka z čini tačku na obimu kruga to možemo pisati

$$z - x = ie^{\varphi i}$$

ili posle diferenciranje

$$dz = rie^{\varphi i}d\varphi$$

Vrednost traženog integrala biće daklem

$$\int_C \frac{f(z)dz}{z-x} = i\int_0 f(x+re^{\varphi i})\, d\varphi$$

S obzirom da je usvojena funkcije kontinualna u okolini tačke $z = x$, to možemo "r" usvojiti toliko malim koliko ga god želimo, to znači drugim rečima da možemo ići prirodne granice vrednosti $x-a$. Pod takvim okolnostima pak stoji da za svaku vrednost φ-a

$$\lim_{r=0} f(x+re^{\varphi i}) = f(x)$$

stoji da je

$$\int_C \frac{f(z)dz}{z-x} = if(x)\int d\varphi = 2\pi i.f(x)$$

i uzimajući u obzir jednačinu (1) dobijemo

$$\int_S \frac{f(z)dz}{z-x} = 2\pi i.f(x) \qquad (2)$$

Ova jednačina nam kazuje, da ukoliko duž jedne krive znamo vrednosti funkcije od $f(x)$, koja je analitična na površini obuhvaćena tom krivom, tada možemo izračunati vrednost integrala na proizvoljno datoj površini uokvireno tom krivom.

Vrlo prosto se možemo uveriti i u to da vrednost ovog integrala može biti i nula, jer ukoliko bi tačka X bila van okvira površine uokvirene sa " S " tada bi vrednost količnika

$$\frac{f(x)}{z-x}$$

s obzirom da je u unutrašnjosti te površine za svaku tačku analitičan, bio bi po jednoj od najčuvenijih Cauchy-evih postavki

$$\int_S \frac{f(z)dz}{z-x} = 0$$

Stoga daklem u jednačini (2) iskazana vrednost integrala bitno zavisi od položaja tačke x , i uzimajući u obzir ovo ~~stavku~~ može iskazati ovu stavku :

Ako je kompleksna funkcija u okviru površine oivičene krivom " S " analitična i ~~proizvoljna vrednost~~ " x " proizvoljna vrednost argumenta te funkcije, tada možemo pisati

$$\int_S \frac{f(z)dz}{z-x} = 2\pi i.f(x) \text{ ili } 0,$$

u zavisnosti gde se posmatrana tačka X nalazi t.j. dali je u ili van uokvirene površine.

2. Pored korišćenja ove stavke dolazimo do značajnih fundamentalnih postavki. S obzirom da je kriva "s" proizvoljna, te je možemo odabrati tako da ima svoj centar t.j. da je kružnog oblika i da u ~~kaj~~ tom krugu leži i tačka "x". Centar kruga je označen sa "a". Kako je

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-a}{z-a}} = \frac{1}{z-a}\left[1 + \frac{x-a}{z-a} + \right.$$

$$+\frac{(x-a)^2}{(z-a)^2}+\cdots\cdots+\frac{(x-a)^n}{(z-a)^{n-1}.(z-x)}\Big)$$

možemo i pisati da je

(1) $$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_s\frac{f(z)dz}{z-x}=A_o+A_1(x-a)+\cdots+A_{n-1}(x-a)^{n-1}+R$$

gde je

$$A_m=\frac{1}{2\pi i}\int_s\frac{f(z)dz}{(z-a)^{m+1}}\quad a\quad R=\frac{1}{2\pi i}\int_s\frac{(x-a)^n f(z)dz}{(z-a)^n.(z-x)}$$

Kako je "a" centar kruga, a "x" proizvoljna tačka u krugu, toga za svaku tačku "x" stoji

$$\mathrm{mod}(x-a)<\mathrm{mod}(z-a)$$

kao i

$$2\pi i.\mathrm{mod}\,R\leqq\mathrm{mod}\int_s\frac{(x-a)^n.f(z)dz}{(z-a)^n.(z-x)}$$

Ova poslednja nejednačina je zanemarujuća kada $n=\infty$ postaje.

Naime pretpostavljama su najveći moduli za f(z) na obimu kruga M: tačaka a module (x-a) i (z-a) označavamo sa r_1 odn. r tada je

$$2\pi i.\mathrm{mod}\,R\leqq\int_s\frac{Mr_1^n ds}{r^n(r-r_1)}=\frac{2\pi r M}{r-r_1}\left(\frac{r_1}{r}\right)^n$$

koja je vrednost očevidno s obzirom na n = ~~xxxxxxx~~ jednaka nuli, jer M može biti beskonačan, a F(z) je još i na ~~xxx~~ liniji "s" analitična, dok je $\left(\frac{r_1}{r}\right)$ pravi razlomak koji konvergira prema nuli kada n postane ∞

Red pod (1) može se daklem produžiti do bezkonačnosti, sve dokle dok se tačka "x" nalazi unutra površine uhvićene krivom "s": ovaj red će imati sledeći svoj oblik

(2) $$f(x)=A_o+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+\cdots\cdots$$

gde je A_m zajednički koificijent definisan kao potpuno nezavisan integral od"x"a.

Sve one tačke koji zadovoljavaju gornji red kažemo da su u"okolini tačke "a" "ili u njegovom susedstvu[1]. "x" medjutim u ovoj okolini može primiti beskonačne vrednosti, koje redom možemo označiti sa x_1, x_2, x_3,........ x_n,.... što znači da se može govoriti i o okolini ovih tačaka.

(1) Weierstrass,Monatsberichte der Konigl.Akad. der Wissenschaften Zur Functionentheorie,1880.August.

Ako skup tačaka oko "a" označavamo A, tada će i okolina oko proizvoljne tačke "x" pripadati skupu "A2" ukoliko se i tetačke u okolini "x" nalaze u okolini A, t.j. ako je

$$\mathrm{mod}(x-x_i) = r_i$$

takav, ako sa r_i opisani krug oko tačke x_i nije veći od kruga opisanog oko tačke "a". Za okolinu takvih tačaka funkcija uvek ima svoju vrednost, što pak znači da se u okviru A nalazeće proizvoljne tačke "x" zadata funkcije može se razviti po svojim eksponentima u beskonačan red za sve vrednosti $(x-x_i)$.

Ovako definisan pojam o okolini jedne tačke, možemo kazati, da svaka funkcija, koja je takve osobine, da se oko tačke "a" vrednost $(x-a)$ poziti van i da se može razviti u red sa celim eksponentima, da je ona u toj tačci pravilna (?)(regular, reguliere) funkcija, i da je ta tačka "a" redovna (?)(regular, ordinaire) tačka te funkcije.(1)

Ako je ta tačka "a" u beskonačnosti i ujedno redovna tačka te funkcije, to na osnovu poznateg kriterijuma(2), koji odredjuje redovnu tačku, te ako u (2) umesto $(x-a)$ stavimo $\frac{1}{x}$ dobijemo funkciju oko jedne beskonačne tačke. Te tako znamo funkciju u ma kojoj tačci ravni ukoliko je $f(x)$ pravilna.

-.-.-.-.-.-.-.-.-

(1) K. Weierstrass. Abhandlungen derBerl. Akad. der Wissenschaften: Zur Therorie der eindeutigen anal. Functionen. 1876.

(2) Konigsberge, Dr. Leo: Vorlesungen uber die Theorie der elliptischen Functionen. 1. Theil 116. Leipzig. 1874.

-.-.-.-.-.-.-.-.-.-

3. S obzirom na svojstva analitičke funkcije na bezkrajnoj ravni možemo naći i takve tačke za koje ne možemo naći takvu okolinu za koju bi se mogla $F(x)$ $(x-a)$ funkcija sa celim pozitivnim eksppnentima postaviti. Takve tačke nazivaju singularnim tačkama (les points singuliers on critiques).

Videćemo da je uokolini takve tačke opšti oblik funkcije je kako sledi

$$(1) \qquad f(x) = G(x) + G'\left(\frac{1}{x-a}\right)$$

gde $G(x)$ ima pravilan oblik u tačci "a", dok je $G'\left(\frac{1}{x-a}\right)$ zapravo svedoči o postojanju singularne tačke oblikuje se kako sledi :

$$(2) \qquad G'\left(\frac{1}{x-a}\right) = \frac{B_1}{x-a} + \frac{B_2}{(x-a)^2} + \dots$$

Ako desna strana jednačin se sastoji od konačnog broja članova, tada je "a" tačka "beznačajna singularna tačka " ili "pol" funkcije: ako se pak red postaviti do bezkonačnosti tada je tada je "bitna singularna" tačka.

Za svojstva singularnih tačaka stoga je merodavn oblik jednačine $G'\left(\frac{1}{x-a}\right)$: ali obratno broj singularnih tačaka i njihova svojstva čine osnovu za klasifikaciju funkcije.

Predpostavljamo dakle da je "a" "beznačajna singularna tačka" funkcije. Ako to stoji, onda u smislu rečenog, izraz pod (1) može se pisati

(Bogdan Gavrilović: Formiranje jednoznačnih analitičkih funkcija)

i kako sledi :

$$f(x) = G(x) + \frac{B_1}{(x - a)} + \frac{B_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{B_n}{(x - a)^n}$$

Množimo li obe strane ove jednačine sa "n" stepenom od (x-a) i izvrši-svodjenje tada dobijemo sledeću jednačinu

$$(3) \qquad (x-a)^n \cdot f(x) = F(x)$$

gde je F(x) jedan red od (x-a) sa pozitivnim eksponentima, odnosno jedna prema tački "a" se odnoseća pravilna funkcija.

Iz ovog će za "beznačajnu singilarnu tačku" slediti još i jedna druga definicija: jer iz poslednjeg izraza vidimo još i to, ako se funkcija f(x) može oblikovati množenjem pravilnom funkcijom (x-a) n-tog stepena tada je "a" "beznačajna singularna tačka" te funkcije i to n-ti pol.

Slično možemo postupiti i u tom slučaju ako je broj "beznačajnih singularnih tačaka" funkcije "m" : ako te tačke u opšte označavamo "a_μ" , a odgovarajući red pak sa "k_μ" dobićemo da je

$$f(x) \cdot \prod_{\mu=1} (x-a_\mu)^{k_\mu} = F(x)$$

čija desna strana ujedno označava pravilnu funkciju tačaka "a_μ".

Ispravnost ovog izraza lako je utvrditi ako se samo obraćamo relaciji pod (3), Jer je

$$(x-a_1)^{k_1} \cdot f^1(x) = F_1(x)$$

takva funkcija, za koju "a_1" već nije singularna tačka.

Na sličan način je takodje

$$(x-a_1)^{k_1} \cdot (x-a_2)^{k_2} \cdot f(x) = F_2(x)$$

takodje takva funkcija gde tačka a_1 i a_2 takodje nisu singularne tačke.

Rezunujući tako dalje može se doći do zaključka da se f(x) može pisati u takvom obliku kao što je to već prikazano.

Iz istog obrazca (3) još se i drugi zaključci mogu izvoditi.

Ako je neka $\varphi(x)$ funkcija jednaka recipročnoj vrednosti funkcije f(x), koja je f(x) tačke (x-a) čini "n"-ti pol, tada je ista "a" tačka takodje funkciji $\varphi(x)$ čini "n"-tu nultu tačku: jer je

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{(x - a)^n}{F(x)}$$

stoga je

$$(4) \qquad \varphi(a) = \lim_{x=a} \left[\frac{(x - a)^n}{F(x)} \right] = 0$$

s obzirom da F(x) u tačci x=a ima konačnu vrednost.

Iz ovog sledi još i to ako neka f(x) funkcija u okviru zatvorene površine linijom "s" ima "n" broj nultih tačaka i "m" broj "beznačajnih singularnih tačaka", tada se ona može pisati u sledećem obliku:

$$f(x) = \frac{\prod_{\nu=1}^{=} (x - b_\nu)^{l_\nu}}{\prod_{\mu=1}^{=} (x - a_\mu)^{k_\mu}} \cdot G(x) \tag{5}$$

u kojem izrazu "l " i "b " su odgovarajuće nulta mesta, a "k " i "a " pak odgovarajuća "beznačajne singularne tačke", dok je G(x) je takva funkcija od "x" koja unutar linije "s" nema niti nultu mesto niti pak pola.

Iz prednjih znamo da je

$$f(x) = \prod_{\mu=1}^{=} (x - a_\mu)^{k_\mu} \tag{6}$$

takva funkcija koja ima "m" broj beznačajnih singularnih tačaka.

Kako pak $\prod_{\mu=1}(x - a_\mu)^{k_\mu}$ ne sadrži u sebi ni jednu nulu, treba da je u našem slučaju F(x) takva funkcija čije će se nulte tačke poklapati sa nultim tačkama funkcije f(x) u okviru zatvorene površine ograničene linijom "s", t.j. treba da je

$$F(x) = \prod_{\nu=1}^{=} (x - b_\nu)^{l_\nu} \cdot G(x)$$

Ovo je pak jasno jer izraz

$$F(x) = (x - b_1)^{l_1} \cdot G_1(x)$$

kaže da je u F(x) "b_1" je "l_1"redna nulta tačka.Funkcija $G_1(x)$ već nemože imati nultu tačku. $(x-b_1)$ već nemože biti nulta tačka funkcije $G_1(x)$, jer bi se to protivili nšem tvrdjenju da je u F(x) "l_1" redni broj tačke "b_1" : $G_1(x)$ je daklem takva funkcija koja svojim argumentima b_1, b_2 , . . . b_n nestaje(?).

Na osnovu toga možemo pisati da su u

$$G_1(x) = (x-b_2)^{l_2} : G_2(x)$$

na sličan način nulte tačke, tačke b_3. . . b_n u $G_2(x)$.

Na sličan način možemo produžiti naša razmišljanja i naposletku doći do izraza

$$G_{n-1}(x) = (x-b_n)^{l_n} \cdot G(x)$$

koji je samo za vrednost $x = b_n$ zanemarljiv.

Ako iz na takav način dobivenih izraza eliminišemo izraze $G_{n-1}(x)$, $G_{n-2}(x)$,. . . . ,$G_2(x)$, $G_1(x)$ dobijemo da je

$$F(x) = \prod_{\nu=1}^{=} (x - b_\nu)^{l_\nu} \cdot G(x)$$

koji izraz ako zamenimo u jednačinu pod (6),daje nam oblik dat pod (5) i s time smo ujedno dokazali našu tvrdnju.

Predšostavljajući ponovo da postoji jedna funkcija $\varphi(x) = \frac{1}{F(x)}$ možemo prema (5) pisati da je

Uz dodatak I

$$F(x) = \prod_{\nu=1}^{n} (x-b_\nu)^{l_\nu}\, g(x)$$

koji izraz ako zamenjujemo u (6) daje ponovo izraz pod (5) s kojim smo ujedno i dokazali našu tvrdnju.

Predpostavljajući ponovo da postoji i funkcija $\varphi(x) = \frac{1}{f(x)}$ prema (5) možemo pisati da

$$\varphi(x) = \frac{\prod_{\mu=1}^{m}(x-a_\mu)^{k_\mu}}{\prod_{\nu=1}^{n}(x-b_\nu)^{l_\nu}}\, \frac{1}{g(x)}$$

iz kojeg s jedne strane sleduje, da su $f(x)$ i $\varphi(x)$ sa takvim osobinama, da beskonačne singularitete jedne se poklapaju sa nultim tačkama druge i obratno, s druge strane pak možemo tvrditi i to da

$$\lim_{x=a_\mu}\left[f(x)\right] = \infty \qquad (\mu = 1, 2, \dots m)$$

t.j. da u jednoj beskonačnoj singularnoj tački vrednost funkcije je beskonačno velika.

Ako za jednu stvarnu singularnu tačku ove tvrdnje nisu primenjive, što i sleduje već iz definicije takve tačke i u ovom smislu ne može se naći takav pozitivan konačan broj, na koji se mogu primeniti ~~pretpostavke~~ pretpostavke[1] date pod (3). Takva tačka u prirodnoj granici može primiti jednu prirodnu vrednost

pri (5) (Hölder: Math. Ann. Bd. 20. Eine eindeutige analytische Function in unendlicher Nähe einer wesentlichen singulären Stelle etc.)

Konačno i to je pomoću ako je $x=a$ onda je iz funkcije $f_1(x), f_2(x), \dots f_k(x)$ ni najjednu nije značajno singularna, onda za ma koji racionalnu vezu nije značajno singularna.

Sastavna ispravnost ove tvrdnje biće se u sledeće tri postavke:

Ako od $f(x)$ i $\varphi(x)$ ma koji nije bitno singularna $x=a$) ~~onda~~ da

1) njihov zbir ili razlika

2) umnožak

3) niti za ma koju njihovu recipročnu tačka ne može biti tačka $x=a$ značajno singularna.

Ispravnost ovih postavki je takova da očigledan jer ~~samo~~ ~~racionalnu~~ se obavljaju samo racionalne operacije, stoga ovo niti ne dokazujemo

Uzimajući da ovo funkcije pribavljati samo u prevremenim singularnim tačkama, tj. ako takovih tačaka koji su jedan od drugog odvojeni (les points isolés) i le ohvolimitabovl tačaka stoga druga singularna tačka ne mora da postoji²

² (Mittag-Leffler, Comptes rendus 1882. Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. Mittag-Leffler a singularis pontok két nemre (points singuliers de première et de deuxième genre.)

(str 15) O različitom nastanku analitičkih funkcija

A) Kako smo ovde počeli sa definicijom nastanak singularnih tačaka počećemo sa ovi neposredni zadatak. Pokazaćemo, da jednoznačne analitične funkcije oko singularnih tačaka mogu nastati na sledeći način:

I. Ako funkcija ima ~~samo jedna~~ jedan singularitet tada je opšti oblik jednačine $f(x)$:

$$f(x) = g(x) + g'\left(\frac{1}{x-a}\right)$$

ili

$$f(x) = g(x)\cdot g'\left(\frac{1}{x-a}\right)$$

II. Ako funkcija na celoj ravni ima konačan broj singulara, tada je opšti oblik te funkcije

$$f(x) = g(x) + \sum_{\mu=1}^{m} g_\mu\left(\frac{1}{x-a}\right)$$

ili

$$f(x) = g(x)\cdot\prod_{\mu=1}^{m} g_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)\cdot(x-a_\mu)^{m_\mu}$$

III. Ako pak funkcija po ravni ima beskonačan broj singularnih, tada je opšti oblik

$$f(x) = g(x) + \sum_{\mu=1}^{\infty}\left[P_\nu(x) + g_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)\right]$$

ili

$$f(x) = g(x) + \prod_{\mu=1}^{\infty}(x-a_\mu)^{m_\mu} g_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)\cdot e^{P_\nu(x)}$$

dalje. Svaka singularna tačka, u kojoj se stiču se nalazi beskonačan broj prvog razreda (reda?) čini drugi razred singularnih tačaka i t.d. Zbir takvih singularnih tačaka daje — singularne tačke, a ostali čine oblinu odvojene od ovih -- ~~koje se~~ ~~nalaze~~ singularne tačke koje se nalaze duž jedne prave ili na celom delu površine i čine drugog razreda — singularne

(kraj str) tačke

(str 16) Korin stvarima $g(x)$ odgovara jednoj prvobitnoj funkciji i $g_\nu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)$ je pak karakteristična singularna funkcija od „a" i čine ~~beskonačni~~ odn. konačan red također od toga da li je a_μ ~~značajno~~ odn. beskonačnog singularno. Ove G_μ funkcije uvedeno daje i broj singularnih tačaka, jer smo svakim g_μ je definisana samo jedna singularna tačka.

Ako iz ovog oblika uzimamo samo prvi deo iz II. u obzir, tada dolazimo do jednog važnog pojma, koji potiče od Cauchy-a i odnosi se na integralni ostatak (le résidu) singularnih tačaka,

*(Cauchy Comptes rendus 1827. Mémoire sur les variations intégrales des fonctions)

Uzmimo sad jednu funkciju $f(x)$ koja je u unutrašnjosti s linije svuda analitična, osim u tačkama $a_1, a_2 \dots a_m$. Pod takvim pretpostavkama po Cauchy-u imamo

$$(1)\qquad \int_s f(x)dx = \int_{c_1} f(x)dx + \int_{c_2} f(x)dx + \dots + \int_{c_m} f(x)dx$$

gde u opšte c_μ čini krug oko tačke a_μ sa radijusom ρ_μ.

Ovakvom činjenicom, lako možemo odrediti vrednosti tih integrala kod kojih integraciona linija čini krug c oko tačke a_μ.

Znajući da

$$g_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right) = \frac{A_{1\mu}}{(x-a_\mu)} + \frac{A_{2\mu}}{(x-a_\mu)^2} + \dots$$

~~red~~ je konačan ili beskonačan, ali je jednako konvergentan red, stoji u prvom redu pod II fiksirano i zamenjeno pod (1) str 17 str 18

daje

$$\int_s f(x)dx = \int_{c_1} g(x)dx + \int_{c_2} g(x)dx + \dots + \int_{c_m} g(x)dx +$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{m} \int_{c_1} g_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)dx + \sum_{\mu=1}^{m} \int_{c_2} g\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)dx + \dots$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{m} \int_{c_m} g_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)dx$$

Kako je fak. $g(x)$ u svima krugovima c analitična, stoga je prvi integral ravan nuli; na isti način integrali pod Σ po kojih $(m-1)$ su zanemarujuće i ostaje samo onaj čiji unutra c je jednak nuli.

Možemo pisati stoga

$$\int_s f(x)dx = \sum_{\mu=1}^{m} \int_{c_\mu} g_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)dx$$

Ili ako pišemo

$$\sum_{\mu=1}^{m} g_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right) = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{A_{1\mu}}{x-a_\mu} + \sum_{\mu=1}^{m} g'_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)$$

gde je

$$g'_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right) = \frac{A_{2\mu}}{(x-a_\mu)^2} + \frac{A_{3\mu}}{(x-a_\mu)^3} + \dots$$

[str. 19]

Kao i

(2) $\int_S f(x)dx = \sum_{\mu=1}^{m}\int_{C_\mu}\frac{A_{1\mu}dx}{x-a_\mu} + \sum_{\mu=1}^{m}\int_{C_\mu} G_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)dx$

Ali

$$x-a_\mu = \rho_\mu(\cos\alpha_\mu + i\sin\alpha_\mu)\quad dx = i\rho_\mu(\cos\alpha_\mu + i\sin\alpha_\mu)\,d\alpha$$

stoga

$$\sum_{\mu=1}^{m}\int_{C_\mu}\frac{A_{1\mu}dx}{x-a_\mu} = \sum_{\mu=1}^{m} A_{1\mu}\int_0^{2\pi} d\alpha_\mu = 2\pi i\sum_{\mu=1}^{m} A_{1\mu}$$

ali u (2) pod drugim znakom Σ se nalazeći integrali su iščezavajuće, jer je integral uzet po zatvorenoj liniji i osim toga vrijednosti funkcije G uzimaju iste ~~vrijednost~~ za $\alpha=0$ i za $\alpha=2\pi$.

Stoga će biti

$$\int_S f(x)dx = 2\pi i\sum_{\mu=1}^{m} A_{1\mu}$$

Faktor $A_{1\mu}$ je integralni ostatak funkcije $f(x)$. Stoga možemo reći, da, ako se na unutar neke zatvorene linije S nalazi konačan broj singularnih tačaka, tada $\int f(x)dt$ nije ništa drugo, nego suma ~~ost~~ integralnih ostataka koji se odnose na te singularne tačke, a koji je ostatak umnožen sa $2\pi i$.

Primaćujemo da kod jedne jednoznačne ~~analitičke funkcije~~ njen integralni ostatak logaritamskog izraza analitičke funkcije kao što ćemo kasnije dokazati je ili pozitivan ili negativan cio broj.

vidi str. 20 2.) Idemo dalje ka našem cilju i dokažemo, da funkciju $f(x)$ oko singularnih tačaka analitički možemo izraziti samo tako možemo postaviti, kako smo to po I, II, i III na početku ovog poglavlja naznačili.

Polazeći od najprostije pretpostavke pretpostavimo stoga, da funkcija ima samo jednu singularnu tačku. Ako oko ove tačke, koju ćemo označiti sa a, opišemo dva ~~centr~~ koncentrična kruga, i ako je x jedna proizvoljna tačka u tom prstenu, tada se funkcija može razviti u dva reda, s time da jedan se razvija prema $(x-a)$ ~~eksponenata~~ pozitivnim eksponentima, a drugi prema $(x-a)$ negativnim eksponentima.

Neka neki bude od ovih koncentričnih krugova s spoljni, a unutarnji σ pak jedan ~~beskonačno malim poluprečnikom~~ krug sa beskonačno malim radiusom koji sadrži u sebi tačku x i kako je

$$\frac{f(x)}{\cancel{z-x}}$$

funkciji analitičko postojanje samo u tačkama $z=x$ i $z=a$ prestaje stoga možemo pisati da je

str. 20 $$\int_S \frac{f(z)dz}{z-x} = \int_C \frac{f(z)dz}{z-x} + \int_\sigma \frac{f(z)dz}{z-x}$$

str. 20

Ali prema jednoj ranijoj postavci je

$$\int_{\rho} \frac{f(z)\,dz}{z-x} = f(x)\cdot 2\pi i$$

stoga i prethodnu jednačinu možemo pisati

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\rho} \frac{f(z)\,dz}{z-x} - \frac{1}{2\pi i}\int_{c} \frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

str. 20 / str. 21

Ako z uzimamo na obimu kruga ρ, tada će svakoj tački

$$\mathrm{mod}\,(x-a) < \mathrm{mod}\,(z-a)$$

relacija će odgovarati, iz koje možemo videti, da razlomak $\frac{1}{z-x}$ možemo razviti u jedan konvergentan red, koji red ima oblik

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a} + \frac{x-a}{(z-a)^2} + \frac{(x-a)^2}{(z-a)^3} + \dots$$

ako je pak ~~[illegible]~~ z na obimu kruga c, onda je

$$\mathrm{mod}\,(z-a) < \mathrm{mod}\,(x-a)$$

i stoga

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{x-a} + \frac{z-a}{(x-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(x-a)^3} + \dots$$

Zamenjujući ove redove u funkciju $f(x)$ dobijamo da je

$$f(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \dots + \frac{B_1}{x-a} + \frac{B_2}{(x-a)^2} +$$

gde je opšti oblik konstanata na desnoj strani

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\rho} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} \qquad B_n = \int_{c} (z-a)^{n-1}\cdot f(z)\cdot dz$$

Prvi deo ovih redova označimo sa $g(x)$, a drugi sa $g'\left(\frac{1}{x-a}\right)$, te vidimo da je analitički oblik funkcije blizu

str. 21 / str. 22

$$f(x) = g(x) + g'\left(\frac{1}{x-a}\right)$$

koji upravo u potpunosti odgovara obliku pod I.

Ukoliko je u funkciji g' koji faktor zanemarljiv, tada funkcija $f(x)$ čini samo jednu jednoznačnu funkciju u okviru kruga ρ.

Iz poslednjeg obrasca ove funkcije sledi još i to, da svaka funkcija koja je u jednom konačnom prostoru analitična i pored toga ima jednu singularnu tačku, može se pretstaviti umnoškom dva reda, za kojima jedan red ima $(x-a)$ pozitivne, a drugi ~~razne~~ iste negativne eksponente.

Ako $F(x)$ u konačnom prostoru ima m nultih tačaka, tada prema prethodnom možemo pisati

$$F(x) = \prod_{\nu=1}^{m} (x-b_\nu)^{k_\nu} f(x)$$

str. 22

gde je uz izvedene funkcije $f(x)$ a postoji takozvana analitičnost i kako $f(x)$ nema nijednu multi tačku u prostoru, stoga i logari- ~~tamske izvod~~ singulari logaritamskog izvoda su takođe singulari $F(x)$-a. Stoga možemo pisati gde je

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \dots + \frac{B_1}{(x-a)} + \frac{B_2}{(x-a)^2} + \dots$$

U ovom obrascu na desnoj strani se nalaze redovi ~~koje~~ koje su obadva konvergentna, te ih možemo po članovima

str 22 / str 23 integrisati i stoga

$$f(x) = C + A_0(x-a) + \frac{1}{2}A_1(x-a)^2 + \dots + B_1\, l(x-a) - \frac{B_2}{x-a} - \dots$$

ili

$$l\, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A'_n (x-a)^n + \sum_{n=1} \frac{B'_n}{(x-a)^n} + B_1\, l(x-a);$$

Ali koeficient B_1 nije ništa drugo, nego integralni ostatak logaritamskog izvoda, koji ćemo označiti sa m i prozilaziti stoga posle odgovarajućeg obilikovanja poslednjeg izraza

$$f(x) = e^{\sum_{n=0}^{\infty} A'_n (x-a)^n} = e^{\sum_{n=1} \frac{B'_n}{(x-a)^n}} \cdot e^{m\, l(x-a)}$$

Iz ovog izraza sada vidimo da ostatak logaritamskog izvoda ceo broj, jer ako bi on bio razlomak, tada bi izvor poslednjeg oblika $f(x)$-a morali zahtjevati to, da je to polidromska funkcija, što se protivi našoj postavci. Ovo možemo se jednom iz ovog da smatrati dokazanim.

~~Znajući~~ iz ovog vidimo da u poslednjem izrazu na desnoj strani se nalazi takođe prvi $(x-a)$ pozitivni a drugi negativni eksponent i da se može razviti u konvergentan red, treći faktor $(x-a)$ je jednak sa m eksponentom.

Stoga jedna takova analitična funkcija koja ima u jednoj singularnoj tački, ima analitični izraz jo

str 23 / str. 24
$$f(x) = g(x)\, g'\left(\frac{1}{x-a}\right)\cdot(x-a)^m$$

koji u sebi sadrži drugi oblik iz I.; jer ako je m pozitivan tada ćemo $(x-a)^m$ množiti sa $g(x)$, ako je faktor negativan sa $g'\left(\frac{1}{x-a}\right)$-om. I ovim smo na taj način gornji izraz oslobodili faktora $(x-a)^m$.

3. Sledeći postupak po postavljenom članku, kroz dolazimo do ostvarivanja takove funkcije, koja u okviru jednog ~~zatvorenog~~ lica ima konačan broj singularnih tačaka. Ako su ovi $a_1, a_2, \dots a_n$

str. 24

str. 22

tada unutar jedne ~~tačke~~ x u površini obuhvaćena konturom s možemo pisati

$$\int_s \frac{f(z)dz}{z-x} = \int_c \frac{f(z)dz}{z-x} + \sum_{\mu=1}^{m} \int_{c_\mu} \frac{f(z)dz}{z-x}$$

ako c označava ~~tačk~~ krug koji obuhvata tačku x, a c_μ pak krug koji obuhvata tačku a_μ, a čiji radijus po potrebi može da dosegne do obima najbližeg kruga c.

Prvi član sa desne strane ove jednačine jednako je $2\pi i f(x)$; stoga je

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{f(z)dz}{z-x} - \frac{1}{2\pi i}\sum_{\mu=1}^{m} \int_{c_\mu} \frac{f(z)dz}{z-x}$$

~~Tumače~~ Istraživamo sada na isti način u ovim članovima sadržane analitičke oblike integrala!

U međutačnosti s-a označavamo takozvana tačke koji je značenje redovna ~~tačka~~ f(x)-a, tako da bude stoga

$$\mathrm{mod}\,(z-a) \gtrless \mathrm{mod}\,(x-a)$$

gde je a uzeto kao i z na s-u ili u obimu kruga koji obuhvata singularne tačke. U prvom slučaju $\frac{1}{x-a}$ razlomku je (x-a) pozitivan, u drugom slučaju pak sa negativnim

str.24
str.25

eksponentom možemo razviti red. Ako ovo uradimo, pri članu postupamo kao što smo to činili u poslednjem članku i ako rezultat unosimo u prvi odnosno drugi integral, za f(x) dobijemo sledeći izraz

$$f(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \cdots + \frac{B_{11}}{x-a_1} + \frac{B_{12}}{(x-a_1)^2} + \cdots$$

$$+ \frac{B_{21}}{x-a_2} + \frac{B_{22}}{(x-a_2)^2} + \cdots + \frac{B_{m1}}{x-a_m} + \frac{B_{m2}}{(x-a_m)^2} + \cdots$$

gde je

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} \qquad B_{\mu n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_\mu} (z-a)^{n-1} f(z)\,dz$$

Ako prvi označavamo sa G(x), a ostali m-i red μ-ti član ~~pak~~ sa $G_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)$, vidimo da je jedna jednoznačna analitička funkcija, koja ima konačan broj singulara, u opšte izražena stvarno je i:

$$f(x) = G(x) + \sum_{\mu=1}^{m} G_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)$$

prema $(x-a_\mu)$ negativ...

str.25
str.26

gde G(x) ima oblik proste funkcije, a $G_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)$ pak je jedan konačan ili beskonačan red, zavisno od toga da li je a_μ jedna bitna odnosno beskonačna singularna tačka:

U ovoj zatvorenoj krivoj s možemo načiniti f(x) i u obliku umnoška, što pak nije ništa drugo, nego analitički dokaz poslednjeg člana funkcije.

Pretpostavljamo da f(x) ima konačan broj singularnih tačaka u zatvorenoj krivi s. Na isti način i $\frac{f'(x)}{f(x)}$ ima konačan

str. 26

broj singularnih tačaka, ali pod $f(x)$ - razumevamo uslovi da ima konačan broj nultih tačaka. Na taj način je broj tačaka bez singularne tačke logaritamskog izvoda on, a šta nije drugo nego zbir singularnih i nultih mesta date funkcije. Ali način da pri obrazovanju sprovedenim konstatacijama oblik funkcije je:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = g(x) + \sum_{\mu=1}^{m} g_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)$$

gde su mesta a_μ nalaze i nulte tačke $f(x)$ -a.

Ako od poslednjeg izraza na desnoj strani pojedine članove i analitički izražavamo, onda je

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \dots + \sum_{\mu=1}^{m}\left[\frac{B_{1\mu}}{x-a_\mu} + \frac{B_{2\mu}}{(x-a_\mu)^2} + \dots\right]$$

Ako izvršimo integrisanje obe strane dobićemo, da je

str. 26 / str. 27 $$l\, f(x) = C + A_0(x-a) + \frac{A_1}{2}(x-a)^2 + \dots + \sum_{\mu=1}^{m}\left[B_{1\mu}\, l(x-a_\mu) - \frac{B_{2\mu}}{x-a_\mu} - \dots\right]$$

što se može pisati i u obliku:

$$l\, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A'_n (x-a)^n + \sum_{\mu=1}^{m} B_{1\mu}\, l(x-a_\mu) + \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B'_{n\mu}}{(x-a_\mu)^n}$$

iz kojeg ako je $B_{1\mu} = m_\mu$

$$f(x) = e^{\sum_{n=0}^{\infty} A'_n (x-a)^n} \cdot e^{\sum_{\mu=1}^{m} m_\mu\, l(x-a_\mu)} \cdot \prod_{\mu=1}^{m} e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B'_{n\mu}}{(x-a_\mu)^n}}$$

Poslednji faktor na desnoj strani može se razviti u red sa pozitivnim eksponentima, a drugi nije ništa drugo nego $\prod_{\mu=1}^{m}(x-a_\mu)^{m_\mu}$; treći faktor predstavlja pa i red iz kojeg se razvija prema $(x-a_\mu)$ negativnom eksponentu razvoja.

Stoga je

$$f(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} P_n (x-a)^n \cdot \prod_{\mu=1}^{m}(x-a_\mu)^{m_\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_{n\mu}}{(x-a_\mu)^n}$$

ili

$$f(x) = g'(x) \cdot \prod_{\mu=1}^{m}(x-a_\mu)^{m_\mu} g_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)$$

u kojem možemo već odrediti nulte tačke $f(x)$ -a u g_μ -a. To jest o $f(x)$ možemo pretpostaviti ima konačan broj nultih tačaka; ovi [illegible] bili bezznačajne singularne prvobitno pretpostavljene funkcije.

str. 27 / str. 28

str 28

Ali da $f(x)-a$ samo dođe određeni ~~[illegible]~~ racionalni postupak, dok ~~ova~~ tačka a ne mora biti sistem funkcije i ~~singularna~~ nul[illegible] ~~tačka~~ tačka a i nebitna singularna, iz toga sledi da broj članova g'-a ne dokonazan i manji od n, obzirom da se u g'_μ mogu brisati nulte tačke $f(x)-a$. Brišući ovo u svim mestima nulte ~~tačke~~ $f(x)-a$, poslednji obrazac će biti:

$$f(x) = g(x)\cdot \prod_{\mu=1}^{m} (x-a_\mu)^{m_\mu}\, g'_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)$$

gde se već u a_μ ovime već uve podrazumevaju nulte tačke $f(x)-a$. Isto tako $g(x)$ s obzirom na a ima svojstvo pravilne funkcije i konvergentna je, ako je

$$\mathrm{mod}(x-a) < \mathrm{mod}(z-a)$$

a $g_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)$ je pak konačno ili ~~beskonačno~~ konvergentan red zavisno da li je tačka $x=a_\mu$ bitna ili nebitna singularna tačka; uslovi konvergentnosti reda je

$$\mathrm{mod}(z-a) < \mathrm{mod}(x-a_\mu)$$

Ovaj poslednji obrazac, koji slaže sa datim izrazom pod 4, izražava dokazivanje ta našu tvrdnju, prema kojoj svaka funkcija, koja je analitičan u oblasti i singularne tačke obuhvataju brojeve, da se može izraziti u obliku množitka $(m+1)$ redova, od ovih redova jedan se sastoje prema pravilnijim pozitivnim, a ostali prema negativnim eksponentima.[1]

1) (Sastavljanje ovakvih funkcija na elementarnom načinu je pokazao u raspravi Weierstrass: Zur Theorie etc., ali je ovo mnogo opširno)

str. 28 / str. 29

b.) Sva razmatranja su samo dotle u važnosti dok je broj singularnih tačaka konačan; ako je ovo pak beskonačan, tada se može dokazati to da izraz pod II. ne stoje – zbir konačnih redova ili njihov množitak ne mora biti uvek konvergentan.

Potom pogledam Mittag-Leffler'[1] funkcija takvih oblika gde je ona svuda konačna i određena vrednosti ~~[illegible]~~ koliko broj singularnih tačaka i njihovo svojstvo (3) biti red!)

1) Mittag-Leffler: Comptes rendus 1882. Sur la théorie etc.)

Napomenućemo pak, da u slučaju, ako funkcija ima samo beskonačan broj samo bezznačajnih singularnih tačaka, može funkcija stvoriti najnapred uzorom Weierstrassovih teorema[2], ako se samo podsetimo na recipročnost ovih funkcija koji su u ~~[illegible]~~ ovakvom međusobnom odnosu

$$f(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$$

2) (Weierstrass: Zur Theorie etc. Prema ovoj teoriji mogu se stvoriti takve funkcije gde su član [illegible] „unesovi nulte mesta" (die Reihe der Null-Stellen) se sastoji od beskonačnog broja članova)

str 29

str. 29

Mi se nećemo postaviti [illegible] ovim specijalnim slučajem, jer bi morali znati (te discipline (oblasti)) na kojima se Weierstrass-ova teorema [illegible], nego ćemo je samo obraditi u opšte.

Pretpostavljamo da je red singularnih tačaka funkcije $a_1, a_2, \dots a_n \dots$ koji odgovaraju funkcijama $g_1, g_2, \dots g_n \dots$ Opšti oblik ovih g funkcija je

$$G_\mu(x) = g_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{\nu\mu}}{(x-a_\mu)^n}$$

str. 29 / str. 30

Mittag-Leffler tvrdi, da pod takvim uslovom je moguće onda konstruisati ~~jednu~~ algebarsku funkciju $P_\nu(x)$, čiji red se sa [illegible] tako da je

$$(1)\quad f(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty}\left[P_\nu(x) + G_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)\right]$$

konvergentan ~~za~~ u pogledu svake vrednosti x-a, koji se nalazi van kruga ~~koji obuhvata~~ C_μ koji obuhvata tačku a_μ.

Da bi ovo postigli, pretpostavljamo, da su moduli tačaka $a_1, a_2, \dots a_n \dots$ ovim dvema uslovima podvrgnuti:

1°. Neka bude za svaku vrednost μ-a i n-a

$$\mod a_\mu \leq \mod a_{\mu+n}$$

t.j. u redu singularnih tačaka moduo svakog člana je veći ~~ili~~ ili pak najviše jednak modulu prethodnog člana modula.

2° Ako se mnoštvo singularnih tačaka sastoji od beskonačnog broja članova, onda mora biti

$$\lim_{\mu=\infty} \mod a_\mu = \infty$$

Iz prethodnog poznato je još i to da je $g_n(x)$ definisan ~~postavom~~ konačnim postavkom s i C_μ. Stoga možemo pisati da je

$$g_\mu(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_A \frac{g_n(z)\,dz}{z-x} - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\mu}\frac{g_n(z)\,dz}{z-x}$$

S obzirom da naš izraz mora da važi za celu površinu stoga možemo uzeti i računajući s-a beskonačnim.

str. 30 / str. 31

Ako je pak $z=\infty$ tada je $g_n(z)=0$, stoga mora biti

$$\lim_{z=\infty}\left[\frac{g_n(z)\,dz}{z-x}\right]=0$$

pri važećoj ~~definiciji izraz~~ definiciji $g_\mu(x)$ izraz [illegible]

$$(2)\quad g_\mu(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\mu}\frac{g_n(z)\,dz}{z-x}$$

Ako pak sada moduli tačaka $a_1, a_2, \dots a_n \dots$ su odgovarajući [illegible] vrednost modula x-a $\rho\xi$, i ako od krugova $a_1, a_2, \dots a_n \dots$ i najveća vrednost modula x-a [illegible]

C najveći ~~poluprečnik~~ poluprečnik označavamo sa ξ, tada posmatramo [illegible] površinu oko [illegible], pošto je, da se za μ može naći neka vrednost h od koje počevši je $a_\mu > \mu+\xi$, što toliko znači, da oko svake x-tačke kao početne opisani krug sa poluprečnikom ξ neće se str 31 ne znači nam ~~[illegible]~~ c_μ-og broja

Izraz pod (1) možemo sada pisati u obliku

(3) $$f(x) = \sum_{\mu=1}^{k-1}\left[P_\nu(x) + G_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)\right] + \sum_{\mu=k}^{\infty}\left[P_\nu(x) + G_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)\right]$$

Prvi deo desne strane se sastoji od konačnog broja članova; osim toga funkcija G_μ je ~~[illegible]~~ u okolini tačaka $a_1, a_2, \ldots, a_k$ definisana i pomoću konvergentnog reda, stoga je i prvi deo poslednjeg izraza konvergentan. Kako tako stoje stvari, moramo obratiti pažnju samo ~~[illegible]~~ izraza pod drugim znakom, i kako ćemo videti pokazaće se značaj izraza pod $P_\nu(x)$.

[illegible] vraćamo se na oblik $G_\mu(x)$-a u (2) koji sada možemo pisati

$$G_\mu(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{c_\mu} G_\mu(z)\,dz\left[\frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \cdots + \frac{x^{\nu-1}}{z^\nu} + \frac{x^\nu}{z^\nu(z-x)}\right]$$

ili ako ih razdvojimo

$$G_\mu(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{c_\mu} G_\mu(z)\,dz\left[\frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \cdots + \frac{x^{\nu-1}}{z^\nu}\right] - \frac{1}{2\pi i}\int_{c_\mu}\frac{x^\nu G_\mu(z)\,dz}{z^\nu(z-x)}$$

u ovoj jednačini se pojavljuje broj ν određićemo u ovoj funkciji, na taj način što će funkcija $G_\mu(x)$ biti jednako konvergentna i ako označimo prvi integral sa P_ν a drugi sa R_μ onda još

$$G_\mu(X) + P_\nu(X) = R_\mu$$

Videli na krugu c_μ biće M_μ najveći modul od G_μ; jasno je još da u odnosu na isti krug je modul $z \equiv a_\mu - \rho$; posle takve konstatacije vidimo da je

$$\mathrm{mod}\, R_\mu \leqq \frac{1}{2\pi}\int_\mu \frac{M_\mu \xi^\nu\, d\nu}{(a_\mu-\rho)^\nu(a_\mu-\rho-\xi)} \leqq \frac{M_\mu \rho\, \xi^\nu}{(a_\mu-\rho)^\nu(a_\mu-\rho-\xi)}$$

str 32 / str 33 Ako uvedemo jednu takvu λ_μ konstantu, koja prema

$$M_\mu \rho = (a_\mu-\rho)^{\lambda_\mu}$$

date jednačine određenu, onda gornji izraz možemo pisati još i

$$\mathrm{mod}\, R_\mu \leqq \frac{\xi^\nu}{(a_\mu-\rho)^{\nu-\lambda_\mu}(a_\mu-\rho-\xi)}$$

Iz ovog sleduje

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\mathrm{mod}\, R_\mu \leqq \sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{\xi^\nu}{(a_\mu-\rho)^{\nu-\lambda_\mu}(a_\mu-\rho-\xi)}$$

Ovde sada razlikujemo dva slučaja u pogledu vrednosti λ_μ. Ako je ovaj negativan ili nula, tada je jasno, da je tada poslednji izraz desne strane jednak nuli; ako je $\nu = \mu$; naprotiv, ako je λ_μ pozitivan broj tada je $\nu = \mu + 2\lambda_\mu$ uslov konvergentnosti reda.

str 33

Nr 33

Tako pošto podesnog odabiranja ν-a stvorimo ~~[illegible]~~ u pogledu svakog μ-a je

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\left[g_\mu(x)+P_\nu(x)\right]=\sum_{\mu=1}^{\infty}R_\mu$$

Ovaj red jednako konvergentan red. Ali konvergentnost ovog reda povlači sa sobom i konvergentnost izraza pod (3) kao i pod (1) vidimo dakle da se uvek može naći takav izraz $P_\nu(x)$ funkcije koji takoreći korigira konvergentnost izraza pod (1).

str. 33 / str. 32 Ako uz (1) dodamo još jednu proizvoljnu funkciju $g(x)$ koja nema niti beskonačne, niti bitne singularne tačke tada je najopštiji oblik funkcije

$$f(x)=g(x)+\sum_{\mu=1}^{\infty}\left[P_\nu(x)+g_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)\right]$$

što je ujedno analitički izraz Mittag-Lefflerove postavke. g_μ i ovde kao i napred karakterističnih jednačina singularnih tačaka.

Ako uporedimo funkciju $f(x)$ sa prostim delom pod III, vidimo da su obe potpuno identične, te na taj način samo još je odlučeno to pitanje, može li se takva funkcija u obliku umnoška ~~[illegible]~~ napisati, koja ima beskonačan broj singularnih tačaka? Videćemo da je i to moguće. Suština toga misli je u ovde počivanom istom da je ostatak izvoda ~~[illegible]~~ logaritma konačan pozitivan (ili negativan ceo broj (podrazumeva se različit od nule)).

Izvodimo sad jednu takvu funkciju koja je analitička u celoj ravni izuzev tačke $a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ izvod ove funkcije je na sličan način $\frac{f'(x)}{f(x)}$ i njene singularne se poklapaju sa nultim ~~tačkama~~ i singularnim tačkama funkcije $f(x)$-a.

Stoga možemo pisati

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=g(x)+\sum_{\mu=1}^{\infty}\left[P_\nu(x)+g_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)\right]$$

gde znači a se nalaze i nulte tačke od $f(x)$-a i ako pak ispišemo analitički oblik od $g(x)$ i $g_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)$ biće

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+\cdots+\sum_{\mu=1}^{\infty}\left[P_\nu(x)+\frac{R_{1\mu}}{x-a}+\cdots\right]$$

str. 34

str. 25

4.

Kako je u ovom obuhvatu izraz sa desne strane — redovi — na celoj površini konvergentan, dakle podjednako konvergentni eksponencijalni redovi, stoga je dozvoljena integracija po članovima i te stoga

$$l f(x) = C + A_0(x-a) + \frac{A_1}{2}(x-a)^2 - \dots + \sum_{\mu=1}^{\infty}\left[P_\nu(x) + B_{1\mu}\, l(x-a_\mu) - \frac{B_{2\mu}}{x-a_\mu} - \dots\right]$$

gde je i $p_\nu(x)$ ~~kao~~ slično kao i $P_\nu(x)$ integral od ν-a i tiče i funkcija od μ-a i a faktor $B_{1\mu}$ pak jednak je dvom pozitivnom ili negativnom ceo μ-u i te stoga možemo pisati da

$$l f(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} A'_\mu (x-a)^\mu + \sum_{\mu=1}^{\infty}\left[p_\nu(x) + m_\mu\, l(x-a_\mu) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B'_{n\mu}}{(x-a_\mu)^n}\right]$$

iz kojeg zatim

$$f(x) = e^{\sum_{n=0}^{\infty} A'_n (x-a)^n}\, e^{\sum_{\mu=1}^{\infty}\left[p_\nu(x) + m_\mu\, l(x-a_\mu) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B'_{n\mu}}{(x-a_\mu)^n}\right]}$$

Ali znak zbira na drugi faktor $p_\nu(x)$ se može primeniti samo pod ovim prethodnim uslovima, da od ovih funkcije neke budu zanemarljive, stoga faktor $\sum_{\mu=1}^{\infty} p_\nu(x)$ možemo zapravo pisati zajedno samo posle odgovarajuće preobrazbe poslednjeg izraza. Na desnoj strani $f(x)$-a se nalazeće eksponencijalne funkcije možemo pisati i ovako

str. 35 / str. 36

$$e^{\sum_{n=0}^{\infty} A'_n (x-a)^n} = g(x)$$

$$e^{\sum_{\mu=1}^{\infty}\left[m_\mu\, l(x-a_\mu) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B'_{n\mu}}{(x-a_\mu)^n}\right]} = \prod_{\mu=1}^{\infty}(x-a_\mu)^{m_\mu}\, g_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)$$

Ove zamenjujući u izraz $f(x)$ dobijemo da je opšti oblik od $f(x)$ još i

$$(1)\quad f(x) = g(x)\prod_{\mu=1}^{\infty}(x-a_\mu)^{m_\mu}\, g_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)\cdot e^{M_\nu(x)}$$

Vidimo da funkcija ima a beskonačan broj singularnih tačaka i te se može pisati kao ~~beskona~~ umnožak beskonačan broj umnožitelja i ovi umnožitelji se mogu smatrati ~~zajedno~~ razlovima funkcija razdvojenih singularnih tačaka.

U ovim izrazima nulte tačke $f(x)$-a već su odvojeni iz a_μ-a koristeći taj postupak kojim smo koristili pri postavljanju funkcije sa konačnim brojem singularnih tačaka.

Opravdano napominjemo i to da postavke za module za a i $P_\nu(x)$ funkcije od ~~nagibom~~ ν-a ujedno se odnoseće osobine i ovde važe, s obzirom da je poleznu tačku kod Mittag-Lefflerove postavke. ~~Ako~~ Ako još to budemo postavljanje $f(x)$ po I u potpunosti odgovara poslednjem obliku pod III, to smatramo da smo naš zadatak u potpunosti završili.

Kraj